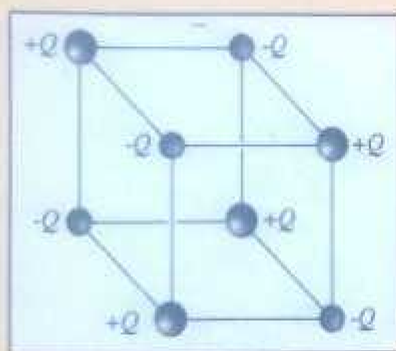
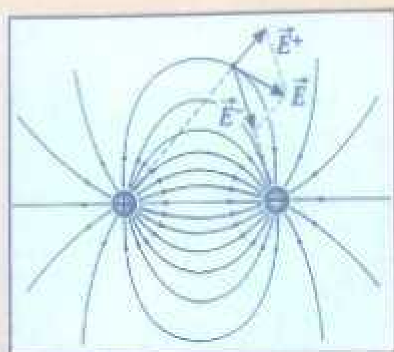
Vol. 5 Serie: FÍSICA
Para Ciencias e Ingeniería

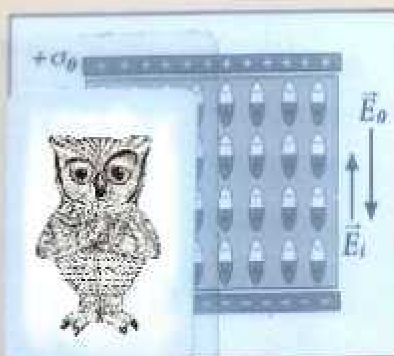
INTERACCIÓN ELÉCTRICA

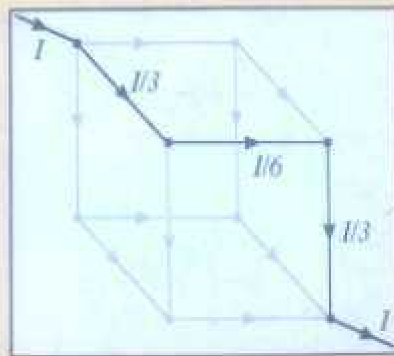
Cuarta Edición

Principios, Preguntas y Problemas Resueltos









DOUGLAS FIGUEROA

Titulo Original:

INTERACCIÓN ELÉCTRICA

Serie "Física para Ciencias e Ingeniería" – Volumen 5

Primera Edición: 1996
Segunda Edición: 1998
Tercera Edición: 2001
Cuarta Edición: 2005
Primera Reimpresión: 2008 (2.000 ejemplares)

DEPÓSITO LEGAL: lf 252 2005 621918

ISBN: 980-12-1157-1

Composición y Diagramación

Douglas Figueroa

Impresión

Miguel Angel García e Hijo, SRL
Sur 15 – El Conde - Caracas

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

INTRODUCCIÓN

Esta serie está dirigida a estudiantes de los cursos introductorios de física universitaria. No pretende sustituir al libro de texto; su único propósito es complementarlo, ayudando al estudiante a afianzar y profundizar sobre lo aprendido en el aula, aplicando los principios y leyes físicas en situaciones interesantes y estimulantes. Se hace hincapié en tratar de desarrollar habilidades y estrategias metodológicas que le permita vencer las dificultades inherentes al aprendizaje de esta asignatura; tarea que difícilmente puede lograr el docente en el limitado tiempo de clase que dispone. En esta Cuarta edición de la Unidad 5 dedicada a Interacción Eléctrica, se han actualizado y ampliado todo los temas, incorporando nuevos problemas y preguntas. Se presenta el material en siete capítulos, cada uno de los cuales se organiza en tres secciones:

a) Principios Fundamentales: La teoría es expuesta en forma lógica, clara y concisa, tratando de destacar los conceptos básicos y las leyes generales, para permitir una rápida revisión.

b) Problemas Resueltos: Es una selección de problemas que cubren una amplia gama de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones próximas a la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos. Se incluyen las soluciones en detalle, resaltando el aspecto metodológico y didáctico.

c) Verifica tu comprensión: Son preguntas expresadas en forma de elección múltiple, a fin de que compruebes tu comprensión conceptual de los temas abordados y al mismo tiempo que desarrolles tu intuición y sentido físico. La mayoría de ellas son de naturaleza conceptual o plantean ejercicios cualitativos, cuya solución se alcanza mediante el razonamiento reflexivo sin tener que recurrir a las fórmulas. Algunas preguntas presentan situaciones aparentemente paradójicas que podrían ir en contra del sentido común, !piénsalas antes de mirar la respuesta!

La resolución de problemas de física es un proceso intelectual parecido a una pequeña investigación científica en que, no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de pasos a seguir para obtener un resultado correcto. La destreza necesaria sólo la alcanzarás trabajando con dedicación y ahínco, hasta adquirir un dominio razonable de los conceptos, principios y leyes físicas que te permita incrementar tu nivel de aprovechamiento para que logres culminar exitosamente esta asignatura. ¡Suerte, y adelante!

Douglas Figueroa, PhD
figueroa @usb.ve

CONTENIDO

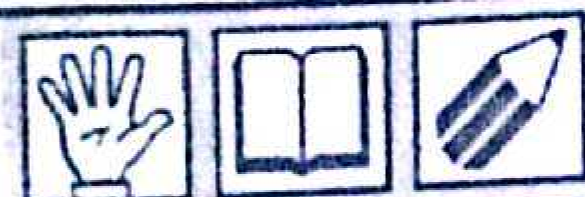
1

LA CARGA ELÉCTRICA Y LA LEY DE COULOMB

La electricidad y el magnetismo son dos aspectos diferentes de una sola interacción, la electromagnética, la cual constituye una de las interacciones fundamentales de la naturaleza. Tradicionalmente se estudia primero la electricidad y posteriormente el magnetismo, sacrificando así la unidad y coherencia del electromagnetismo. Iniciaremos aquí nuestro estudio, analizando la interacción entre cuerpos electrificados y limitándonos al caso en que uno de ellos está en reposo respecto al observador, el otro cuerpo puede estar en reposo o en movimiento. En tales casos la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro tiene una forma que denominaremos fuerza eléctrica. En la unidad 6 de esta serie nos ocuparemos de la fuerza magnética que aparece cuando ambos cuerpos están en movimiento respecto al observador. En este capítulo, se introduce el concepto de carga eléctrica, una propiedad fundamental de la materia, y se describen sus propiedades básicas. La existencia de la carga eléctrica se manifiesta en que el cuerpo cargado interacciona con otros cuerpos también cargados. Hay dos tipos de cargas eléctricas llamadas convencionalmente, positivas y negativas. Las cargas semejantes se repelen y las cargas diferentes, se atraen. Continuaremos con el análisis de la ley de Coulomb que es la ley fundamental que rige la fuerza eléctrica entre las partículas cargadas. Por último se da una breve introducción al concepto de conductores y aislantes y la manera como estos materiales pueden electrificarse

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- La carga eléctrica
- La ley de Coulomb
- La cuantización de la carga
- La conservación de la carga
- Conductores y aisladores



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

LA INTERACCIÓN ELÉCTRICA

La interacción eléctrica está en todas partes; es la responsable de la estructura de los átomos, del enlace de los mismos en las moléculas y del comportamiento mecánico de los materiales, como la elasticidad de los sólidos, la tensión superficial de los líquidos y la presión de los gases.

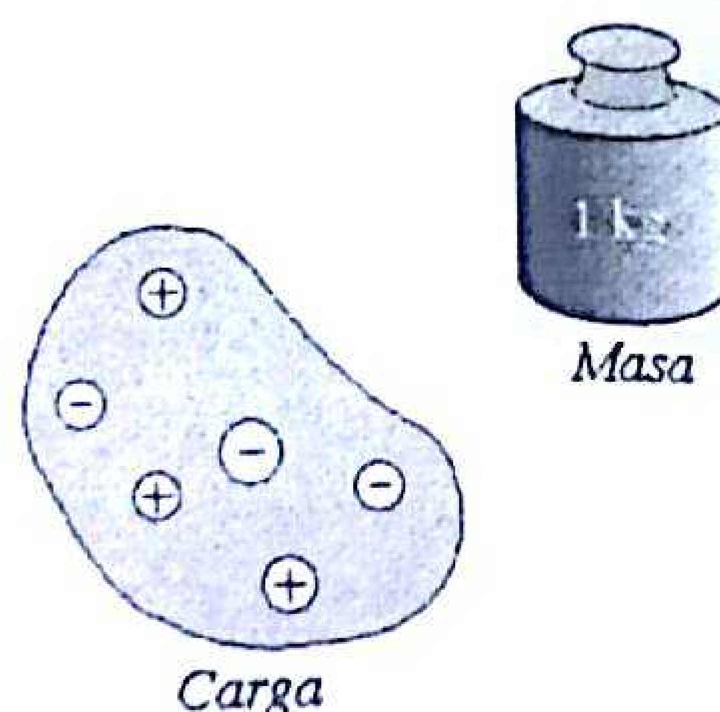
Es la que gobierna las reacciones químicas y todos los procesos biológicos: ver, sentir, moverse, pensar y vivir. De hecho, la única fuerza de origen no eléctrico que percibimos en la vida cotidiana es la fuerza de gravedad.



LA CARGA ELÉCTRICA

Así como la *masa* es aquella propiedad responsable de la interacción gravitacional entre dos cuerpos, la *carga eléctrica* es otro atributo fundamental de la materia que permite a los cuerpos tener la capacidad específica de interactuar eléctricamente.

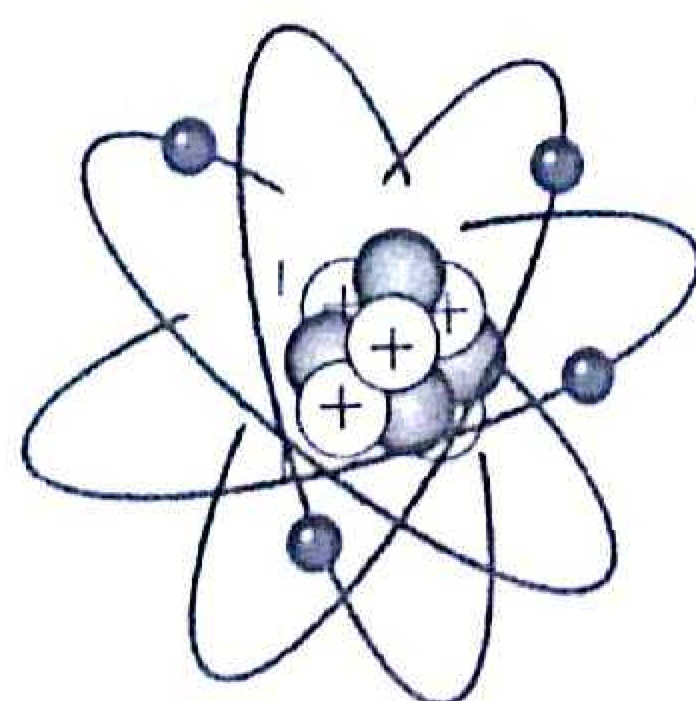
La intensidad de la interacción eléctrica de una partícula está determinada por su carga eléctrica. Existen dos tipos de carga eléctrica, las cuales se denominan arbitrariamente *positiva* y *negativa*.



EL ÁTOMO

La carga eléctrica reside en el átomo, el cual está formado por un núcleo diminuto y masivo, rodeado de uno o varios *electrones* orbitando, los cuales son mucho más ligeros.

El núcleo contiene determinado número de *protones* con carga positiva y además, partículas neutras llamadas *neutrones*. El número de electrones en el átomo es el necesario para compensar exactamente la carga nuclear. En esta situación el átomo se encuentra eléctricamente neutro ya que no posee carga eléctrica neta.



UNIDAD SI DE CARGA

En el Sistema Internacional (SI) la unidad de carga es el *coulomb* (C). Este se define en términos de la unidad de corriente eléctrica, el ampere (A), como la carga que pasa por un punto particular en un segundo cuando la corriente es de 1 ampere.

$$1\ ampere = 1\frac{coulomb}{segundo}$$

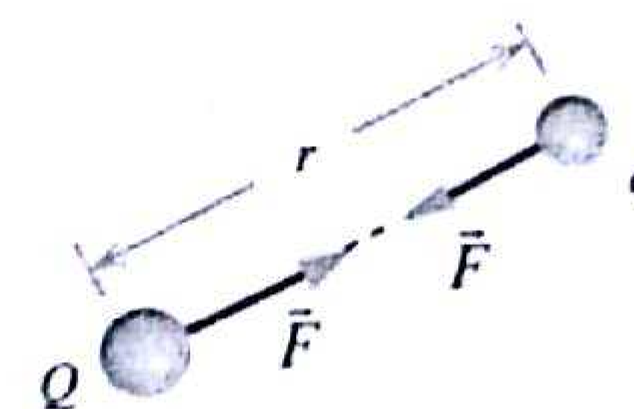
LA LEY DE COULOMB

A partir de observaciones experimentales usando una balanza de torsión, Charles Coulomb en 1785 estableció que la ley que rige la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo, tiene las propiedades siguientes:

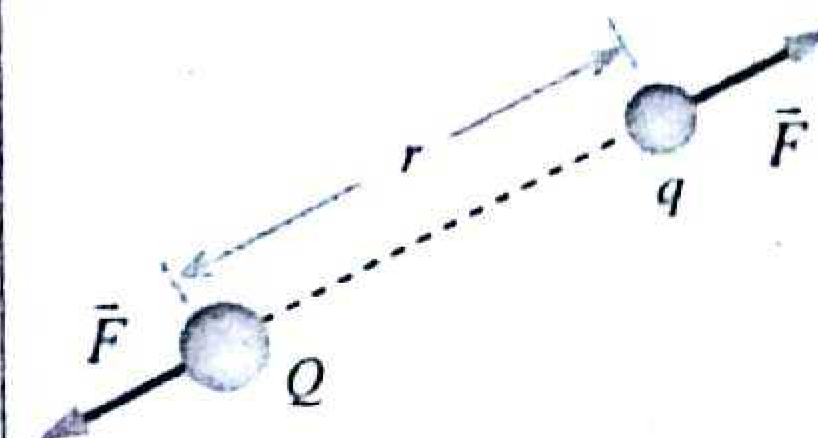
1. La fuerza es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia r, que separa las dos partículas y actúa a lo largo de la recta que las une (se trata de una fuerza central).

2. Para una separación r fija, la fuerza es proporcional al producto de las cargas q y Q de las dos partículas.

3. La fuerza es *atractiva* si las cargas tienen signos opuestos ($qQ < 0$) y *repulsiva* si las cargas son del mismo signo ($qQ > 0$).



$qQ < 0$ (Fuerza atractiva)



$qQ > 0$ (Fuerza repulsiva)

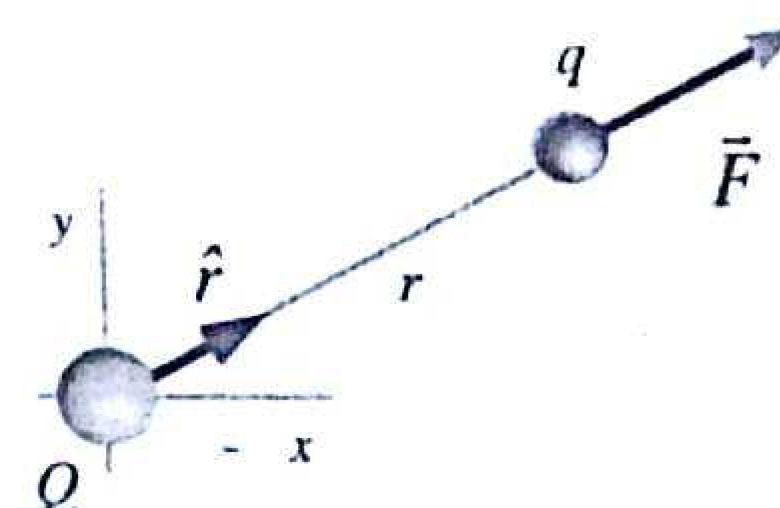
La fuerza que ejerce la partícula de carga Q sobre una partícula de carga q está dada por la expresión vectorial:

$$\bar{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ es un vector unitario con origen en la fuente de la fuerza Q y en dirección del vector posición de q. Observe que esta expresión incluye el hecho de que:

1. Si las cargas son del mismo signo ($qQ > 0$), las partículas *se repelen* y $\bar{F}$ apunta en el mismo sentido del vector $\hat{r}$.

2. Si las cargas son de signo opuesto ($qQ < 0$), las partículas *se atraen* y $\bar{F}$ apunta en sentido opuesto al del vector $\hat{r}$.



$$\bar{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

Ley de Coulomb

La *constante de proporcionalidad*, k, depende del medio en el cual están las cargas. Cuando las cargas están en el vacío, k tiene el valor aproximado en el sistema SI de $9{,}0\times10^9\ N.m^2/C^2$.

$$k = 9{,}0 \times 10^9\ N{\cdot}m^2/C^2$$

La constante k también se escribe en términos de otra constante ε_o, llamada la *permitividad* del espacio libre. Se verá más adelante que esta forma de escribir la constante k permite expresar en forma mas simple las ecuaciones del electromagnetismo.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N{\cdot}m^2$

Permitividad del espacio libre

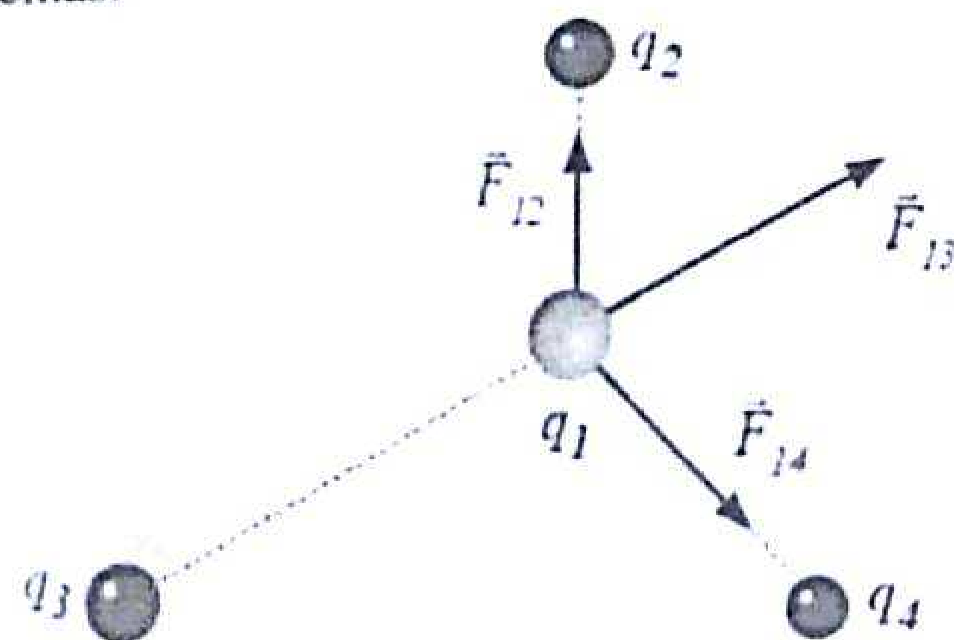
La expresión anterior de la ley de Coulomb se aplica solo a cargas en el vacío. Si las cargas están en un medio material, este se polariza y la fuerza de interacción sufre una reducción. El factor de reducción es lo que denominaremos en el Capítulo 5, la *constante dieléctrica* del medio.

Constante dieléctrica

$$\kappa = \frac{F(vacío)}{F(medio)} > 1$$

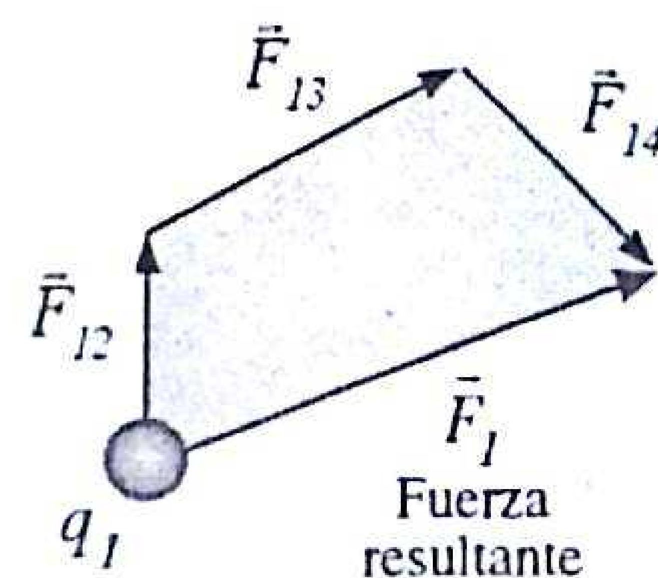
FUERZA DEBIDA A CARGAS MÚLTIPLES

Las cargas interactúan independientemente en pares y de acuerdo al *principio de superposición* la fuerza resultante sobre cualquier carga (q_1) es la *suma vectorial* de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por todas las demás.



Superposición de Fuerzas

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$



LA CARGA ESTÁ CUANTIZADA

Cualquier objeto que esté eléctricamente cargado tiene algún exceso o déficit de cierto número de electrones. La carga del electrón es una cantidad fundamental indivisible:

$$|e| = 1.603 \times 10^{-19}\ C$$

Por lo tanto, toda cantidad de carga puede escribirse como un múltiplo entero positivo o negativo de e.

Cuantización de la carga

$$Q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \ldots, \pm Ne$$

Hasta tiempos recientes se pensó que los neutrones y protones eran partículas elementales. Ahora se sabe que en realidad son una mezcla de entidades llamadas *quarks*, las cuales tienen cargas fraccionales $\pm e/3$ y $\pm 2e/3$. Los quarks poseen la notable propiedad de estar

Un neutrón (carga cero)

= 1 quark u ($+2e/3$)
+ 2 quarks d ($-e/3$)

permanentemente confinados dentro de las partículas, ligados entre sí por fuerzas mucho más poderosas que las electromagnéticas y aparentemente no son susceptibles de ser detectados como entidades separadas.

Un protón (carga +e)

= 2 quarks u ($+2e/3$)
+1 quark d ($-e/3$)

LA CARGA SE CONSERVA

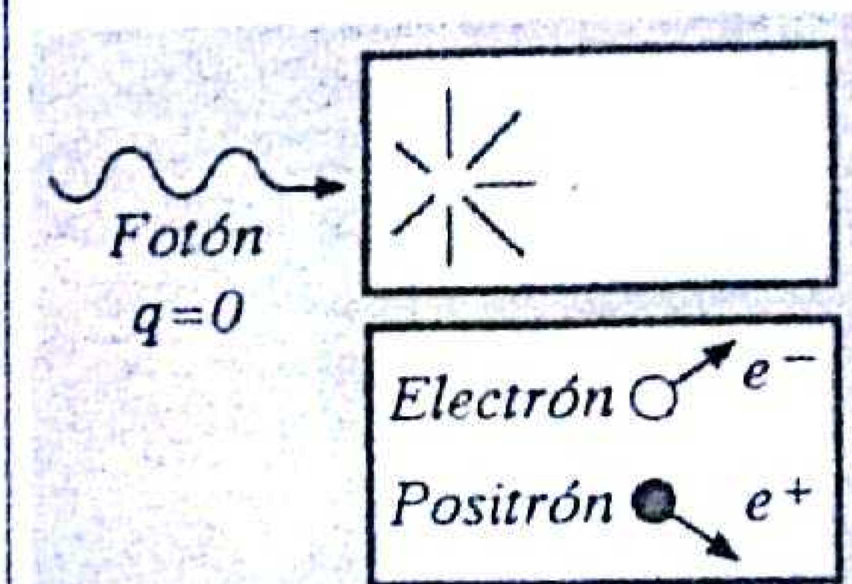
En un sistema aislado, la suma algebraica de las cargas positivas y negativas (la carga neta), es constante, cualesquiera sean las interacciones que ocurran dentro del sistema.

Ley de conservación de la carga

Pueden ocurrir algunos procesos en los cuales se producen o destruyen iguales cantidades de carga positiva y de carga negativa, sin que la carga neta varíe.

Por ejemplo, un rayo γ (carga nula) que pasa cerca de un núcleo atómico puede dar origen a dos partículas de cargas iguales y opuestas (*creación de pares*): un electrón (carga $-e$) y un positrón (carga $+e$). La carga total del sistema sigue siendo nula.

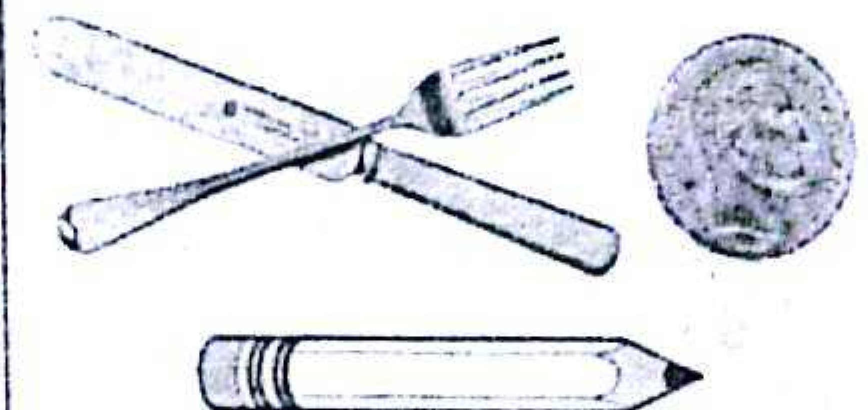
También puede ocurrir el proceso inverso de *aniquilación de pares*, mediante el cual un electrón y un positrón pueden aniquilarse para dar origen a rayos γ.



Creación de pares

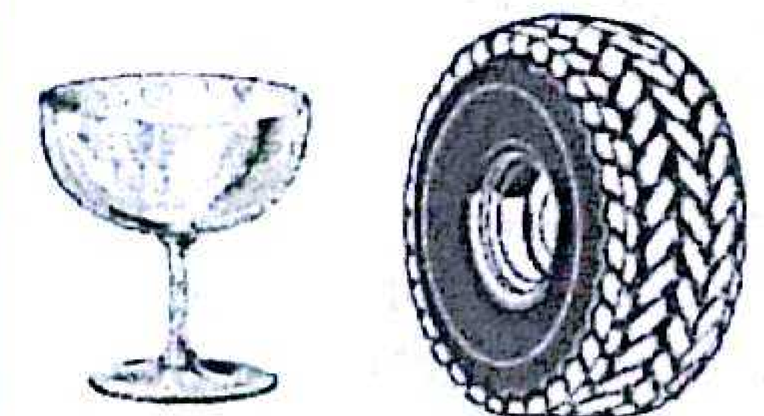
CONDUCTORES Y AISLADORES

Los *conductores* son materiales en los cuales las cargas pueden moverse con relativa facilidad. Ejemplos: los metales, el agua impura, el cuerpo humano. En un metal los átomos contienen uno o más electrones exteriores que están débilmente ligados al núcleo y pueden moverse con libertad, de manera semejante a como lo hacen las moléculas en un gas. Esta movilidad de los electrones también es responsable de la alta conductividad térmica de los metales.



Los metales y el carbón son buenos conductores

En los *aisladores*, también llamados *dieléctricos*, los electrones están firmemente unidos a sus respectivos átomos y no permiten el transporte de carga con facilidad. Algunos ejemplos son el vidrio, el caucho, la madera, la porcelana y el agua químicamente pura.



El vidrio y el caucho son buenos aisladores

Los *semiconductores* como el germanio y el silicio, son intermedios entre los conductores y los aisladores en cuanto a la habilidad para conducir la corriente eléctrica.

Estos materiales son los que se emplean en la fabricación de diversos dispositivos electrónicos, como diodos rectificadores, transistores, leds, chips de computadora, etc.



Semiconductores

Finalmente, los *superconductores* son materiales que, en un cierto dominio de temperaturas, no ofrecen resistencia alguna al movimiento de cargas a través de ellos. Los alambres hechos de materiales superconductores son los que se usan en la construcción de los electroimanes de los aparatos de resonancia magnética nuclear (RMN) que permiten obtener imágenes para diagnóstico en medicina.

ELECTRIZACIÓN POR FROTACIÓN

Un cuerpo neutro (no electrizado) puede recibir una carga neta mediante frotación con otro objeto. En el proceso de frotamiento ocurre una transferencia de *electrones* de una cuerpo hacia el otro (Fig. a). El cuerpo que pierde electrones presenta un exceso de protones y queda electrizado positivamente. El otro tiene un exceso de electrones y queda electrizado negativamente (Fig. b).

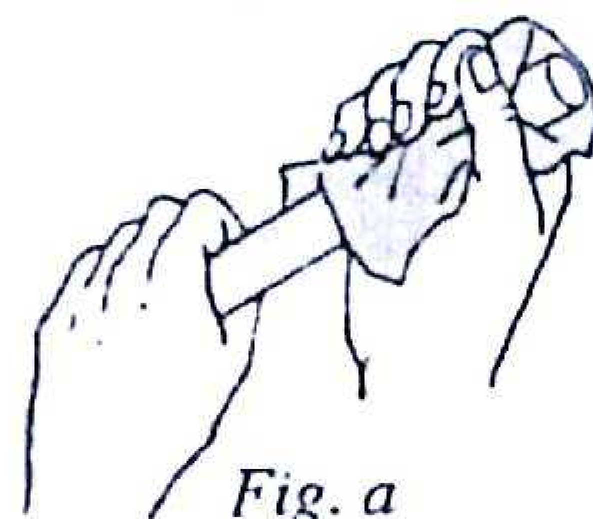


Fig. a

Por experiencia sabemos que un peine se electriza cuando se le frota contra el cabello. Los automóviles en movimiento adquieren electrización por rozamiento con el aire. La ropa de nylon se electriza al friccionarse con nuestro cuerpo. El proceso de transferencia y el tipo de carga depende de la naturaleza de los materiales.

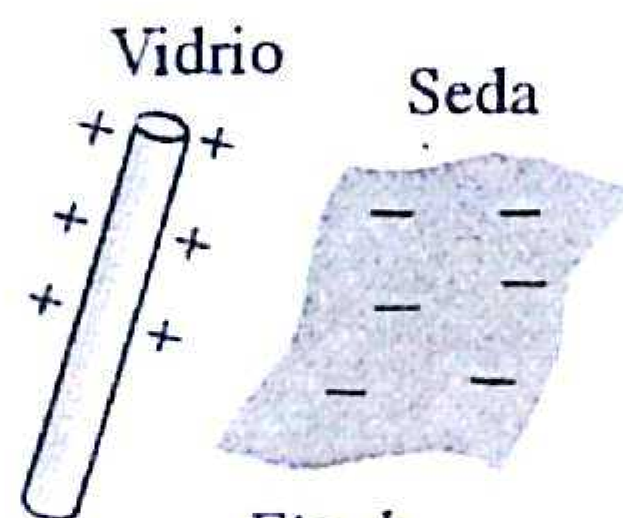


Fig. b

ELECTRIZACIÓN POR INDUCCIÓN

La inducción es un método práctico para cargar un conductor donde se aprovecha la libertad de movimiento que tienen los electrones en un metal. Sean dos esferas metálicas neutras en contacto y colocadas sobre bases aislantes. Cuando una varilla de vidrio que está cargada positivamente es colocada muy cerca de la esfera de la izquierda, los electrones libres son atraídos hacia ese lado, y esta esfera tiende a sustraer electrones de la esfera de la derecha. Si ahora separamos las esferas antes de retirar la varilla, quedarán con cargas iguales y opuestas. Después de retirar la varilla, tendremos dos esferas con cargas opuestas distribuidas uniformemente sobre sus superficies. Note que en este proceso no se creó carga alguna, solo ha sido separada. La carga total de las dos esferas sigue siendo cero.

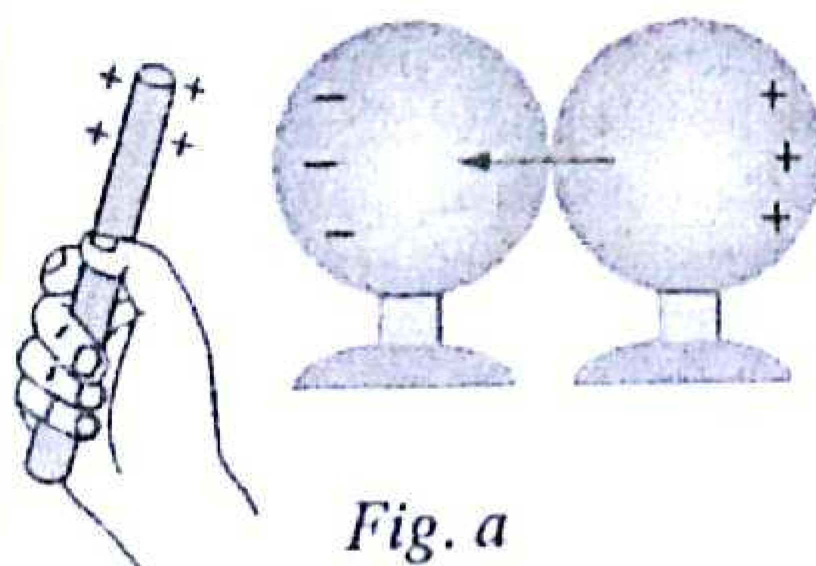


Fig. a

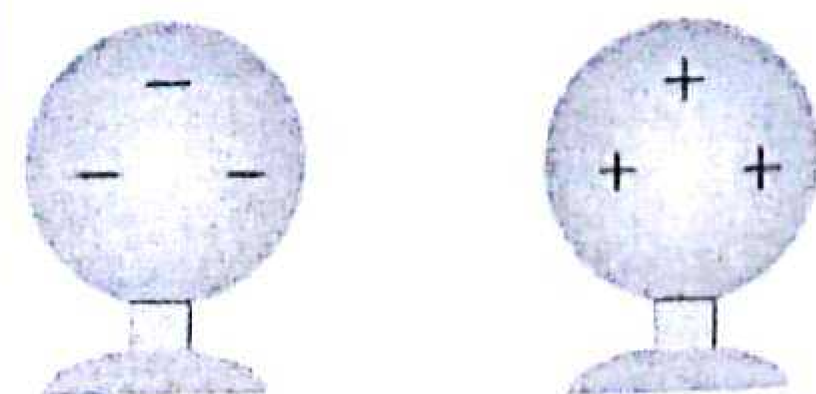
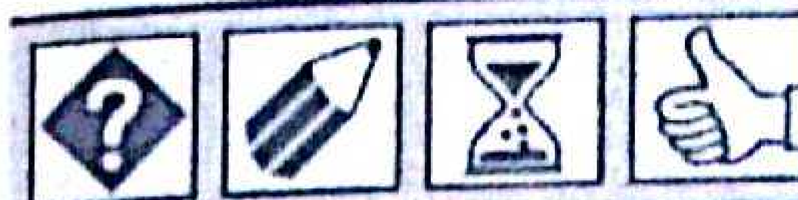


Fig. b



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-1.01. ***¿Cuántos coulombs hay en un vaso de agua?***

Suponga una situación hipotética en que se pudiesen separar todos los electrones de los núcleos de hidrógeno y de oxígeno que contiene un vaso lleno de agua de 250 cc.
a) ¿Cuál es la carga total de los electrones?
b) Si se pudiesen colocar todos los electrones en una pequeña esfera y todos los protones en otra pequeña esfera, a 2 m de distancia, cuál sería la fuerza de atracción entre las dos esferas?

Solución: a) El agua tiene una masa molecular de 18 g/mol, por lo tanto en 250 g de agua habrá: (250 g / 18 g/mol) = 13,9 moles. Tomando en cuenta que un mol de cualquier sustancia contiene un número de moléculas igual al número de Avogadro, $N_A = 6{,}02\text{x}10^{23}$, el número de moléculas de agua en el vaso será:

$$13{,}9\text{moles}(6{,}02\text{x}10^{23}\,\frac{\text{moleculas}}{\text{mol}}) = 8{,}36\text{x}10^{24}\ \text{moléculas}$$

A su vez cada molécula H_2O contiene (2 + 8 = 10) electrones. Por lo tanto, el número total de electrones es:

$$N_e = 10\text{x}\ 8{,}36\text{x}10^{24} = 8{,}36\text{x}10^{25}$$

y la carga total de todos los electrones es:

$$Q_e = eN_e = (-1{,}6\text{x}10^{-19}\,\text{C})(8{,}36\text{x}10^{25}) = -1{,}34\ \text{x}\ 10^{7}\ \text{C}.$$

De manera similar, como los átomos son eléctricamente neutros, el número de protones es igual al de electrones y la carga total de todos los protones es:

$$Q_p = eN_p = (+1{,}6\text{x}10^{-19}\,\text{C})(8{,}36\text{x}10^{25}) = +1{,}34\ \text{x}\ 10^{7}\ \text{C}.$$

b) Por la ley de Coulomb, el módulo de la fuerza de atracción entre las esferas constituidas por protones y electrones es:

$$F = k\frac{Q_eQ_p}{d^2} = (9\text{x}10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2})\frac{(1{,}34\text{x}10^7\text{C})^2}{(2\text{m})^2} = 4{,}04\text{x}10^{23}\text{N}$$

Electrones (-)
$-\vec{F}$
$\vec{F}$
Protones (+)

Respuesta:

$Q_e = -1{,}34\ \text{x}\ 10^{7}\ \text{C}$
$F = 4{,}04\ \text{x}\ 10^{23}\ \text{N}$

PR-1.02. *Tres cargas, tres experimentos.*

Experimentando con tres cargas puntuales desconocidas Q_1, Q_2 y Q_3, se obtienen los siguientes resultados:

i) Cuando Q_1 y Q_2 están a distancia $d = 60$, cm se atraen con una fuerza $F_{12} = 15$ N.

ii) Cuando Q_1 y Q_3 están a distancia $d = 60$ cm, se repelen con una fuerza $F_{13} = 5$ N.

iii) Cuando Q_2 y Q_3 están a distancia $d = 60$ cm, se atraen con una fuerza $F_{23} = 7{,}5$ N.

¿Cuáles son la magnitud y signo de cada carga?

Solución: Aplicando a cada par de cargas la ley de Coulomb: $F_{AB} = kQ_AQ_B/d^2$, y sustituyendo los valores numéricos correspondientes en experimento, se obtiene:

$$Q_1Q_2 = \frac{F_{12}d^2}{k} = \frac{(15\text{N})(0{,}6\text{m})^2}{9\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 6\text{x}10^{-10}\text{C}^2 \qquad (1)$$

$$Q_1Q_3 = \frac{F_{13}d^2}{k} = \frac{(5\text{N})(0{,}6\text{m})^2}{9\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 2\text{x}10^{-10}\text{C}^2 \qquad (2)$$

$$Q_2Q_3 = \frac{F_{23}d^2}{k} = \frac{(7{,}5\text{N})(0{,}6\text{m})^2}{9\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 3\text{x}10^{-10}\text{C}^2 \qquad (3)$$

Dividiendo la ecuación (1) entre la (2) se obtiene: $Q_2 = 3Q_3$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3) se obtienen los valores de las cargas:

$$Q_2Q_3 = (3Q_3)Q_3 = 3Q_3^2 = 3\text{x}10^{-10}\text{C}^2 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = \pm 10^{-5}\text{C}$$

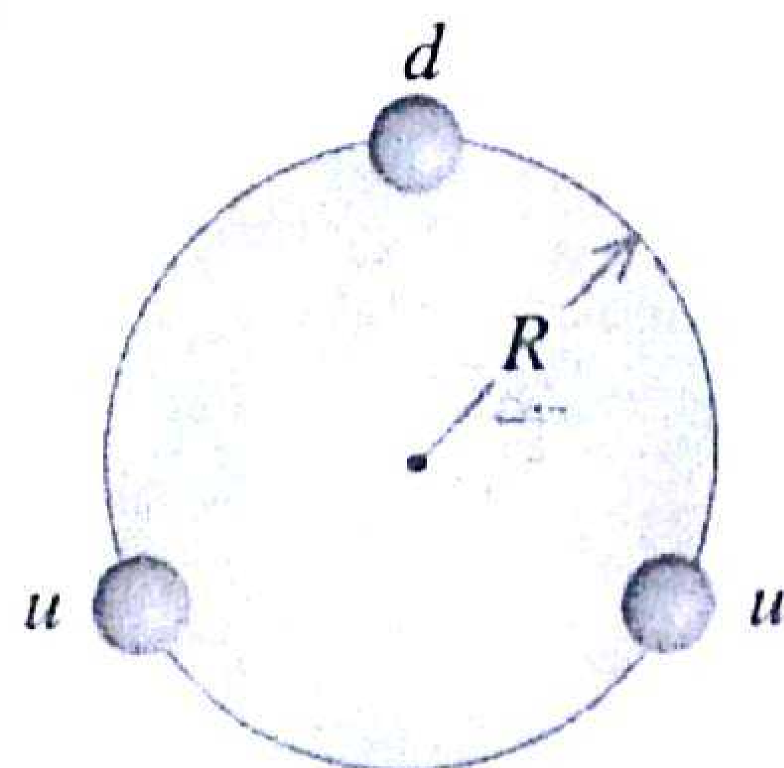
$$Q_2 = 3Q_3 = 3\text{x}10^{-5}\text{C}, \quad Q_1 = 2\text{x}10^{-10}\text{C}^2/Q_3 = 2\text{x}10^{-5}\text{C}$$

Respuesta:

$Q_1 = +2\text{x}10^{-5}\text{C}$
$Q_2 = -3\text{x}10^{-5}\text{C}$
$Q_3 = +1\text{x}10^{-5}\text{C}$
$Q_1 = -2\text{x}10^{-5}\text{C}$
$Q_2 = +3\text{x}10^{-5}\text{C}$
$Q_3 = -1\text{x}10^{-5}\text{C}$

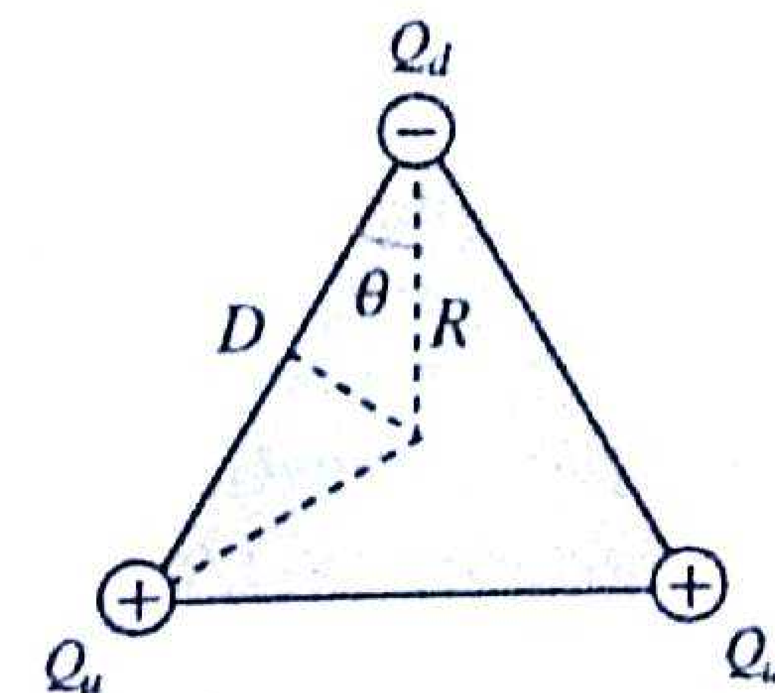
PR-1.03. *Un protón = Tres quarks*

En el modelo de quarks de las partículas elementales, un protón consiste de dos quarks u "up", cada uno con carga $Q_u = +2e/3$, y un quark d "down" con carga $Q_d = -e/3$. Suponga que estas partículas estuviesen igualmente separadas en una circunferencia de radio $R = 1{,}2\text{x}10^{-15}$ m. ¿Cuál sería el valor de la fuerza electrostática neta ejercida sobre cada quark?



Solución: Los quarks quedan en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio R. Según la Figura a, la distancia entre quarks es:

$$D = 2R\cos 30° = 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}R$$



(Fig. a)

El módulo de la fuerza entre los dos quarks u es:

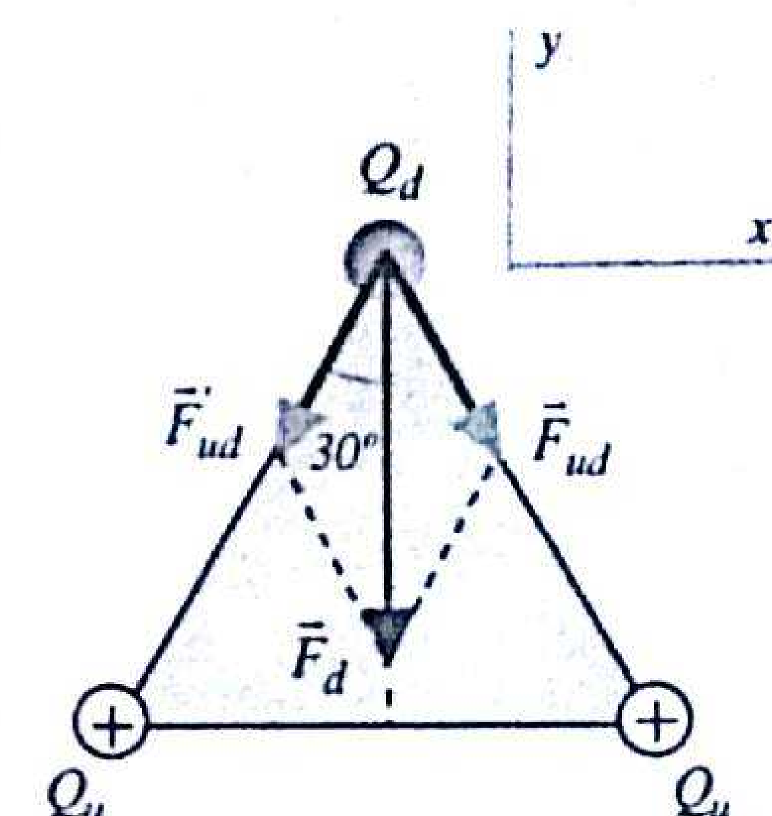
$$F_{uu} = k\frac{Q_uQ_u}{D^2} = k\frac{(2e/3)(2e/3)}{(\sqrt{3}R)^2} = \frac{4}{27}\left(\frac{ke^2}{R^2}\right)$$

$$F_{uu} = \frac{4}{27}\frac{(9{,}0\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})^2}{(1{,}2\text{x}10^{-15}\text{m})^2} = 23{,}7\text{N}$$

El módulo de la fuerza entre los quarks u y d es:

$$F_{ud} = k\frac{Q_uQ_d}{D^2} = k\frac{(e/3)(2e/3)}{(\sqrt{3}R)^2} = \frac{2}{27}\left(\frac{ke^2}{R^2}\right)$$

$$F_{ud} = \frac{2}{27}\frac{(9{,}0\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})^2}{(1{,}2\text{x}10^{-15}\text{m})^2} = 11{,}9\text{N}$$



(Fig. b)

La fuerza resultante sobre el quark d es la suma vectorial de las fuerzas atractivas de cada uno de los quarks u. Por simetría, las componentes x se cancelan (Fig. b) y la componente y resultante apunta hacia abajo y tiene un módulo:

$$F_d = 2F_{ud}\cos 30° = 2F_{ud}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}F_{ud} = 20{,}5\text{N}$$

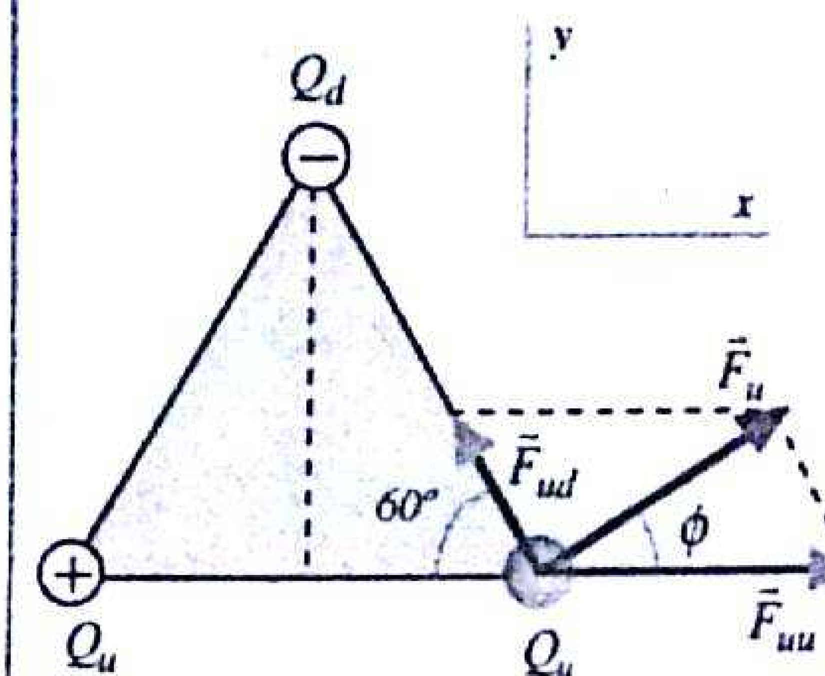
La fuerza resultante sobre cada quark u es la suma vectorial de la fuerza repulsiva del otro quark u y la fuerza atractiva del quark d (Fig. c).

La componente de $\vec{F}_u$ en la dirección x es:

$$F_{ux} = F_{uu} - F_{ud}\cos 60°$$

$$F_{ux} = 23{,}7\text{N} - 11{,}9\text{N}\cos 60° = 17{,}8\text{N}$$

La componente de $\vec{F}_u$ en la dirección y es:



(Fig. c)

$$F_{uy} = F_{ud} sen60^o = 11,9N sen60^o = 10,3N$$

Por lo tanto el módulo de la fuerza sobre el quark u es:

$$F_u = \sqrt{F_{ux}^2 + F_{uy}^2} = \sqrt{(17,8N)^2 + (10,3N)^2} = 20,5N$$

y el ángulo que forma con el eje x es:

$$tg\phi = \frac{F_{uy}}{F_{ux}} = \frac{10,3N}{17,8N} \quad \Rightarrow \quad \phi = 30^o$$

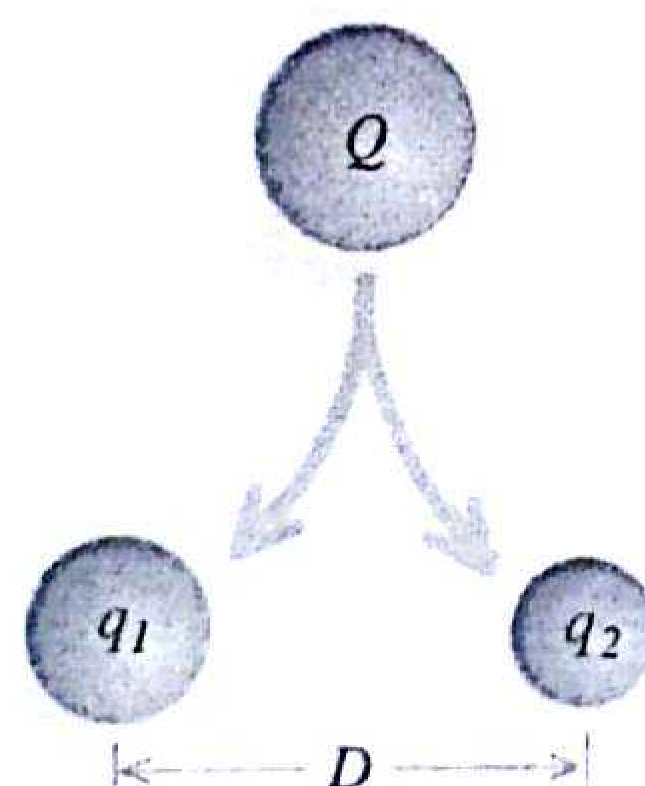
Respuesta:

F_d = 20,5 N. El vector $\vec{F}_d$ apunta hacia el centro del círculo. F_u = 20,5 N. La dirección de $\vec{F}_u$ forma un ángulo ϕ = 30° con la línea que une los dos quarks u.

PR-1.04 *Se fragmenta la carga para máxima repulsión*

Un objeto con carga positiva, Q, ha de ser distribuido en dos pedazos con cargas positivas q y $(Q - q)$, de forma tal que, para una separación dada, D, la fuerza ejercida por una carga sobre la otra tenga el máximo valor posible. Si la distancia D es grande respecto del tamaño del objeto, ¿cuál debe ser el valor de la carga de esos dos pedazos?

Solución: El módulo de la fuerza de repulsión entre los dos pedazos de carga $q_1 = q$ y $q_2 = Q - q$ separadas por una distancia D es:



$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = k\frac{q(Q-q)}{D^2}$$

Cuando la fuerza tiene un valor extremo (máximo o mínimo) se debe cumplir: $dF/dq = 0$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{k}{D^2}(Q - 2q) = 0$$

Por lo tanto:

$$Q - 2q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = Q/2$$

$$q_1 = q = Q/2 \qquad q_2 = Q - q = Q/2$$

Este valor obtenido para la carga, $q = Q/2$, debe corresponder a un valor máximo de la fuerza F ya que la fuerza mínima ($F = 0$) corresponde a $q = 0$.

Respuesta:

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$$

PR-1.05. *¿Cuánto vale y dónde estará la tercera carga?*

Tres cargas puntuales, dos de las cuales son $+Q$ y $+2Q$, están separadas por una distancia d, y se encuentran en equilibrio. ¿Cuál es el valor, la polaridad y la ubicación de la tercera carga?

Solución: Entre las dos cargas positivas conocidas, $+Q$ y $+2Q$, se ejerce una fuerza *repulsiva*:

$$F_1 = k\frac{Q2Q}{d^2} = 2k\frac{Q^2}{d^2}$$

Por lo tanto, la tercera carga será negativa, $-q$, y debe estar ubicada en la línea que las une y a una distancia $x = \alpha d$ de $+Q$ y a una distancia $(1-\alpha)d$ de $+2Q$. La fuerza *atractiva* sobre la carga $+Q$ ejercida por $-q$ es:

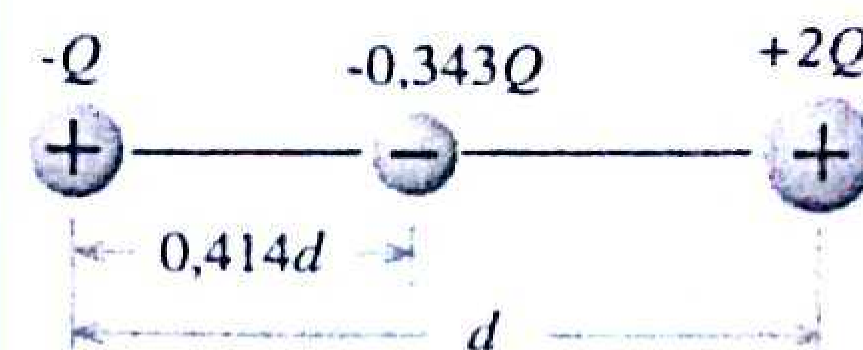
$$F_2 = k\frac{Qq}{(\alpha d)^2}$$

Las dos fuerzas sobre $+Q$ tienen sentidos opuestos y la condición para que esté en equilibrio es que sean de igual magnitud:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{Qq}{(\alpha d)^2} = 2k\frac{Q^2}{d^2}$$

Simplificando:

$$\alpha^2 = \frac{q}{2Q} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{q}{2Q}} \qquad (1)$$



Similarmente, la carga $+2Q$ también debe estar en equilibrio:

$$k\frac{Q(2Q)}{d^2} = k\frac{q(2Q)}{[(1-\alpha)d]^2}$$

$$(1-\alpha)^2 = \frac{q}{Q} \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha = \sqrt{\frac{q}{Q}} \qquad (2)$$

Combinando las relaciones (1) y (2) se obtiene:

$$1 = \sqrt{\frac{q}{2Q}} + \sqrt{\frac{q}{Q}} = \sqrt{\frac{q}{Q}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2Q}{(1+\sqrt{2})^2}$$

y además:

$$\alpha = \sqrt{\frac{q}{2Q}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 0{,}414$$

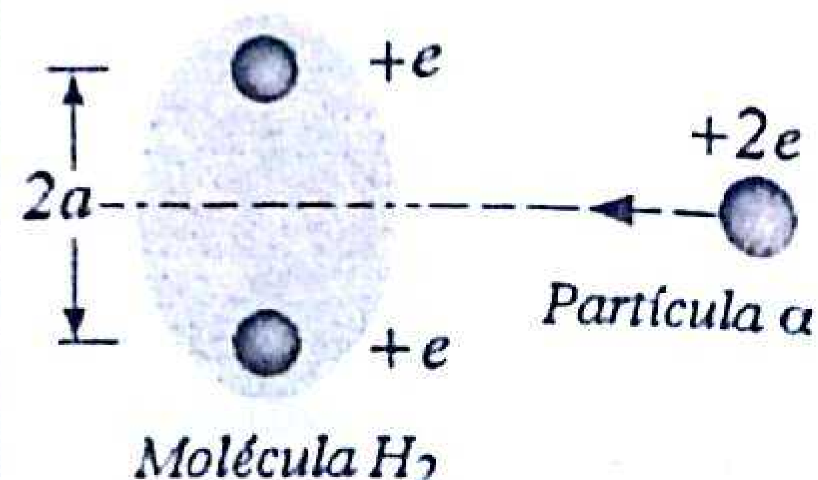
En conclusión, la tercera carga tiene un valor $q = -0{,}343Q$ y está a una distancia $x = 0{,}414d$ de la carga $+Q$.

Respuesta:

$$q = -\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}Q = -0{,}343Q$$
$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}d = 0{,}414d$$

PR-1.06. *Bombardeo de molécula por partículas α*

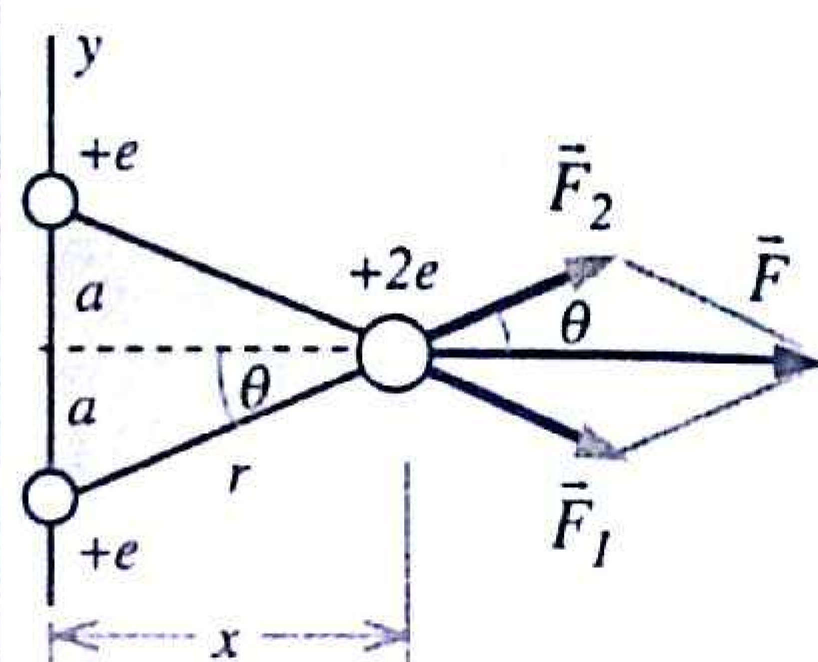
Una partícula α es un núcleo de helio compuesto por dos neutrones y dos protones con carga $+2e$, y es lanzada a lo largo de una línea perpendicular al eje internuclear de una molécula de hidrógeno que está fija. En la molécula de hidrógeno, los dos núcleos atómicos (carga $+e$ cada uno) están separados por una distancia $2a$. ¿A qué distancia x, de la molécula será máxima la fuerza electrostática de los núcleos atómico sobre la partícula α?



Solución: La fuerza total $\bar{F}$ ejercida sobre la partícula α será:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

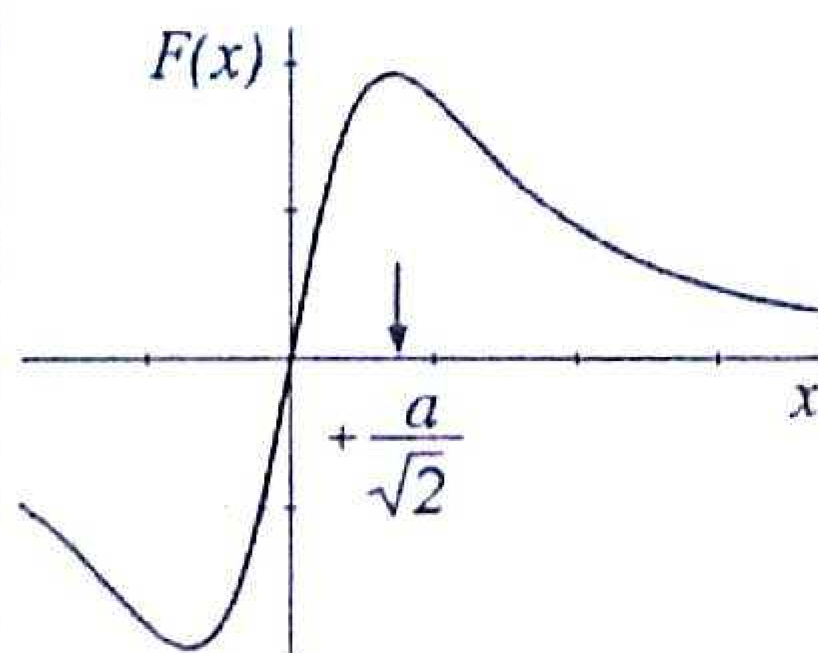
Por simetría, las componentes de las fuerzas $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$ en el eje y se cancelan y la fuerza resultante apunta en la dirección del eje x. Es decir, $\bar{F} = 2|\bar{F}_1|\cos\theta\hat{x}$:



$$\bar{F} = 2[k\frac{(2e)e}{r^2}]\frac{x}{r}\hat{x} = 4ke^2[\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}]\hat{x}$$

El máximo de $|\bar{F}|$ se determina a partir de la condición: $dF/dx = 0$,

$$\frac{dF}{dx} = 4ke^2[\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - (3/2)x(x^2+a^2)^{1/2}(2x)}{(x^2+a^2)^3}] = 0$$



Obteniéndose:

$$(x^2+a^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+a^2)^{1/2} = 0$$

Simplificando y despejando, obtenemos la distancia a la cual la fuerza es máxima:

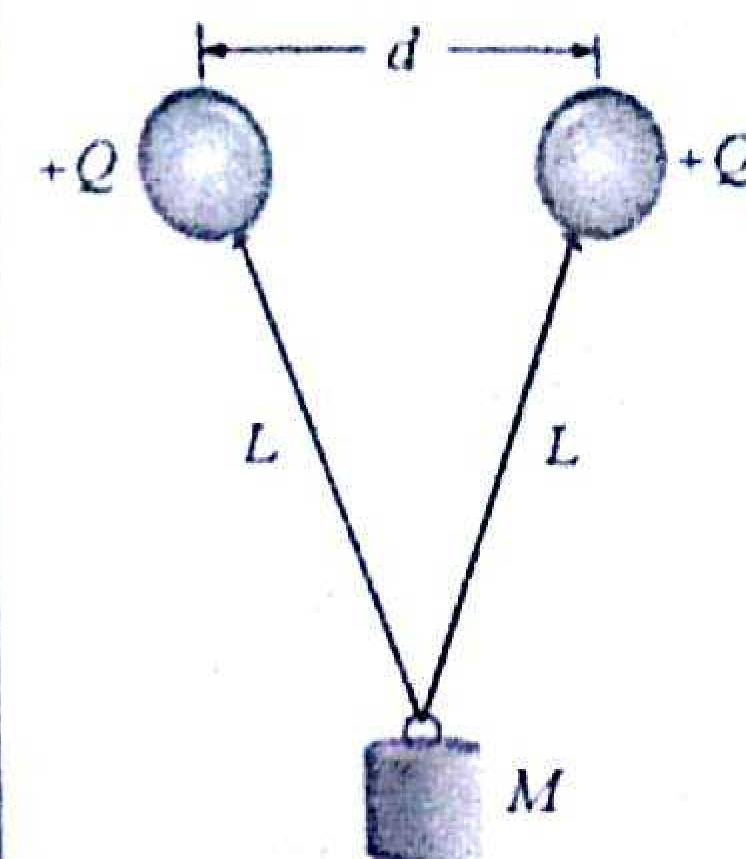
$$x^2 + a^2 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Respuesta:

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

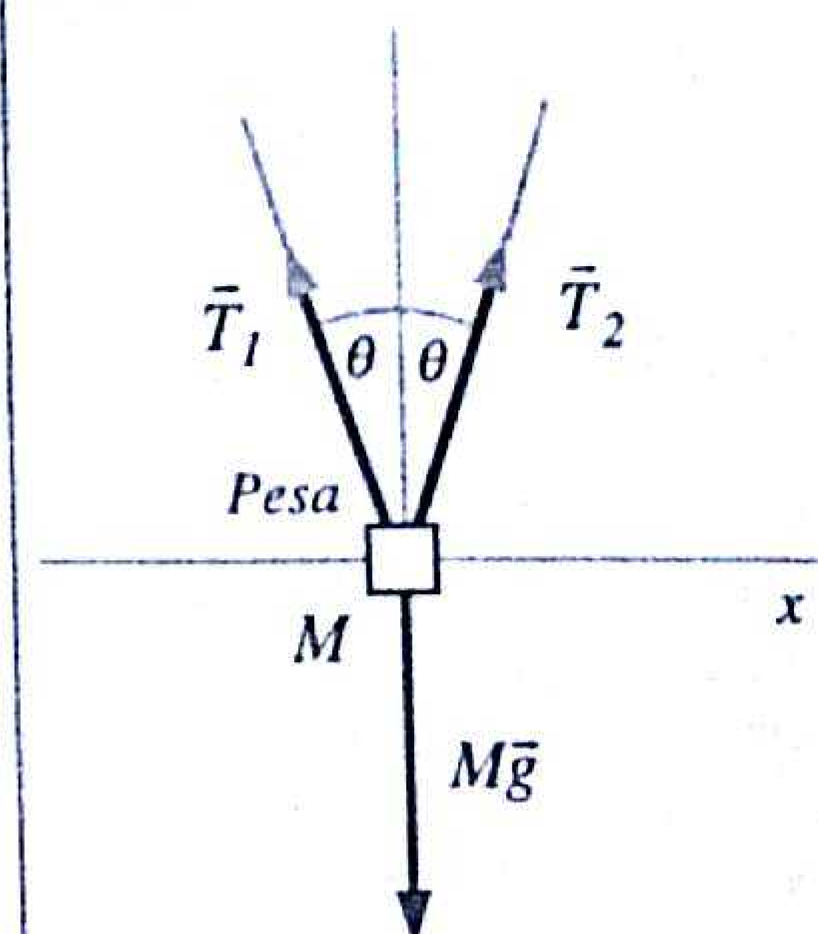
PR-1.07. *Levantando un objeto con globos cargados*

Dos globos llenos de gas Helio se frotan con un trapo y se ponen a flotar en el aire, sosteniendo una pesa de masa M = 0,68 kg. mediante cuerdas aislantes de longitud L = 5,0 m. Suponga que cuando los globos tiene la misma carga Q, el sistema flota en equilibrio en la posición indicada, quedando separados por una distancia d = 6,0 m. Determine el valor de la carga Q. Suponga que los globos son pequeños en comparación con su separación.



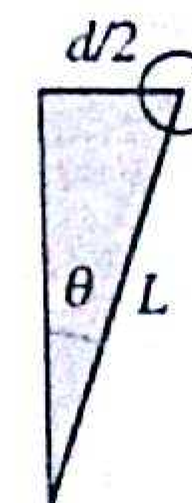
Solución: Consideremos primero el diagrama de cuerpo libre de la pesa de masa M que está suspendida (fig. a). Para hallar el módulo de la tensión de la cuerda, $T_1 = T_2 = T$, escribimos la ecuación de equilibrio en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 2T\cos\theta - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Mg}{2\cos\theta} \quad \text{(i)}$$



El ángulo θ se obtiene a partir del triángulo rectángulo mostrado,(sus lados guardan la relación, 3 : 4 : 5).

$$sen\theta = \frac{d}{2L} = \frac{6{,}0m}{2x5{,}0m} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36.9°$$



Por otra parte, considerando el diagrama de cuerpo libre del globo, las fuerzas que intervienen son: la tensión $\bar{T}_2$, la fuerza de empuje hacia arriba, $\bar{E}$, su peso del globo, $m\bar{g}$ y la fuerza de repulsión eléctrica, $\bar{F}_e$.

La ecuación de equilibrio del globo en la dirección horizontal es:

$$\sum F_x = F_e - Tsen\theta = 0$$

$$F_e = Tsen\theta \quad \text{(ii)}$$

Sustituyendo T de la ecuación (i) en la ecuación (ii), tenemos:

$$F_e = \frac{Mgsen\theta}{2\cos\theta} = \frac{Mgtg\theta}{2}$$

Usando la expresión de ley de Coulomb para F_e:

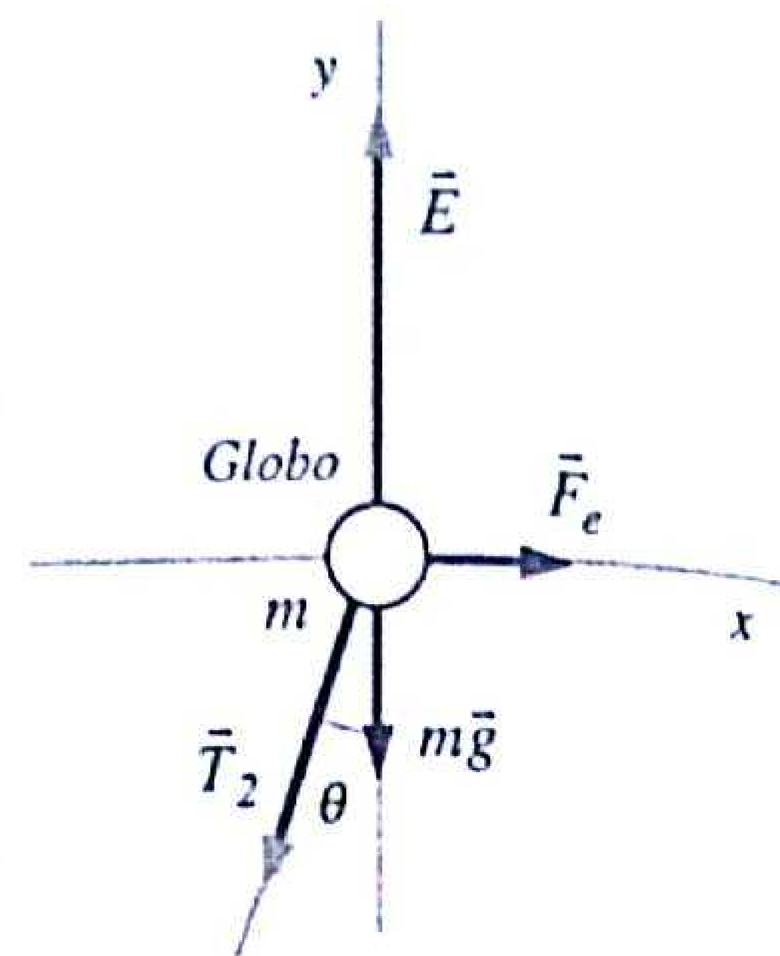
$$k\frac{Q^2}{d^2}=\frac{Mgtg\theta}{2}$$

Despejando Q:

$$Q=\sqrt{\frac{Mgd^2tg\theta}{2k}}$$

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos, el valor de la carga Q de los globos:

$$Q=\sqrt{\frac{(0{,}68\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(6{,}0\text{m})^2(0{,}75)}{2(9\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)}}=10^{-5}\text{C}$$



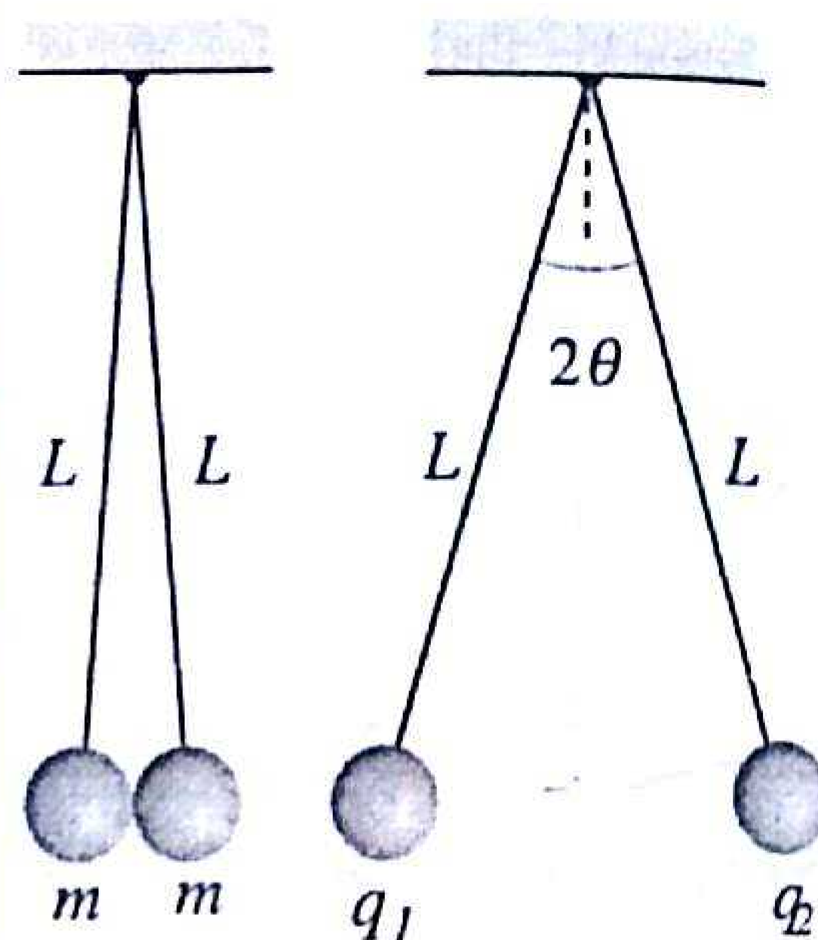
Respuesta:

$Q = 10^{-5}$ C

PR-1.08. *Repulsión de dos esferitas suspendidas.*

Dos bolitas de igual masa m = 0,8 g, se suspenden de un punto común mediante hilos aislantes de igual longitud, L = 0,40 m. Cuando se les comunica ciertas cantidades carga q_1 y q_2, debido a la repulsión electrostática, las bolitas alcanzan una posición de equilibrio quedando los hilos a un ángulo: $2\theta = 20°$

a) Si las cargas son iguales, $q_1 = q_2$, determine su valor
b) ¿Se podría determinar el signo de las cargas?
c) ¿Habrán otros valores de cargas que produzcan esta misma separación angular?



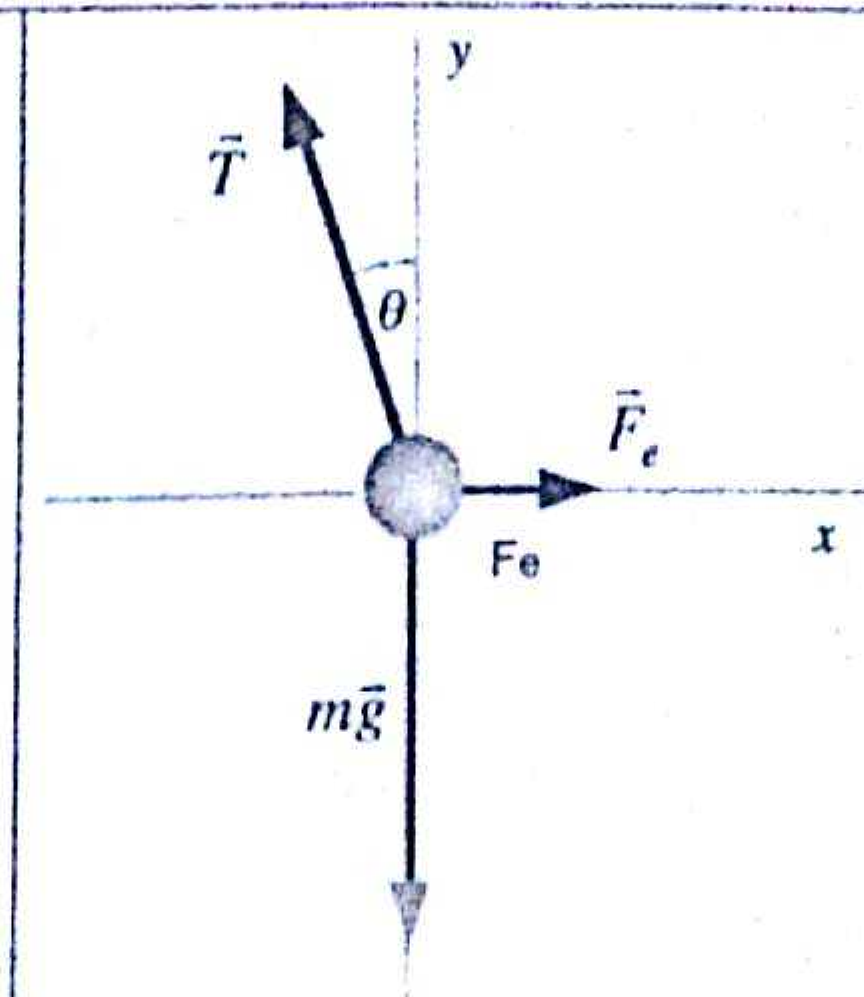
Solución: a) Las fuerzas que actúan sobre cada bolita son: el peso $m\vec{g}$, la fuerza de repulsión eléctrica, $\vec{F}_e$ y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$. Como las bolitas están en equilibrio, la fuerza neta en cada dirección es cero:

$$\sum F_x = F_e - Tsen\theta = 0$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, se elimina la tensión:

$$\frac{Tsen\theta}{T\cos\theta}=tg\theta=\frac{F_e}{mg}$$



Si x es la separación entre las bolitas, de acuerdo a la ley de Coulomb, se tiene:

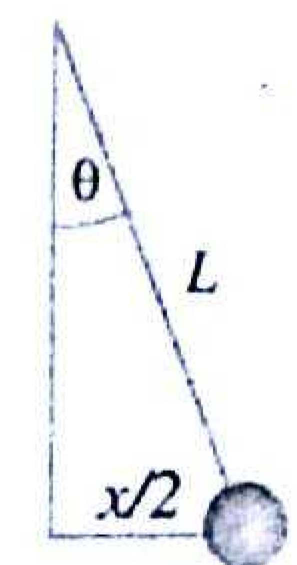
$$F_e = k\frac{q_1q_2}{x^2}=k\frac{q_1q_2}{(2Lsen\theta)^2}$$

Sustituyendo F_e en la expresión anterior, encontramos:

$$tg\theta=\frac{k}{mg}\frac{q_1q_2}{(2Lsen\theta)^2}$$

$$q_1q_2=\frac{4L^2mgsen^2\theta tg\theta}{k}$$

Como las cargas son iguales:



$$q_1=q_2=q=\pm 2Lsen\theta\sqrt{\frac{mg}{k}tg\theta}$$

$$q=\pm 2(0{,}4\text{m})\text{sen}10°\sqrt{\frac{(8\text{x}10^{-4}\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{9\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}}\text{tg}10°}$$

$$q=\pm 5{,}44\text{x}10^{-8}\text{C}$$

b) Con la información suministrada no se puede determinar el signo de las cargas.

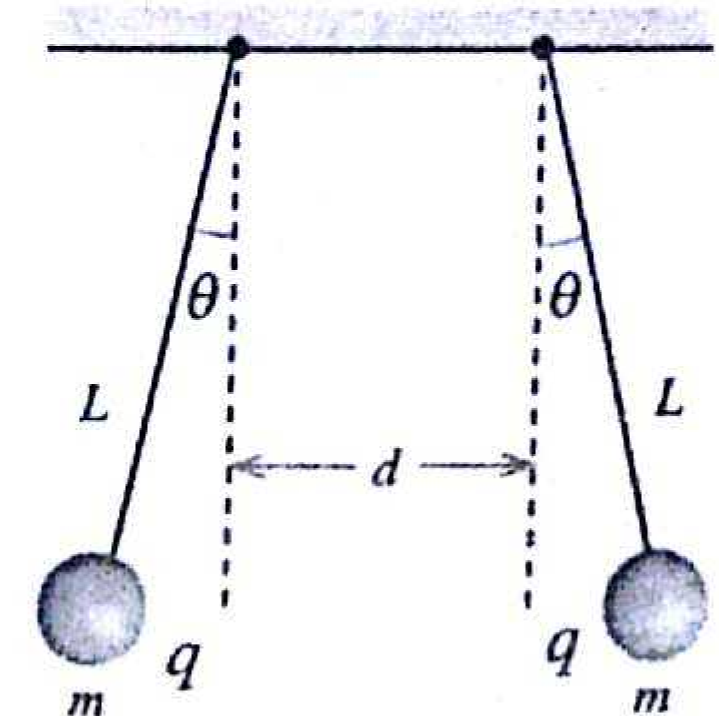
c) El mismo ángulo de desviación $\theta = 10°$ se obtendría para cualquier combinación de cargas que sean del mismo signo y con diferentes valores, con tal de que su producto sea: $q_1 q_2 = (5{,}44\text{x}10^{-8}\ \text{C})^2 = 2{,}96\text{x}10^{-15}\ \text{C}^2$.

Respuesta:

a) $q = \pm 5{,}44\text{x}10^{-8}$ C
b) No.
b) Cualquier combinación de cargas de igual signo tal que: $q_1 q_2 = 2{,}96\text{x}10^{-15}\ \text{C}^2$

PR-1.09. *Repulsión de dos esferitas suspendidas II.*

Repetir el problema anterior suponiendo que. inicialmente las cuerdas están separadas por una distancia d. Cada esferita recibe la misma carga q, y se repelen entre sí, hasta que quedan en equilibrio formando un ángulo θ con la vertical.¿Cuál es la magnitud de q?



Solución: Las fuerzas que actúan sobre cada bolita son: el peso $m\vec{g}$, la fuerza de repulsión eléctrica, $\vec{F}_e$ y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$. Para que una bolita esté en equilibrio, la fuerza neta en cada dirección debe ser cero:

$$\sum F_x = F_e - T sen\theta = 0$$

$$\sum F_y = T cos\theta - mg = 0$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, se elimina la tensión:

$$\frac{T sen\theta}{T cos\theta} = tg\theta = \frac{F_e}{mg}$$

Como la separación entre las dos bolitas es $(d + 2L sen\theta)$, la fuerza eléctrica de Coulomb es:

$$F_e = k\frac{q^2}{r^2} = k\frac{q^2}{(d + 2L sen\theta)^2}$$

Sustituyendo F_e en la expresión anterior, encontramos:

$$tg\theta = \frac{k}{mg}\frac{q^2}{(d + 2L sen\theta)^2}$$

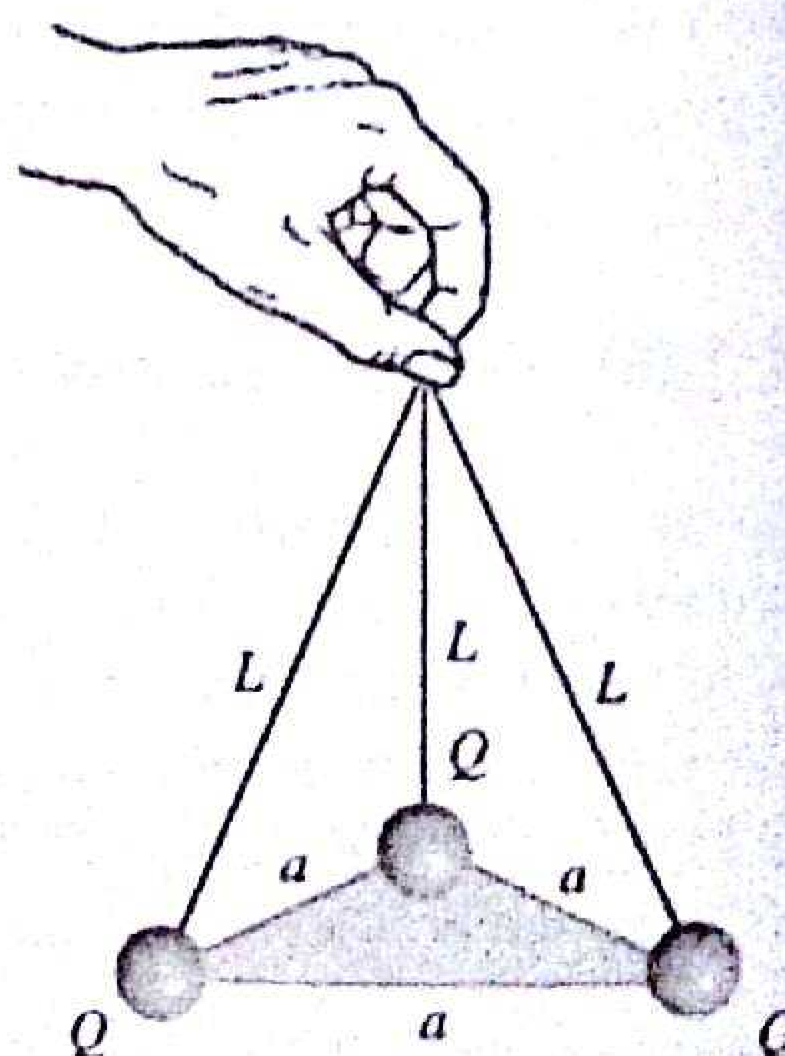
$$q = (d + 2L sen\theta)\sqrt{\frac{mg}{k}tg\theta}$$

Respuesta:

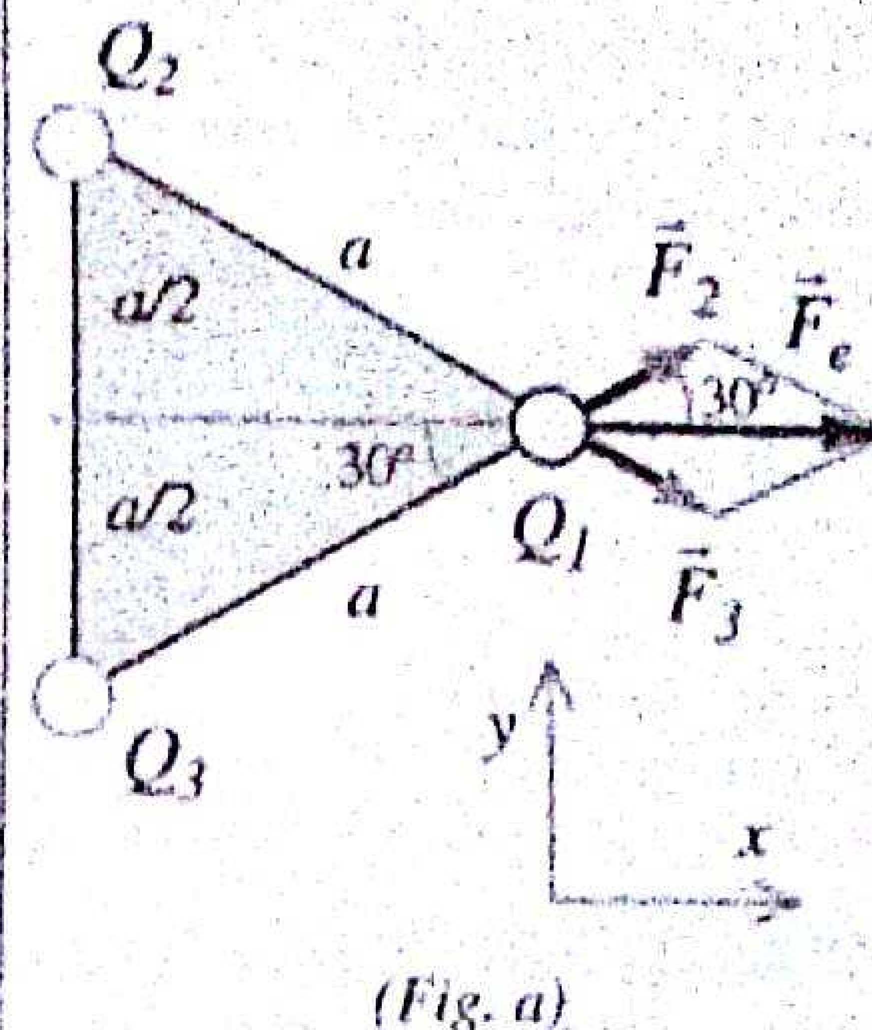
$$q = (d + 2L sen\theta)\sqrt{\frac{mg}{k}tg\theta}$$

PR-1.10. *Repulsión de tres esferitas suspendidas I*

Tres esferitas idénticas, de masa m reciben cada una, una carga Q y se suspenden de un punto común mediante hilos aislantes y ligeros de longitud L. Las esferitas se repelen entre sí hasta que, en equilibrio se localizan en un plano formando un triángulo equilátero de lado a.
¿Cuál es el valor Q de las cargas?



Solución: La fuerza eléctrica resultante sobre una de las esferitas, que llamaremos Q_1, es la suma de las fuerzas eléctricas ejercidas por las otras dos esferitas y queda en la línea de simetría del triángulo de lados a, o el eje x en la *Fig a*:



(Fig. a)

$$\vec{F}_e = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

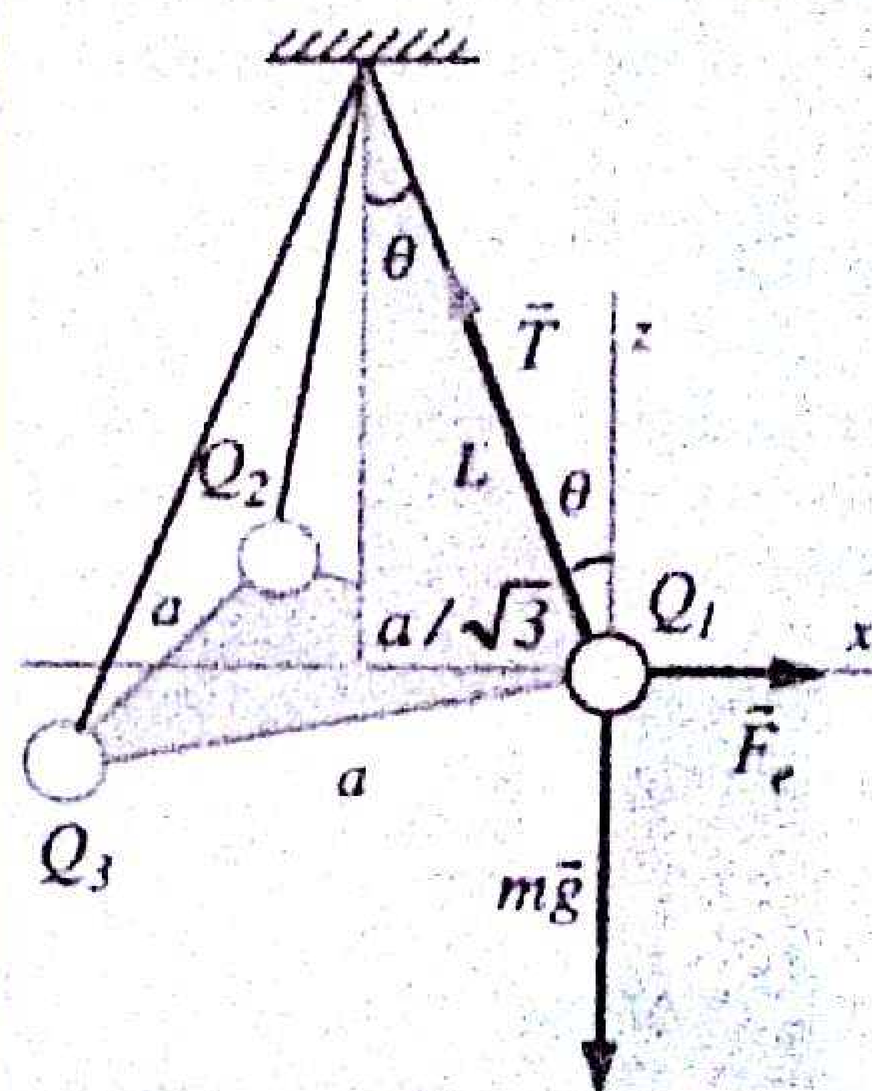
$$\vec{F}_e = 2|\vec{F}_3|cos 30^o \hat{x} = 2(k\frac{Q^2}{a^2})\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} \qquad \text{(i)}$$

Sobre Q_1 actúan tres fuerzas: la tensión $\vec{T}$ de la cuerda, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$.

El diagrama de cuerpo libre de Q_1 se ilustra en la *Fig. b*. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_z = T cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{cos\theta} \qquad \text{(ii)}$$

$$\sum F_x = F_e - T sen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e = T sen\theta \qquad \text{(iii)}$$



(Fig. b)

Reemplazando T de la Ec. (ii) en la Ec (iii) tenemos:

$$F_e = \frac{mg}{cos\theta}sen\theta = mg tg\theta \qquad \text{(iv)}$$

Si observamos el triángulo sombreado del plano x-z, (Fig.b), el ángulo θ que forma el hilo con la vertical está determinado por:

$$tg\theta = \frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{L^2 - (a/\sqrt{3})^2}} = \frac{a}{\sqrt{3L^2 - a^2}} \qquad \text{(v)}$$

Igualando las expresiones (i) y (iv) para la fuerza F_e y sustituyendo la expresión (v) para $tg\theta$, se obtiene:

$$\sqrt{3}k\frac{Q^2}{a^2} = mg\frac{a}{\sqrt{3L^2 - a^2}}$$

Finalmente, de esta expresión despejamos la carga Q:

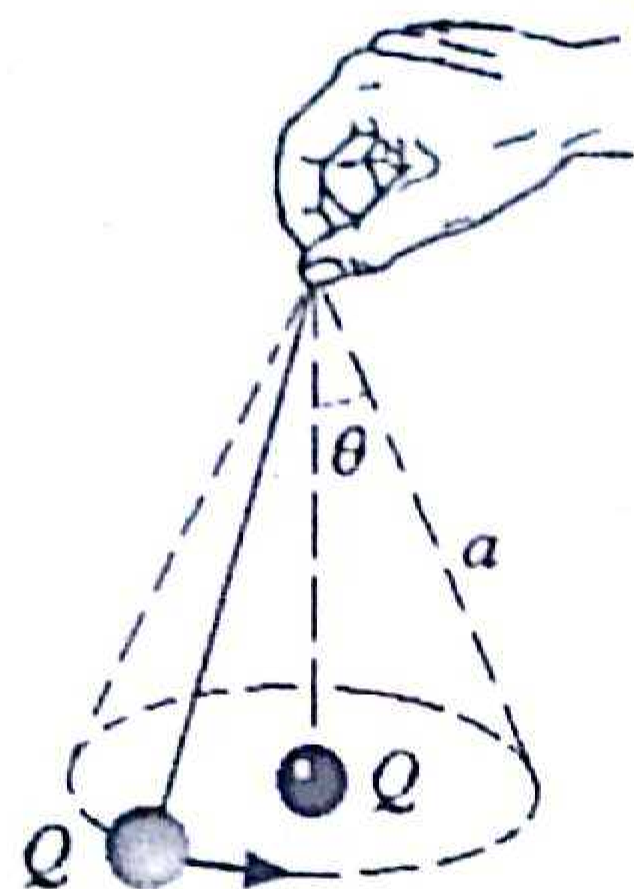
$$Q = \sqrt{\frac{mga^3}{k\sqrt{9L^2 - 3a^2}}}$$

Respuesta:

$$Q = \sqrt{\frac{mga^3}{k\sqrt{9L^2 - 3a^2}}}$$

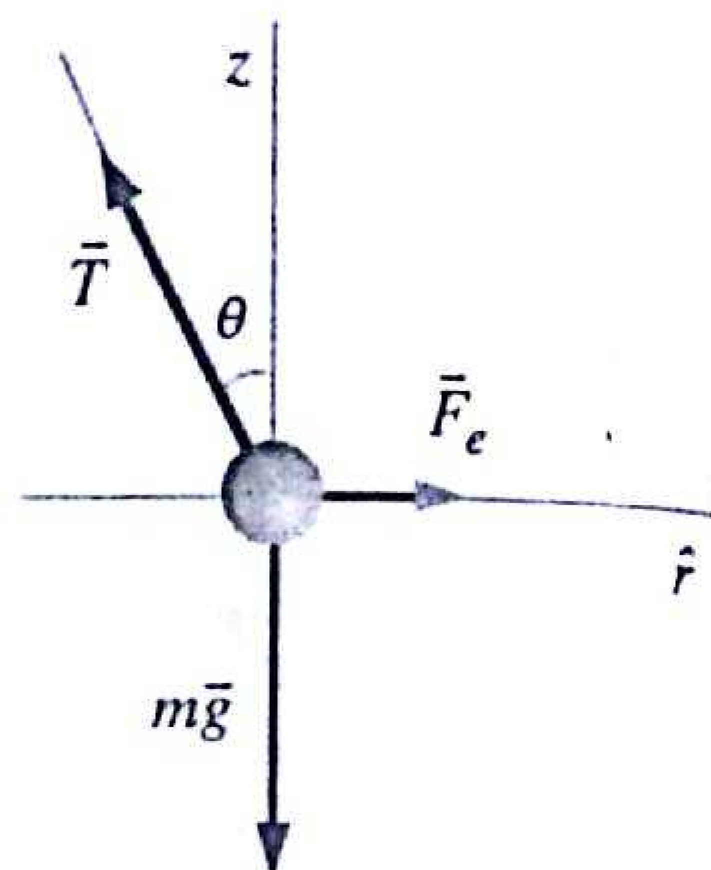
PR-1.11. *Un péndulo eléctrico cónico*

Una esferita de carga Q y masa m que está suspendida por un hilo de longitud a, gira alrededor de otra esferita de idéntica carga Q, la cual está inmóvil. La dirección del hilo forma un ángulo θ con la vertical. Determine la velocidad angular, ω, con la cual la esferita gira uniformemente.



Solución: Sobre la esferita en movimiento actúan tres fuerzas: el peso, $m\bar{g}$, la tensión de la cuerda, $\bar{T}$ y la fuerza de repulsión eléctrica, $\bar{F}_e$, ejercida por la esferita fija. Podemos descomponer las fuerzas en dos componentes: una vertical en el eje z y otra radial en el plano horizontal. En la dirección vertical la esferita está en equilibrio:

$$\sum F_z = T\cos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad \text{(i)}$$



La componente radial de la fuerza apunta hacia la esferita fija y provee la aceleración centrípeta ($\omega^2 r$) que la mantiene moviéndose en el plano horizontal en un círculo de radio r. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = -F_e + T\,sen\theta = m\omega^2 r$$

Despejando ω^2

$$\omega^2 = \frac{T\,sen\theta - F_e}{mr}$$

Sustituyendo T y F_e se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{(mg/\cos\theta)sen\theta - kQ^2/r^2}{mr} = \frac{g\,tg\theta}{r} - \frac{kQ^2}{mr^3}$$

Finalmente, después de sustituir $r = a\,sen\theta$ y extraer la raíz cuadrada, se obtiene la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta} - \frac{kQ^2}{ma^3 sen^3\theta}}$$

Respuesta:

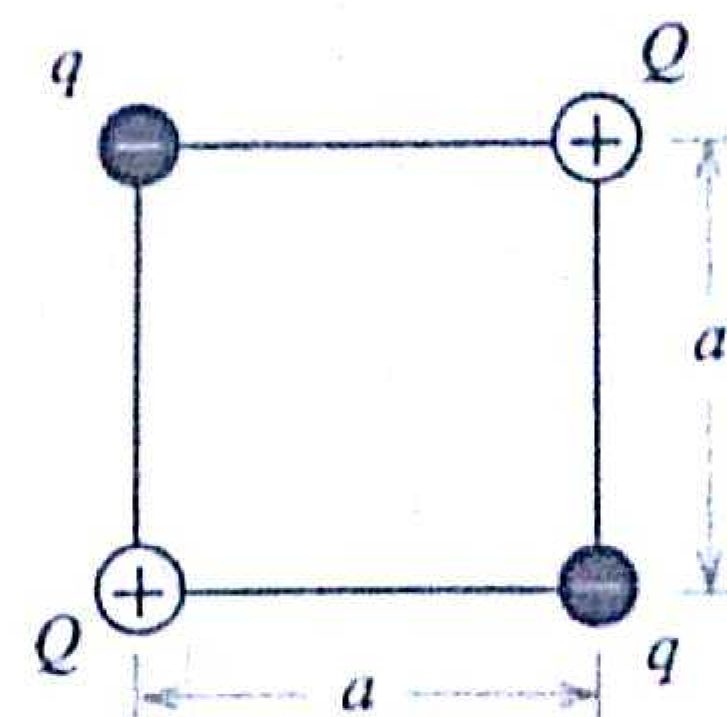
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta} - \frac{kQ^2}{ma^3 sen^3\theta}}$$

PR-1.12. *¿Podrán estar todas las cargas en equilibrio?*

En los vértices opuestos de un cuadrado de lado a se colocan dos cargas positivas, $+Q$, y en los otros dos vértices se colocan dos cargas negativas $-q$.

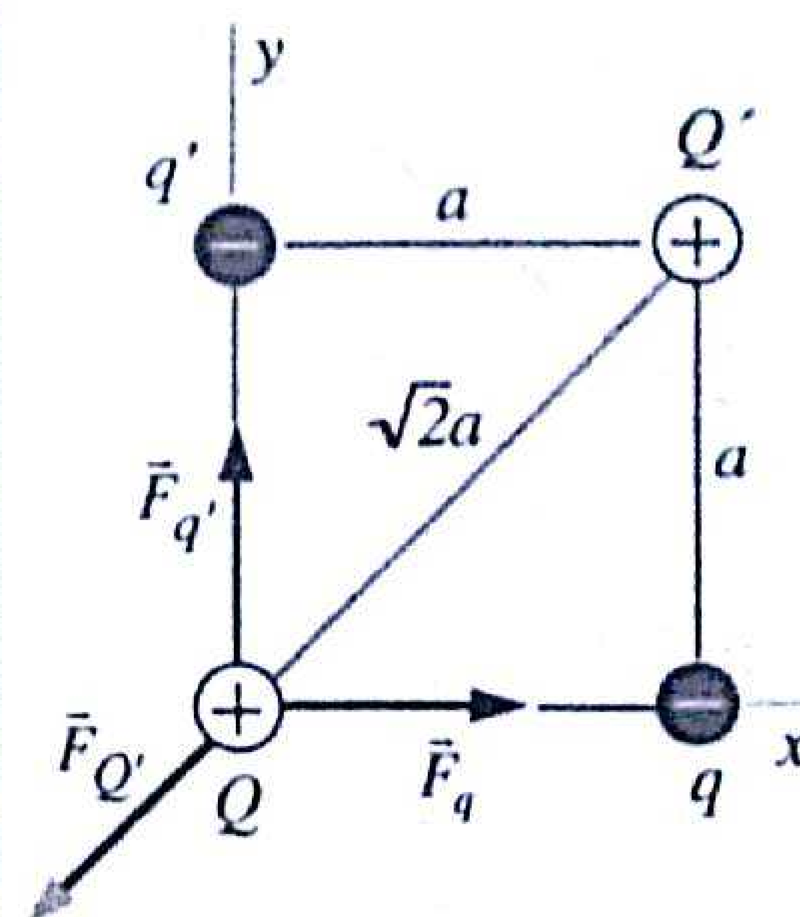
a) ¿Cuál debe ser la relación entre q y Q para que sea nula la fuerza sobre cualquiera de las dos cargas $+Q$?

b) En tal situación, quedarían también las cargas $-q$ en equilibrio. Si no es así, ¿cuál fuerza adicional a la fuerza eléctrica habría que aplicar sobre cada carga $-q$?



Solución: a) Sobre la carga Q actúan tres fuerzas: La fuerza repulsiva $\bar{F}_{Q'}$ ejercida por la carga similar Q' en la dirección de la diagonal y apuntando hacia afuera del cuadrado:

$$\bar{F}_{Q'} = k\frac{Q^2}{r^2}\hat{r} = k\frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{-\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$$



(a) Fuerzas sobre Q

Las dos fuerzas atractivas $\bar{F}_q$ y $\bar{F}_{q'}$ ejercidas por las cargas negativas apuntan a lo largo de los lados del cuadrado:

$$\bar{F}_q = k\frac{qQ}{a^2}\hat{x} \qquad \bar{F}_{q'} = k\frac{qQ}{a^2}\hat{y}$$

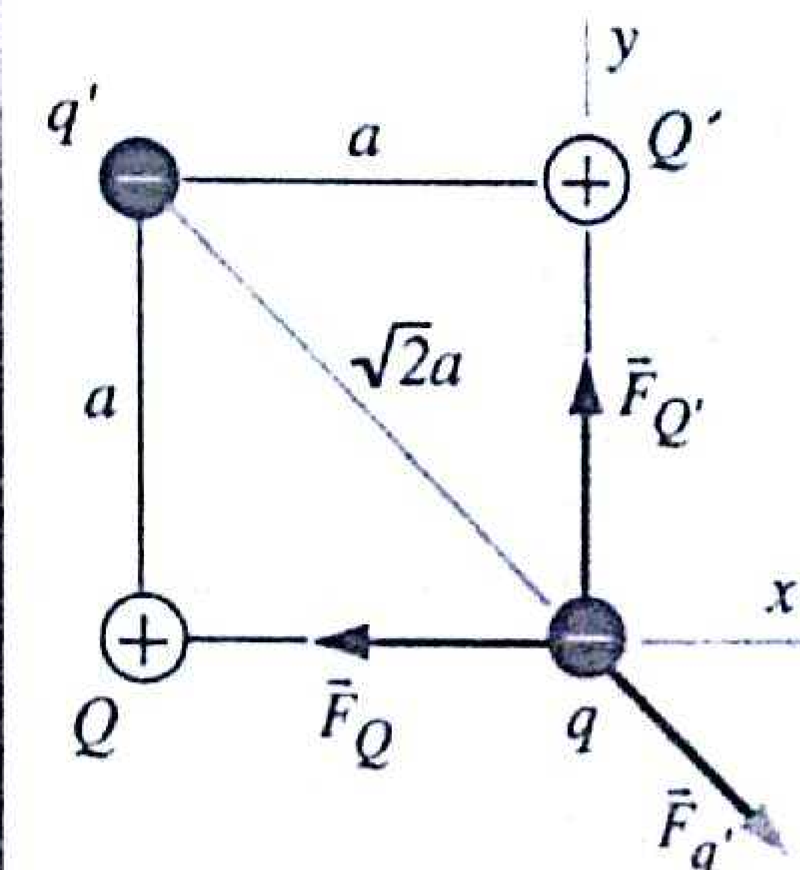
La fuerza total sobre la carga Q es la suma vectorial:

$$\sum \bar{F}_Q = \bar{F}_{Q'} + \bar{F}_q + \bar{F}_{q'}$$

$$\sum \bar{F}_Q = k\frac{Q}{a^2}\left[\left(q - \frac{Q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{x} + \left(q - \frac{Q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{y}\right]$$

Para que esta fuerza sea cero se deben anular cada una de sus componentes, por lo tanto la magnitud de q viene dada por :

$$q - \frac{Q}{2\sqrt{2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{Q}{2\sqrt{2}}$$



(b) Fuerzas sobre q

b) Considerando el diagrama de la Fig. b, la fuerza resultante sobre la carga q es:

$$\sum \bar{F}_q = \bar{F}_Q + \bar{F}_{Q'} + \bar{F}_{q'}$$

$$\sum \vec{F}_q = k\frac{qQ}{a^2}(-\hat{x}) + k\frac{qQ}{a^2}(+\hat{y}) + k\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2}(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}})$$

$$\sum \vec{F}_q = k\frac{q}{a^2}[-(Q-\frac{q}{2\sqrt{2}})\hat{x} + (Q-\frac{q}{2\sqrt{2}})\hat{y}]$$

Reemplazando el valor de $q = Q/2\sqrt{2}$ que hemos hallado anteriormente, esta fuerza es:

$$\sum \vec{F}_q = k\frac{Q^2}{a^2}(\frac{7}{16})(\frac{-\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}})$$

b) Concluimos que la fuerza resultante sobre las cargas q y q' no son nulas, tienen magnitud $7kQ^2/16a^2$ y quedan a lo largo de la diagonal, apuntando hacia el centro del cuadrado. Para mantenerlas en equilibrio, se hace necesario aplicarle una fuerza mecánica adicional, de igual magnitud y de sentido opuesto.

Respuesta:

a) $q = \frac{Q}{2\sqrt{2}}$

b) No. Habría que aplicarles una fuerza adicional de magnitud:

$$|\vec{F}_q| = |\vec{F}_{q'}| = \frac{7}{16}\frac{kQ^2}{a^2}$$

dirigida hacia el centro del cuadrado.

PR-1.13. *Hay que mantener el equilibrio*

Se colocan cuatro cargas eléctricas de igual valor, Q, en los vértices de un cuadrado.

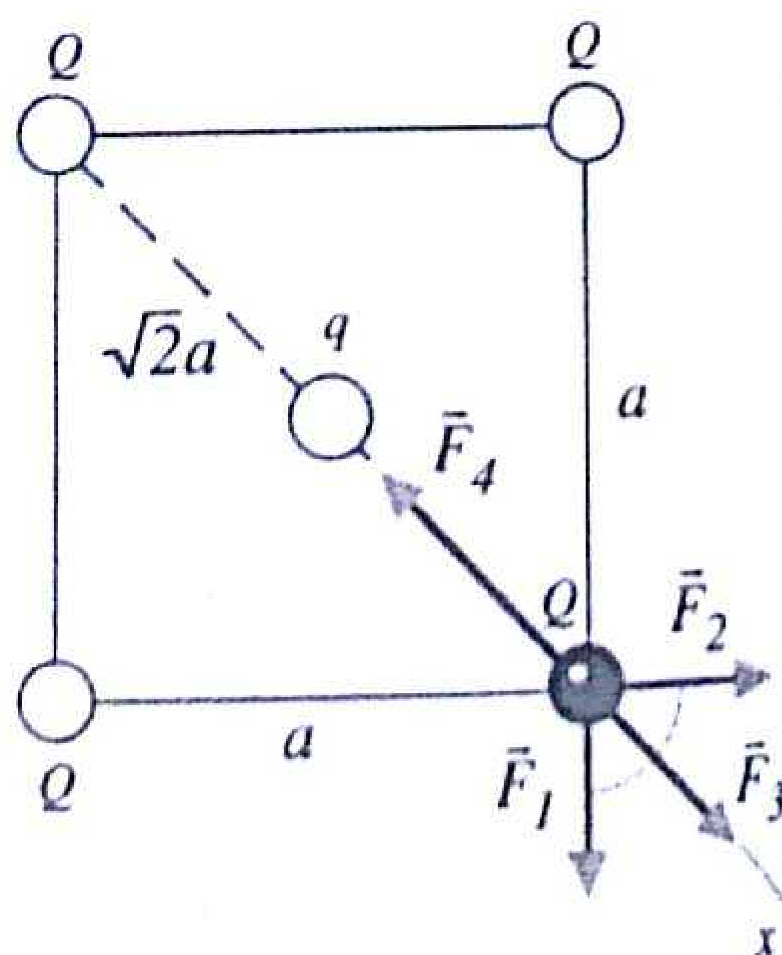
a) ¿Cuál será la carga q de signo contrario que es necesario colocar en el centro del cuadrado para que todo el sistema de cargas se encuentre en equilibrio?

b) ¿Será estable el equilibrio de esta configuración?

Solución: Debido a la posición geométrica de la carga q, independiente de su valor, se encontrará siempre en equilibrio en el centro del cuadrado. Cualquiera de las cargas Q en las esquinas del cuadrado, estará sujeta a tres fuerzas repulsivas ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$) y una atractiva, $\vec{F}_4$. La condición de equilibrio impone que la suma algebraica de las proyecciones de las cuatro fuerzas sobre la diagonal del cuadrado (eje x), debe ser cero:

$$\sum F_x = F_1 \cos 45° + F_2 \cos 45° + F_3 - F_4 = 0$$

Tomando en cuenta las diferentes distancias entre las cargas, en términos del lado a del cuadrado, y



sustituyendo las expresiones de las fuerza eléctricas, encontramos:

$$\frac{kQ^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{kQ^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{kQ^2}{(\sqrt{2}a)^2} - \frac{kqQ}{(\sqrt{2}a/2)^2} = 0$$

$$\frac{kQ^2}{a^2}(\sqrt{2}+\frac{1}{2}) = 2\frac{kqQ}{a^2}$$

Simplificando y espejando, encontramos el valor de la carga q:

$$q = \frac{Q}{4}(2\sqrt{2}+1)$$

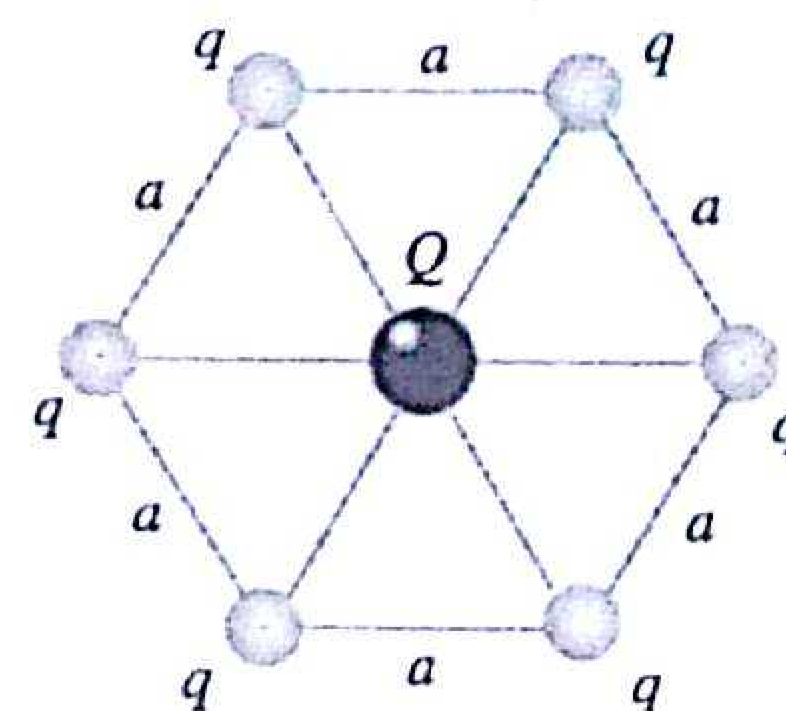
b) El equilibrio será inestable, ya que si desplazamos ligeramente cualquiera de las cargas, todas las demás entrarían en movimiento, destruyéndose la configuración.

Respuesta:

$$q = \frac{Q}{4}(2\sqrt{2}+1)$$

PR-1.14. *Distribución hexagonal de cargas*

En los vértices de un hexágono regular se colocan cargas eléctricas de igual valor, q. ¿Qué carga Q habrá que colocar en el centro del hexágono para que todo el sistema de cargas permanezca en equilibrio?

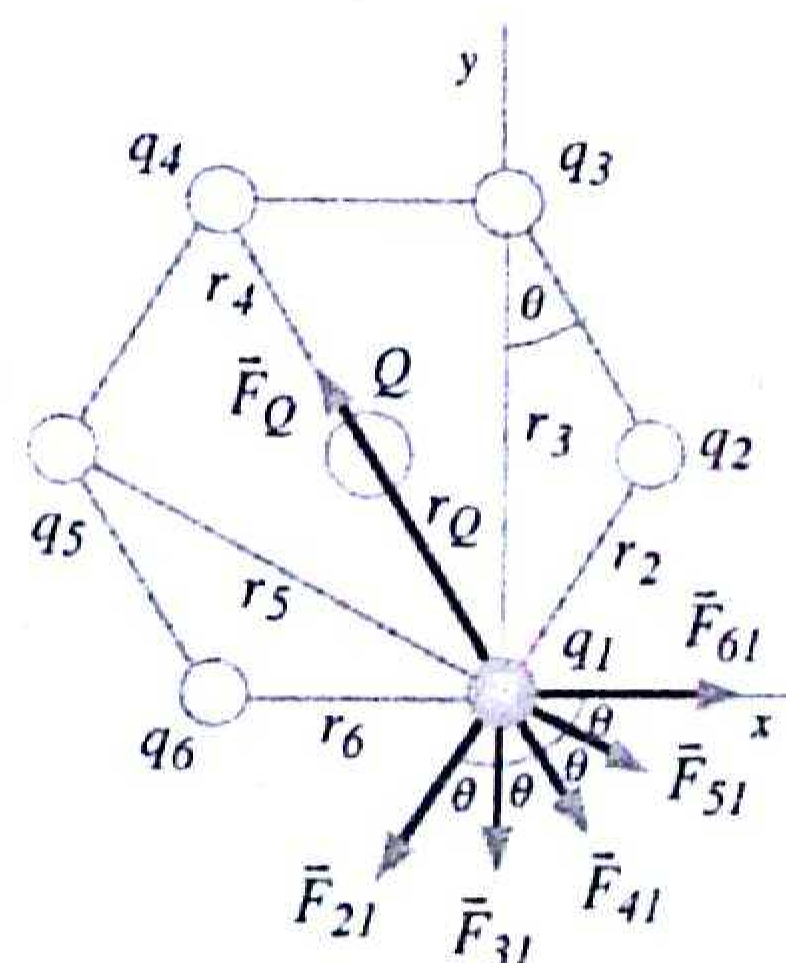


Solución: En el centro del hexágono, la carga Q siempre estará en equilibrio, sin importar su valor. Si escogemos una de las cargas q del hexágono, podemos escribir las diferentes distancias a las otras cargas en términos de a. Se observa que los seis triángulos inscritos en el hexágono son equiláteros y sus ángulos internos valen 60° y la mitad de este ángulo es $\theta = 30°$. Las distancias son:

$$r_2 = a,\ r_3 = \sqrt{3}a,\ r_4 = 2a,\ r_5 = \sqrt{3}a,\ r_6 = a,\ r_Q = a$$

La condición de equilibrio en la dirección x para la carga q_1 es:

$$\sum F_x = 0$$



$$F_{61}+F_{51}\cos 30^\circ+F_{41}\cos 60^\circ-F_{21}\cos 60^\circ-F_Q\cos 60^\circ=0$$

$$\frac{kq^2}{a^2}+\frac{kq^2}{(\sqrt{3}a)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{kq^2}{(2a)^2}\frac{1}{2}-\frac{kq^2}{a^2}\frac{1}{2}-\frac{kQ}{a^2}\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{kq^2}{a^2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{kQ}{a^2}\frac{1}{2}$$

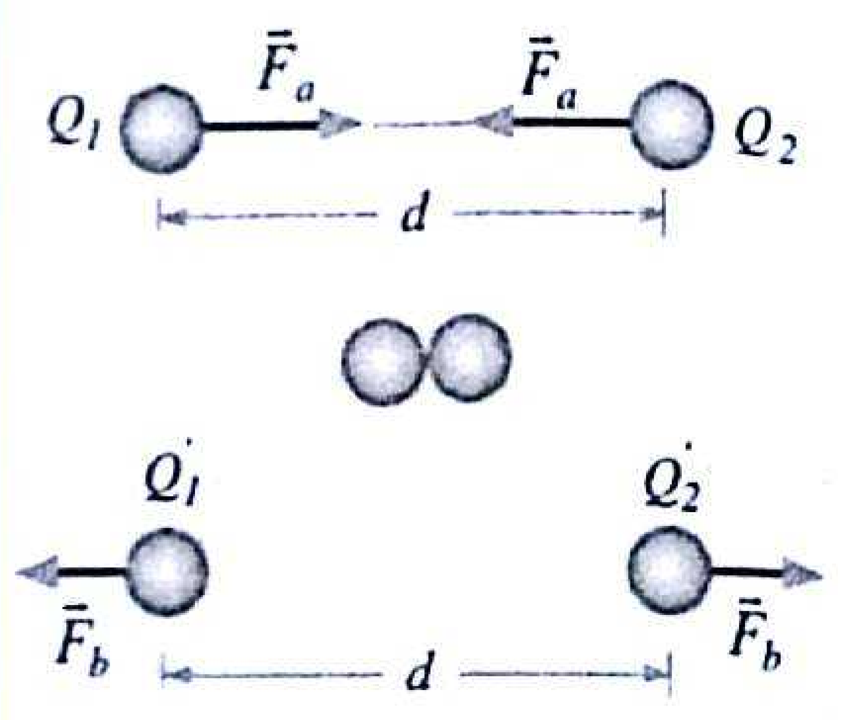
$$Q=\frac{15+4\sqrt{3}}{12}q=1{,}83q$$

Respuesta:

Q es de signo opuesto a q y su valor es: Q = 1.83q

PR-1.15. *Primero se atraen y luego se repelen*

Dos esferitas conductoras idénticas, cuando se encuentran fijas a una distancia, d = 1.0 m, se atraen con una fuerza electrostática $\vec{F}_a$ de 2.7 N. A continuación, se les pone en contacto y después que las cargas se redistribuyan, se vuelven a separar hasta la distancia original. En esta nueva situación se observa que las esferas se repelen con una fuerza $\vec{F}_b$ de 0.9 N. ¿Cuáles eran las cargas iniciales?

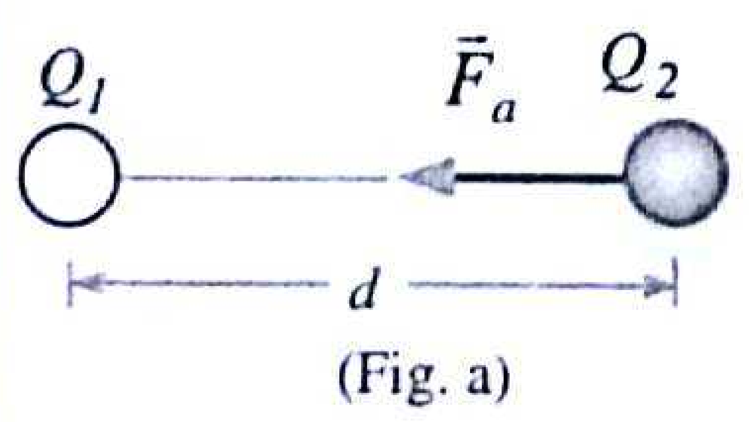


Solución: Inicialmente, las cargas Q_1 y Q_2 son de signos opuestos y la fuerza es atractiva, (figura a). La fuerza es:

$$F_a=-k\frac{Q_1Q_2}{d^2}\qquad\Rightarrow\qquad Q_1Q_2=-\frac{F_ad^2}{k}$$

Sustituyendo los valores:

$$Q_1Q_2=-\frac{(2{,}7\text{N})(1{,}0\text{m})^2}{9\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2}=-3\text{x}10^{-10}\text{C}^2\qquad(1)$$



(Fig. a)

Cuando se tocan las esferitas, por ser conductoras, habrá un flujo de cargas entre ellas hasta alcanzar el equilibrio. Como las esferitas son idénticas, la carga neta quedará repartida en cantidades iguales y del mismo signo, $Q_1'=Q_2'$. La conservación de la carga neta inicial garantiza que la carga final en cada esferita sea:

$$Q_1'=Q_2'=\frac{Q_1+Q_2}{2}$$

Después de retirar el alambre, la fuerza electrostática es repulsiva (fig. b) y viene dada por:

$$F_b=+k\frac{Q_1'Q_2'}{d^2}=k\frac{[(Q_1+Q_2)/2]^2}{d^2}$$



(Fig. b)

Despejando la suma (Q_1+Q_2), se obtiene una segunda relación entre las cargas:

$$Q_1+Q_2=2d\sqrt{\frac{F_b}{k}}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$Q_1+Q_2=2(1{,}0\text{m})\sqrt{\frac{0{,}9\text{N}}{9\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2}}=2\text{x}10^{-5}\text{C}\qquad(2)$$

Podemos ahora, despejar Q_2 de la ecuación (1) y sustituirla en la ecuación (2), para obtener la siguiente ecuación de Q_1 (en coulombs):

$$Q_1^2-2\text{x}10^{-5}Q_1-3\text{x}10^{-10}=0$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$Q_1=\frac{1}{2}[2\text{x}10^{-5}\pm\sqrt{(2\text{x}10^{-5})^2+4(3\text{x}10^{-10})}]$$

Luego las dos posibles combinaciones de cargas que se obtienen son:

Raíz (+): $Q_1=+1\text{x}10^{-5}C$ $\quad Q_2=-3\text{x}10^{-5}C$

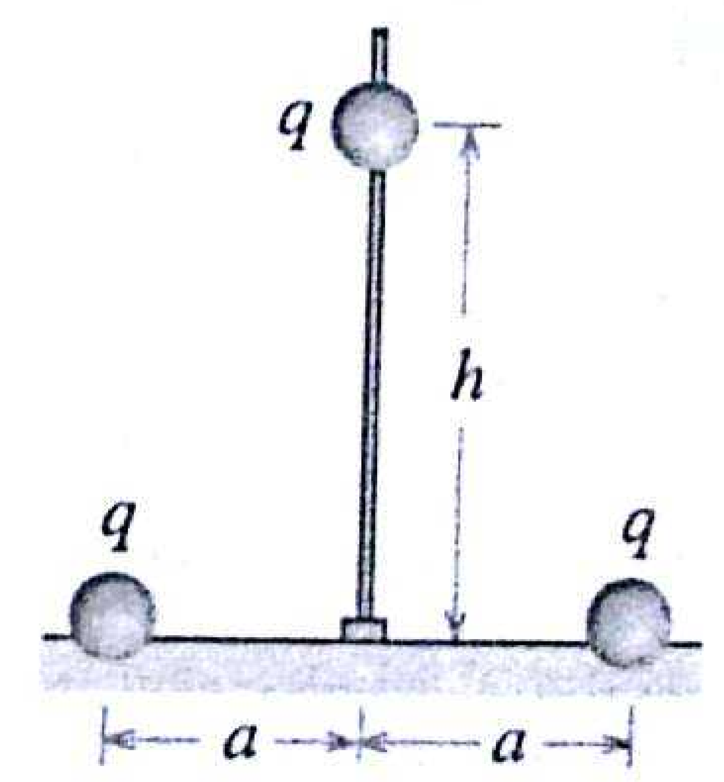
Raíz (-): $Q_1=-3\text{x}10^{-5}C$ $\quad Q_2=+1\text{x}10^{-5}C$

Respuesta:

Carga de una esfera:	+1x10^{-5}C
Carga de la otra:	- 3x10^{-5}C

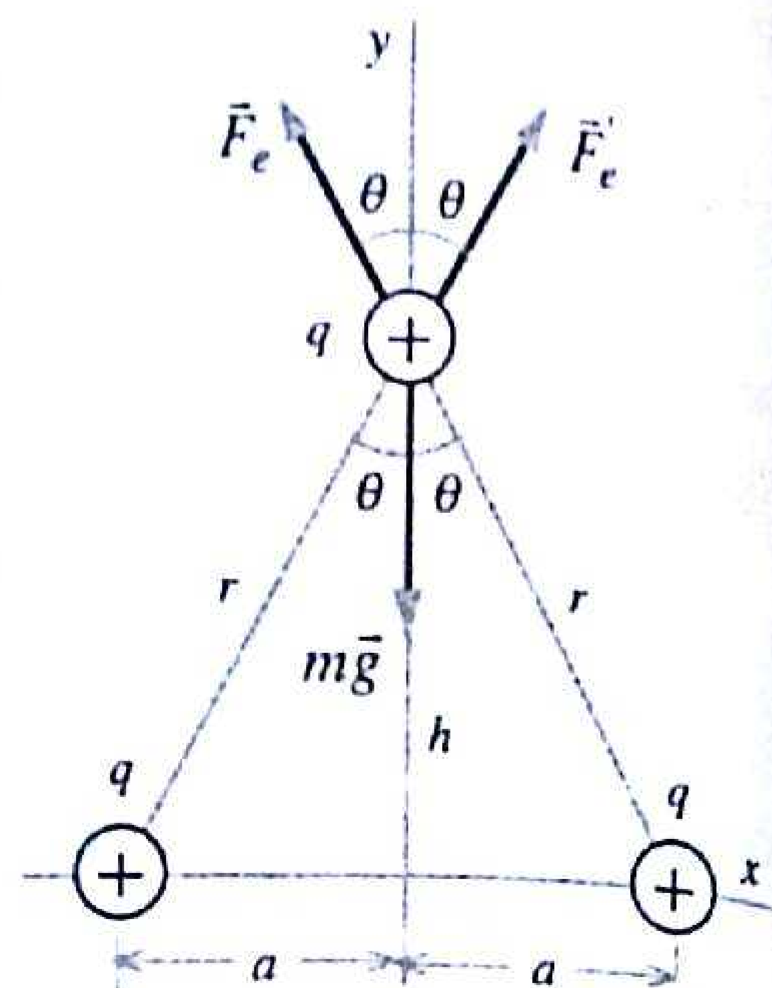
PR-1.16. *Levitación eléctrica*

Dos esferitas idénticas, con carga q, están fijas sobre una mesa horizontal a una distancia $2a$. Una esferita de masa m puede deslizar sin fricción sobre una barra aislante colocada rígidamente en la vertical que pasa por el punto medio entre las dos cargas. Si se le comunica a la esferita móvil una carga q igual a las anteriores, ¿cuál debe ser la separación a para que la esferita móvil esté en equilibrio a una altura h?



Solución: Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la esferita en equilibrio. Debido a la simetría, el equilibrio horizontal queda satisfecho automáticamente En la dirección vertical (eje y) la condición de equilibrio es:

$$\sum F_y = 2F_e \cos\theta - mg = 0$$



Sustituyendo la expresión de Coulomb de la fuerza electrostática, se obtiene:

$$F_e = k\frac{q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad 2(k\frac{q^2}{r^2})\cos\theta = mg$$

Tomando en cuenta que $\cos\theta = h/r$:

$$\frac{2hkq^2}{r^3} = \frac{2hkq^2}{(h^2+a^2)^{3/2}} = mg$$

Despejando, obtenemos la separación a de las esferitas:

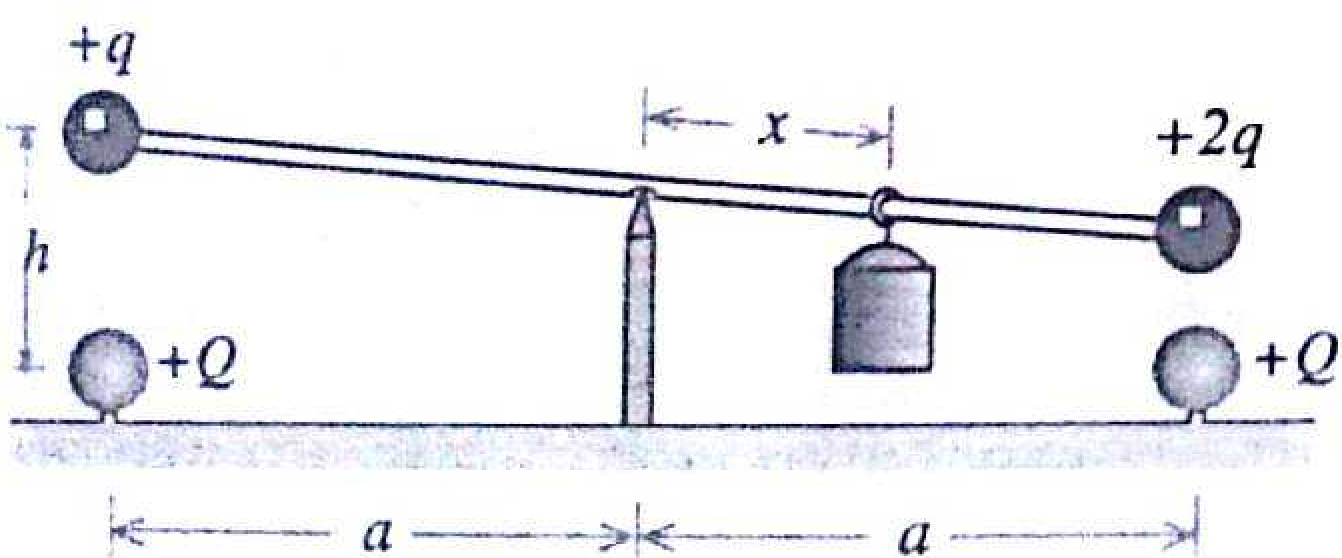
$$a = \sqrt{(\frac{2hkq^2}{mg})^{2/3} - h^2}$$

Respuesta:

$$a = \sqrt{(\frac{2hkq^2}{mg})^{2/3} - h^2}$$

PR-1.17. *Una balanza electrostática*

Una barra no conductora, de masa despreciable y longitud $2a$ está apoyada en su centro sobre un pivote. La barra tiene en sus extremos dos pequeñas esferas conductoras de cargas positivas q y $2q$ respectivamente, debajo de las cuales hay cargas positivas Q que están fijas.



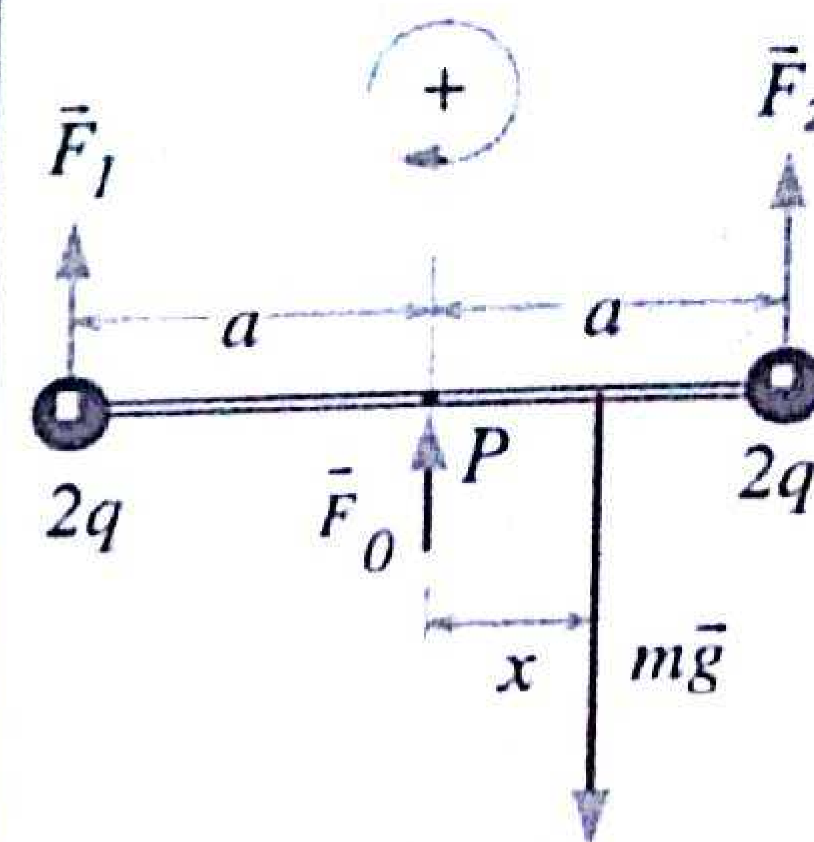
a) Determine la distancia x desde el centro, donde se puede colocar un peso $m\vec{g}$ de modo que la barra quede balanceada en posición horizontal, y así las cargas q y $2q$ queden a igual distancia h por encima de las cargas Q.

b) ¿Cuál debe ser el valor de h para que la barra no ejerza fuerza vertical sobre el pivote cuando está balanceada?

Solución: a) El diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas que actúan sobre la barra en la posición horizontal.

Estas son: las fuerzas eléctricas repulsivas en los extremos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza $\vec{F}_0$ de contacto con el pivote. Para que la barra esté en equilibrio, el torque neto alrededor de cualquier punto debe ser cero. Tomando torques respecto del pivote P tenemos:

$$\sum \tau_P = F_1 a + mgx - F_2 a = 0$$



Reemplazando las expresiones de Coulomb para las fuerzas eléctricas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se obtiene la ecuación:

$$(k\frac{qQ}{h^2})a + mgx - (k\frac{2qQ}{h^2})a = 0$$

Despejando, se obtiene x:

$$x = (\frac{kqQ}{h^2 mg})a$$

b) Como la barra está en equilibrio la fuerza neta debe ser cero:

$$\sum F_y = F_1 - mg + F_2 + F_0 = 0$$

Si la fuerza $\vec{F}_0$ de apoyo del pivote se anula, entonces:

$$F_1 + F_2 = mg$$

Sustituyendo las expresiones de las fuerzas eléctricas y despejando, se obtiene el valor de h requerido:

$$k\frac{qQ}{h^2} + k\frac{2qQ}{h^2} = mg \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3kqQ}{mg}}$$

Respuesta:

a) $x = (\frac{kqQ}{h^2 mg})a$

b) $h = \sqrt{\frac{3kqQ}{mg}}$

PR 1.18. *El equilibrio puramente electrostático es siempre inestable*

Dos cargas $+Q$ y $+4Q$ son libres de moverse y se desea mantenerlas a una distancia L, poniendo una tercera carga q de manera que el sistema completo quede en equilibrio.

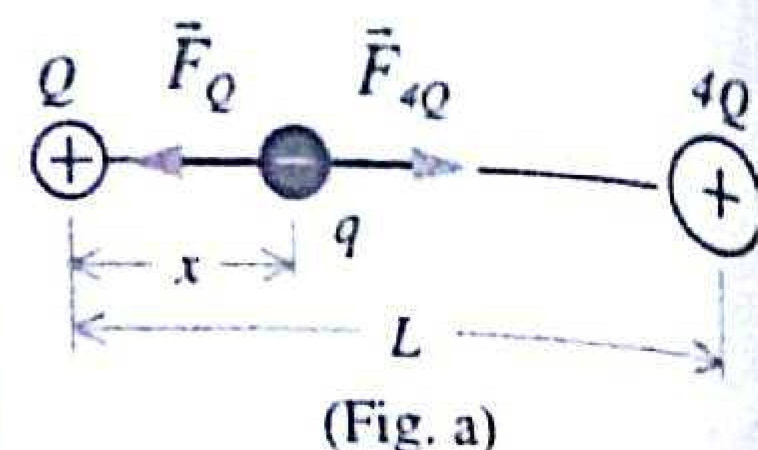
a) Halle la ubicación, magnitud y signo de la carga q.

b) Demuestre que el equilibrio logrado es inestable.

Solución: a) La cargas $+Q$ y $+4Q$, se repelen y para que la fuerza neta sobre cada una sea cero, habrá que colocar la carga negativa de magnitud q en la región entre ellas (Fig. a).

Para hallar la distancia x, imponemos la condición de que la fuerza neta sobre q debe ser nula:

$$\sum \vec{F}_q = \vec{F}_{4Q} + \vec{F}_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q4Q}{(L-x)^2} - k\frac{qQ}{x^2} = 0$$



(Fig. a)

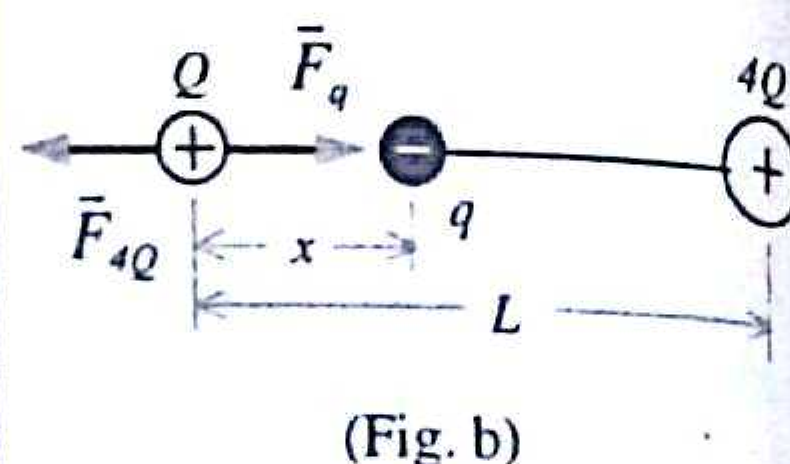
Simplificando y despejando x, resulta:

$$4x^2 = (L-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{3}$$

Por otra parte, como la fuerza sobre Q debe anularse (Fig. b):

$$\sum \vec{F}_Q = \vec{F}_q + \vec{F}_{4Q} = 0$$

$$k\frac{qQ}{x^2} - k\frac{4QQ}{L^2} = 0$$



(Fig. b)

Simplificando y reemplazando el valor de x, podemos hallar la magnitud de la carga q:

$$q = 4Q(\frac{x}{L})^2 = \frac{4}{9}Q$$

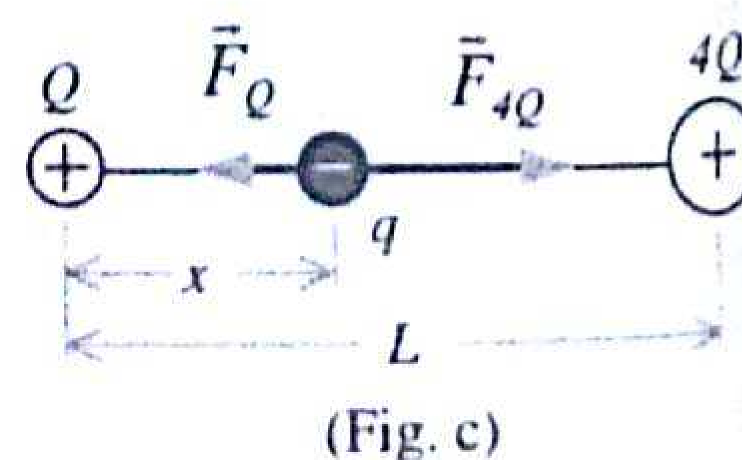
¿Podríamos ahora preguntarnos si, para los valores hallados de x y q, resulta nula la fuerza sobre la tercera carga $4Q$?. Veamos:

$$\sum \vec{F}_{4Q} = \vec{F}_q + \vec{F}_Q$$

$$\sum F_{4Q} = k\frac{4Q^2}{L^2} - k\frac{4qQ}{(L-x)^2} = \frac{4kQ^2}{L^2} - \frac{4k(4Q/9)Q}{(2L/3)^2} = 0$$

Por lo tanto, podemos concluir que las tres cargas están en equilibrio.

b) Para determinar el tipo de equilibrio, basta con desplazar la carga q ligeramente hacia la derecha (Fig. c). La atracción que ejerce $4Q$ es ahora mayor que la ejercida por Q, por lo tanto la carga q tiende a alejarse de su posición de equilibrio. ¡El equilibrio es inestable!



(Fig. c)

Este es un resultado de validez general, expresado en el llamado Teorema de Earnshaw para la electrostática:

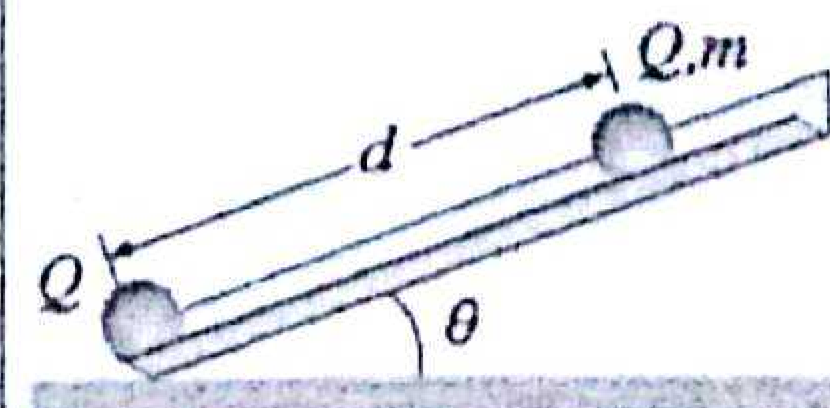
Ninguna partícula puede estar en equilibrio estable bajo la acción de fuerzas eléctricas únicamente.

Respuesta:

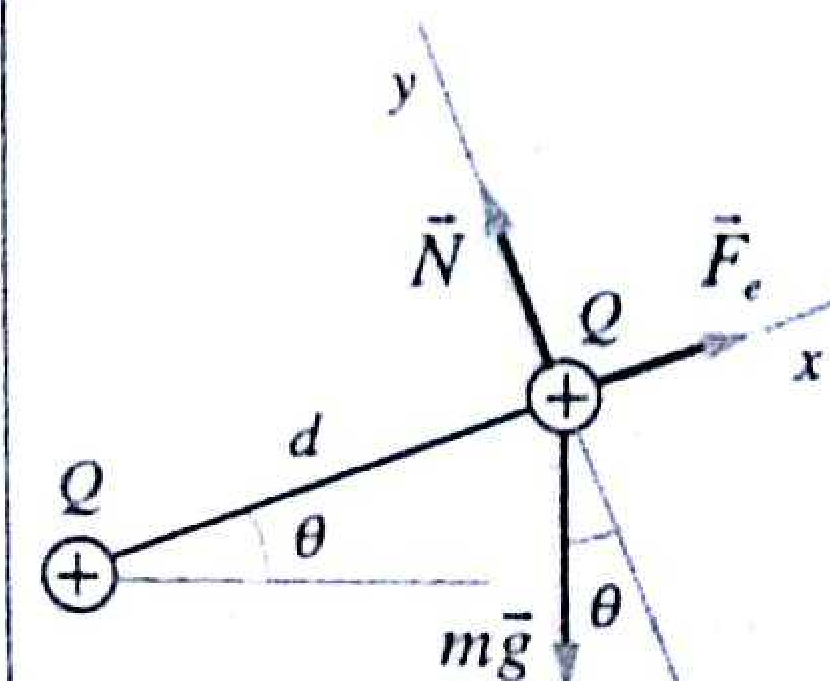
a) $q = -\frac{4}{9}Q$ en $x = \frac{L}{3}$
b) El equilibrio es inestable

PR-1.19. *Carga equilibrada en un plano inclinado*

Una esferita con carga, Q está fija en la base de un plano que forma un ángulo θ con la dirección horizontal. En una ranura lisa y sin fricción del plano se puede colocar una segunda esferita con igual carga Q y de masa m. ¿Cuál es la distancia d para que quede en equilibrio?



Solución: Primero dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la esferita en equilibrio. Si escogemos el eje x orientado a lo largo del plano inclinado, la condición de equilibrio en esta dirección es:



$$\sum F_x = F_e - mgsen\theta = 0$$

Reemplazando la expresión de Coulomb para la fuerza eléctrica, F_e, se obtiene:

$$k\frac{Q^2}{d^2} = mgsen\theta$$

Despejando se obtiene la distancia entre las cargas:

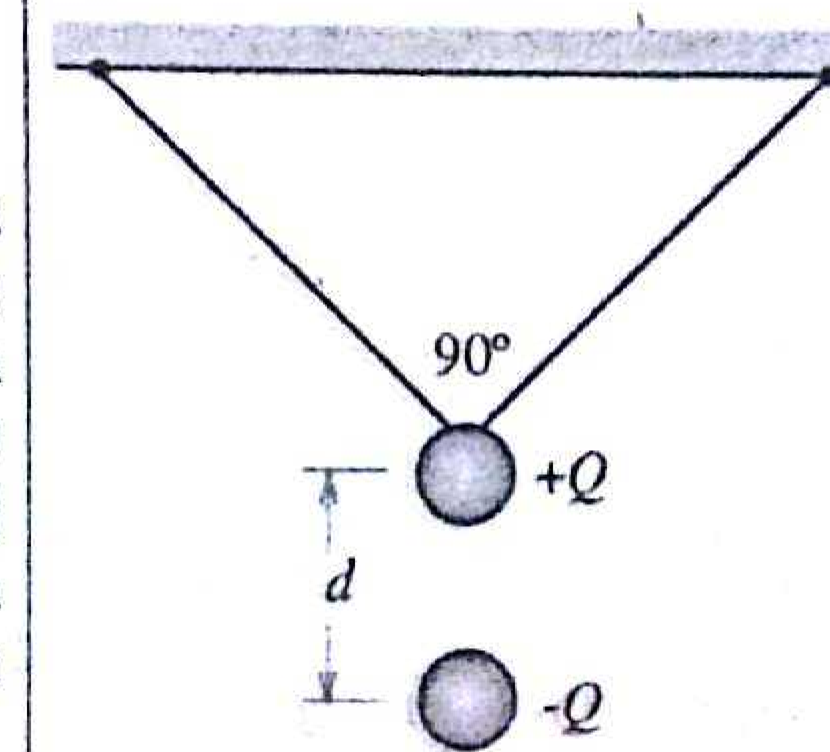
$$d = \sqrt{\frac{kQ^2}{mgsen\theta}}$$

Respuesta:

$d = \sqrt{\frac{kQ^2}{mgsen\theta}}$

PR-1.20. *El hilo se rompe debido a la fuerza eléctrica*

Una esferita de masa m y carga positiva Q, se encuentra suspendida mediante dos hilos de seda inextensibles. Los hilos forman un ángulo de 90° y están sometidos a una tensión T_0. Se sabe que la máxima tensión que pueden resistir los hilos sin romperse es tres veces este valor. Si por debajo de la esferita, se le va acercando otra esferita de carga $-Q$, el hilo se rompe cuando la separación alcanza un valor crítico d, ¿cuál es esta distancia?



Solución: Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la esferita en ausencia de la fuerza eléctrica. La condición de equilibrio vertical es:

$$\sum F_y = 2T_0 \cos 45° - mg = 0$$

$$2T_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = mg \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

La tensión crítica de ruptura es tres veces este valor:

$$T = 3T_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} mg$$

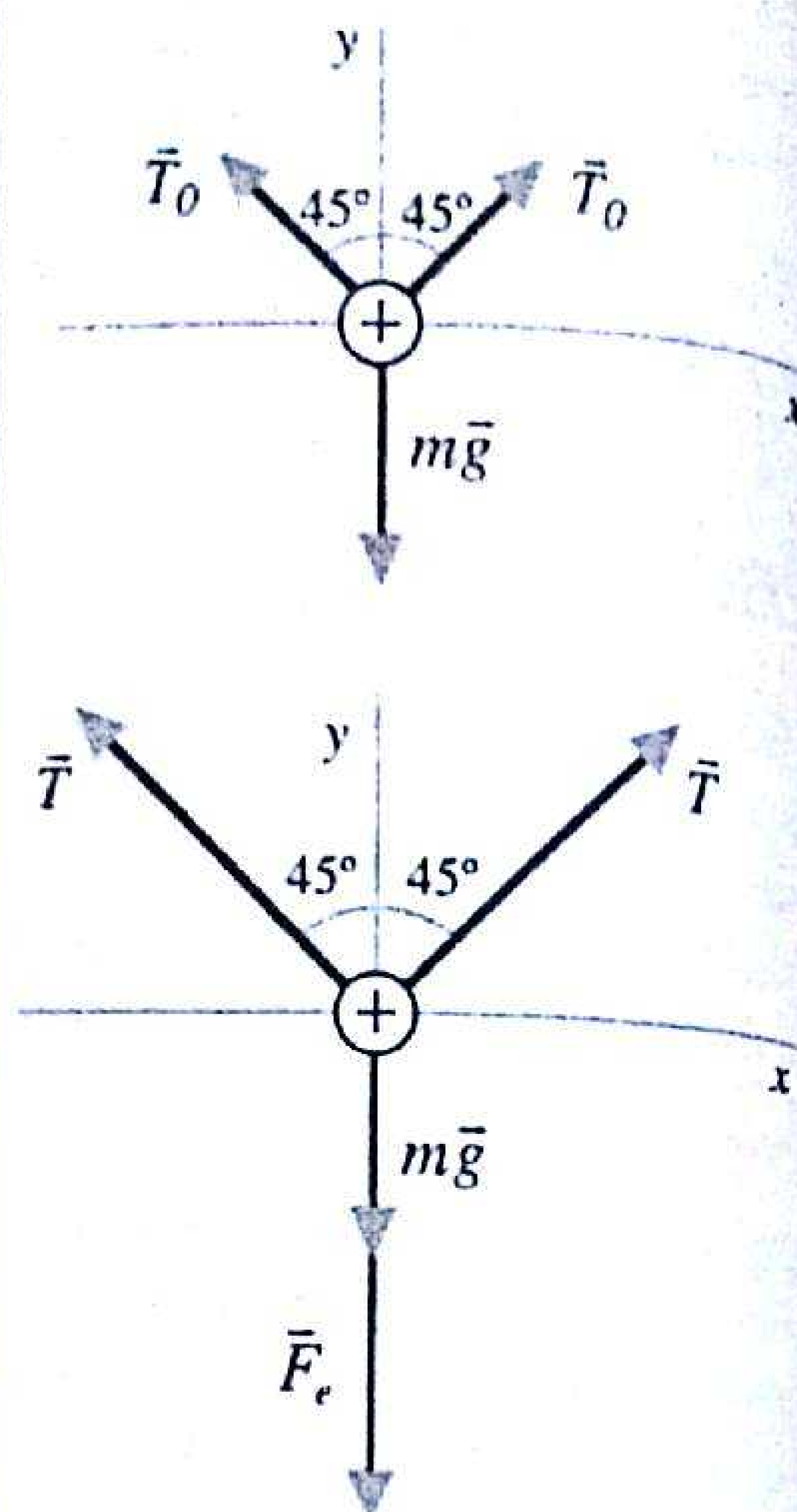
La nueva situación de equilibrio que relaciona esta tensión de la cuerda con la fuerza eléctrica crítica es:

$$\sum F_y = 2T \cos 45° - mg - F_e = 0$$

$$F_e = 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}} mg\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - mg = 2mg$$

Sustituyendo la expresión de la fuerza de Coulomb y despejando, se obtiene la distancia crítica d:

$$\frac{kQ^2}{d^2} = 2mg \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt{\frac{kQ^2}{2mg}}$$

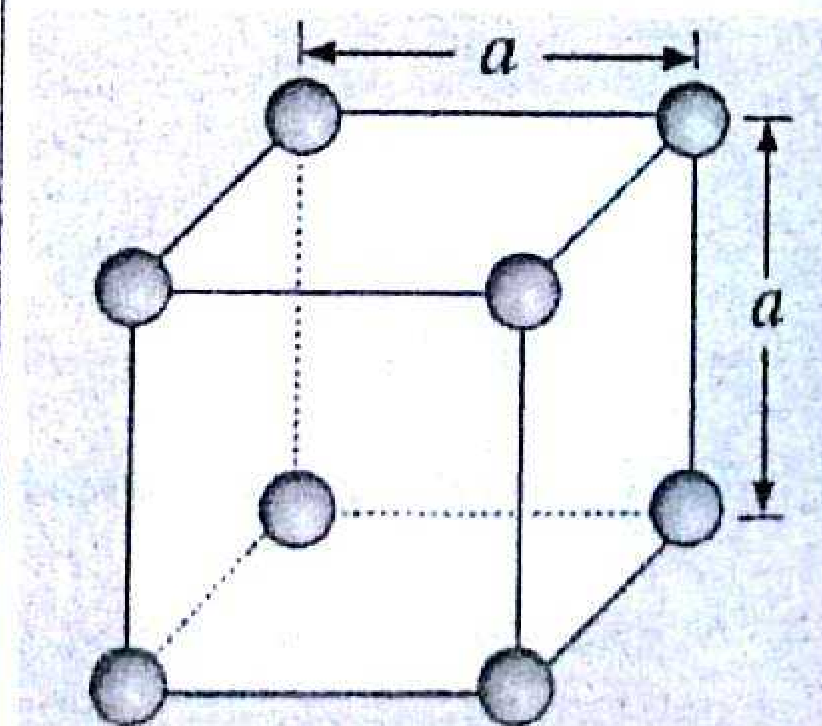


Respuesta:

$$d = \sqrt{\frac{kQ^2}{2mg}}$$

PR-1.21. *Cargas en las esquinas de un cubo*

Ocho cargas de igual magnitud, Q están localizadas en las esquinas de un cubo de lados a. Determine la fuerza neta (módulo y dirección) ejercida sobre cada carga.



Solución: Todas las cargas son de igual magnitud y signo. Considerando la carga Q_0 ubicada en el origen de coordenadas, las fuerzas repulsivas de las otras cargas totalizan una fuerza neta:

$$\sum \bar{F}_i = \sum \left(-k\frac{Q^2}{r_i^2}\hat{r}_i\right) = -kQ^2 \sum \frac{\bar{r}_i}{r_i^3}$$

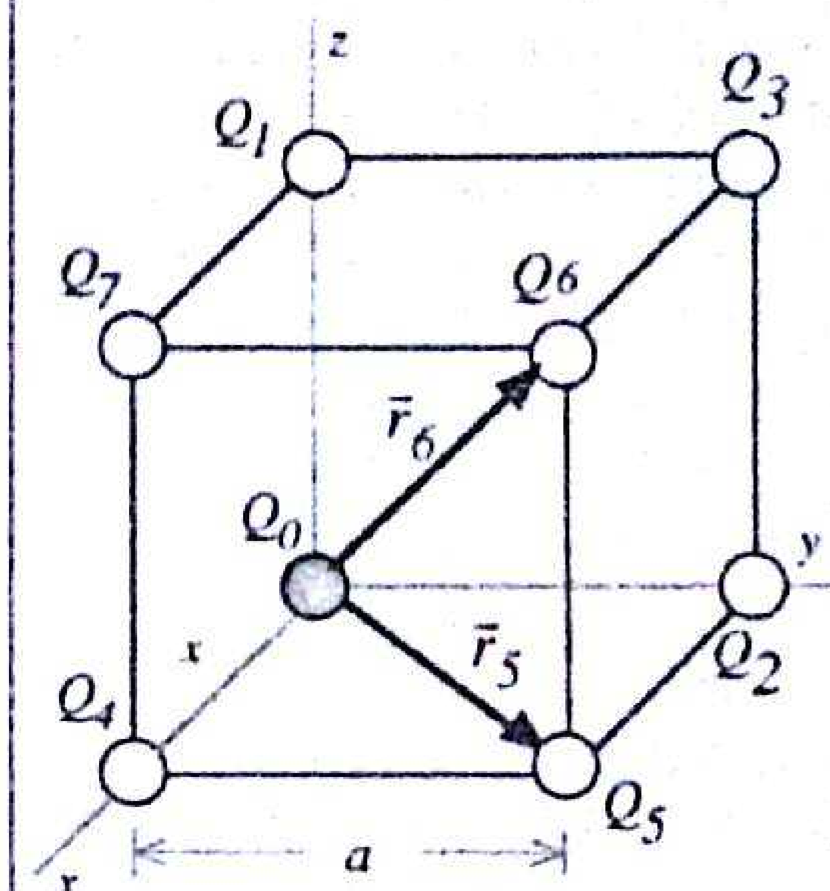
Donde $\bar{F}_i$ es la fuerza sobre la carga Q_0 ejercida por la carga Q_i. Los vectores posición $\bar{r}_i$ de cada carga son:

$\bar{r}_1 = a\hat{z}, \quad r_1 = a \qquad \bar{r}_3 = a\hat{z} + a\hat{y}, \quad r_3 = \sqrt{2}a$

$\bar{r}_2 = a\hat{y}, \quad r_2 = a \qquad \bar{r}_5 = a\hat{x} + a\hat{y}, \quad r_5 = \sqrt{2}a$

$\bar{r}_4 = a\hat{x}, \quad r_4 = a \qquad \bar{r}_7 = a\hat{z} + a\hat{x}, \quad r_7 = \sqrt{2}a$

$\bar{r}_6 = a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}, \quad r_6 = \sqrt{3}a$



La fuerza neta sobre la carga es entonces:

$$\sum \bar{F}_i = -kQ^2 \sum \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} = -k\frac{Q^2}{a^3}[(a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z})$$
$$+ \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y}) + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z}) + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{z} + \hat{x})$$
$$\frac{a}{3\sqrt{3}}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})]$$

Agrupando términos:

$$\sum \bar{F}_i = -k\frac{Q^2}{a^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

$$\sum \bar{F}_i = -1{,}9\frac{kQ^2}{a^2}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Como: $|\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}| = \sqrt{3}$ podemos concluir que la magnitud de la fuerza neta sobre cada carga es:

$$|\bar{F}| = 3{,}29\frac{kQ^2}{a^2}$$

y su dirección es a lo largo de la diagonal del cuerpo del cubo y apuntando hacia afuera del mismo. El vector $\bar{F}$ forma igual ángulo de inclinación respecto a cada uno de los ejes:

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54{,}7°$$

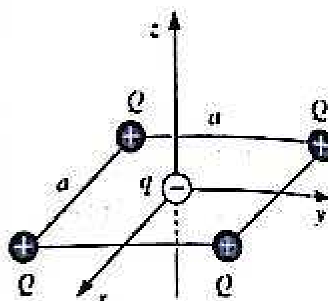
Respuesta:

Módulo: $|\bar{F}| = 3{,}29\frac{kQ^2}{a^2}$

Dirección: En la diagonal del cuerpo del cubo y hacia afuera.

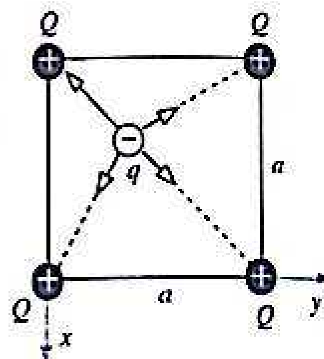
PR-1.22. *Oscilaciones armónicas de una carga*

Cuatro cargas idénticas de valor $+Q$ están fijas en las esquinas de un cuadrado de lados a. Se coloca una cuarta carga negativa, $-q$, en equilibrio en el centro del cuadrado.
a) ¿Será estable el punto de equilibrio respecto al movimiento de la carga $-q$ en el plano del cuadrado?
b) ¿Será estable el punto de equilibrio respecto al movimiento de la carga $-q$ en dirección perpendicular al plano del cuadrado?
c) Si la carga $-q$ es desplazada una distancia z en la línea perpendicular al plano del cuadrado. ¿Cuál es la fuerza restauradora sobre $-q$?
d) Suponga que el desplazamiento de la carga $-q$ es pequeño ($z << a$). ¿cuál es el período de sus oscilaciones?



Solución: a) Suponga que la carga $-q$ es desplazada en el plano x-y hacia una de las cargas $+Q$, la fuerza atractiva hacia esta carga aumentará, y hacia la carga de la esquina opuesta disminuirá (fig. a). La fuerza neta a lo largo de esa diagonal, tenderá a alejar la carga $-q$ del centro y el equilibrio en esa dirección será *inestable*.

b) Si la carga $-q$ es ligeramente desplazada en dirección perpendicular al plano, cada una de las fuerzas atractivas de las cargas $+Q$ tendrán una componente que apunta hacia el centro del cuadrado (fig. c). La fuerza neta tiende a restituir el equilibrio y en este caso el equilibrio será *estable*.



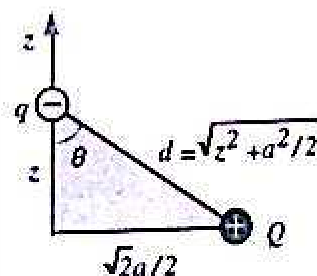
(Fig. a)

c) La distancia de cada esquina al centro del cuadrado es:

$$\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Según la Fig. b, la distancia de cada carga $+Q$ a la carga $-q$ es:

$$d = \sqrt{z^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2} = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}$$



(Fig. b)

La fuerza que ejerce cada carga positiva tiene magnitud:

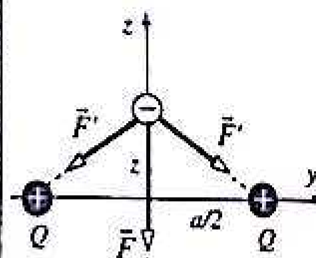
$$F' = k\frac{qQ}{d^2}$$

y su proyección sobre el eje vertical es:

$$F'_z = k\frac{qQ}{d^2}\cos\theta = k\frac{qQ}{d^2}(\frac{z}{d}) = \frac{kqQz}{(z^2 + a^2/2)^{3/2}}$$

Debido a la simetría, las componentes x e y de las fuerzas de las cuatro cargas $+Q$, se cancelan y por lo tanto, la fuerza neta sobre la carga $-q$ es:

$$\vec{F} = \frac{4kqQz}{(z^2 + a^2/2)^{3/2}}(-\hat{z})$$



(Fig. c)

d) En el caso de pequeños desplazamientos, z es despreciable frente a la distancia a, y aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$F = -\frac{4(2)^{3/2}kqQ}{a^3}z = ma_z$$

La aceleración resultante tiene sentido opuesto al desplazamiento y es proporcional a éste ($a_z = -\omega^2 z$). Por consiguiente, el movimiento es del tipo armónico simple con una frecuencia angular:

$$\omega^2 = \frac{2^{7/2}kqQ}{ma^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

y el período correspondiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2^{3/4}}\sqrt{\frac{ma^3}{kqQ}}$$

Respuesta:

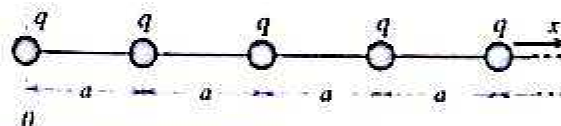
c) $\vec{F} = \frac{4kqQz}{(z^2 + \frac{a^2}{2})^{3/2}}(-\hat{z})$

d) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2^{3/4}}\sqrt{\frac{ma^3}{kqQ}}$

PR-1.23. *Cadena lineal de partículas cargadas*

Un número infinito de partículas con cargas idénticas, q, están colocadas a lo largo de una línea recta, con una separación a entre cargas.

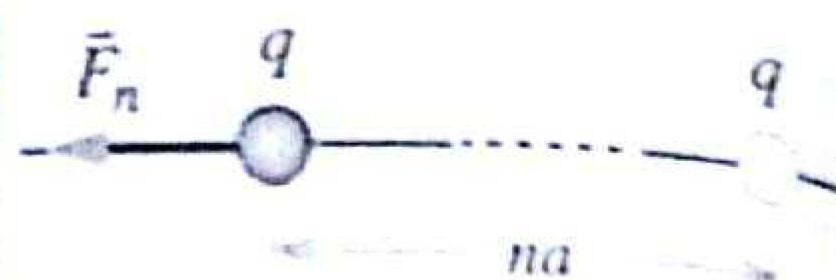
Calcule la fuerza que se ejerce sobre la carga q, que está en el origen de coordenadas.



Solución: Una carga que está a distancia $r_n = na$ del origen ejerce sobre la carga q una fuerza repulsiva:

$$\vec{F}_n = k\frac{qq}{r_n^2}(-\hat{x}) = k\frac{q^2}{(na)^2}(-\hat{x})$$

Todas las fuerzas ejercidas por las diferentes cargas de la distribución apuntan en la dirección $(-x)$ y la fuerza resultante es la suma:



$$\vec{F} = (-\hat{x})kq^2[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(3a)^2} + ...] = (-\hat{x})\frac{kq^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Esta serie es convergente y su valor es (ver *Mathematical Handbook, Schaum's series*, p 108):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Por consiguiente, y pesar de que tenemos infinitas cargas, la fuerza neta tiene un valor finito:

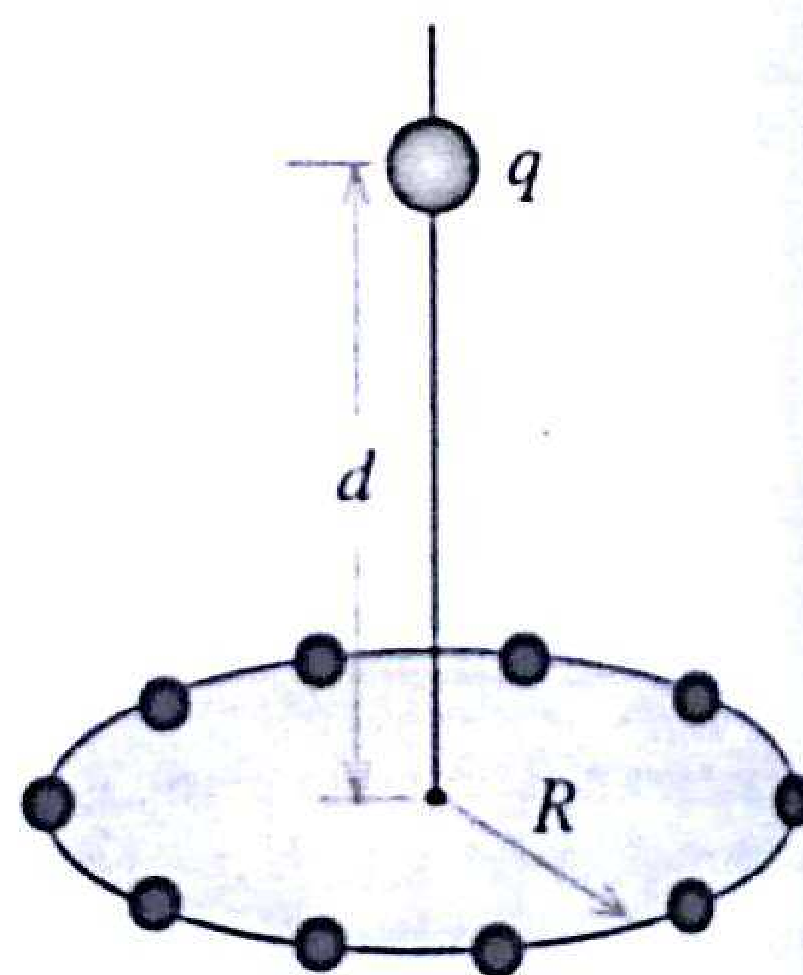
$$\vec{F} = -\frac{\pi^2 kq^2}{6a^2}\hat{x}$$

Respuesta:

$$\vec{F} = -\frac{\pi^2 kq^2}{6a^2}\hat{x}$$

PR-1.24. *No importa cuál es el número de partículas*

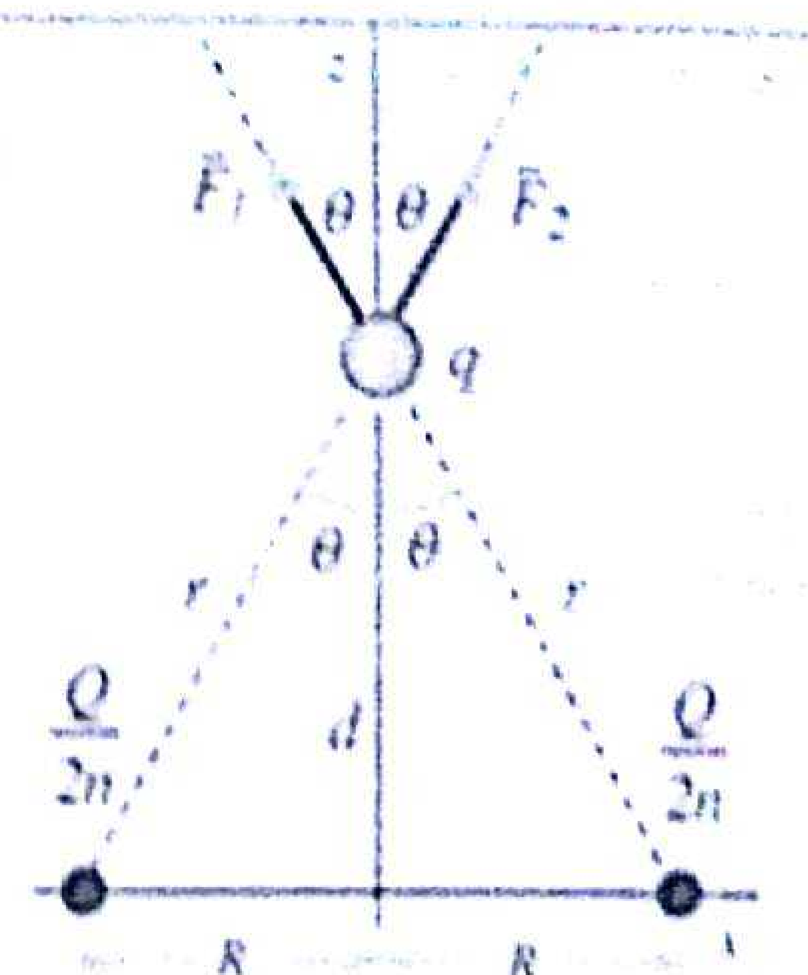
Una carga total Q ha de dividirse en $2n$ partículas que se colocan a igual separación en una circunferencia de radio R. Una carga puntual q se coloca a una distancia d del plano del círculo y en el eje perpendicular de simetría. Determine la fuerza ejercida sobre la carga q y demuestre que el resultado es el mismo para cualquier valor de n (= 1,2,3,...).



Solución: Consideremos un par de cargas cualquiera de magnitud $Q/2n$, ubicadas diametralmente opuestas. Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que ejercen sobre la carga q, son de igual magnitud y forman el mismo ángulo θ con el eje z. Las componentes de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ perpendiculares al eje z se cancelan y la resultante es la suma de sus proyecciones sobre el eje z:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2F_1\cos\theta\hat{z} = 2(k\frac{q(Q/2n)}{r^2})\frac{d}{r}\hat{z}$$

$$\vec{F} = 2k\frac{q(Q/2n)d}{(d^2+R^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{1}{n}\frac{kqQd}{(d^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$



Si sumamos las fuerzas debidas a todos los n pares de cargas, obtenemos la fuerza resultante sobre q:

$$\vec{F}_{total} = n\vec{F} = n[\frac{1}{n}\frac{kqQd}{(d^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}] = \frac{kqQd}{(d^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

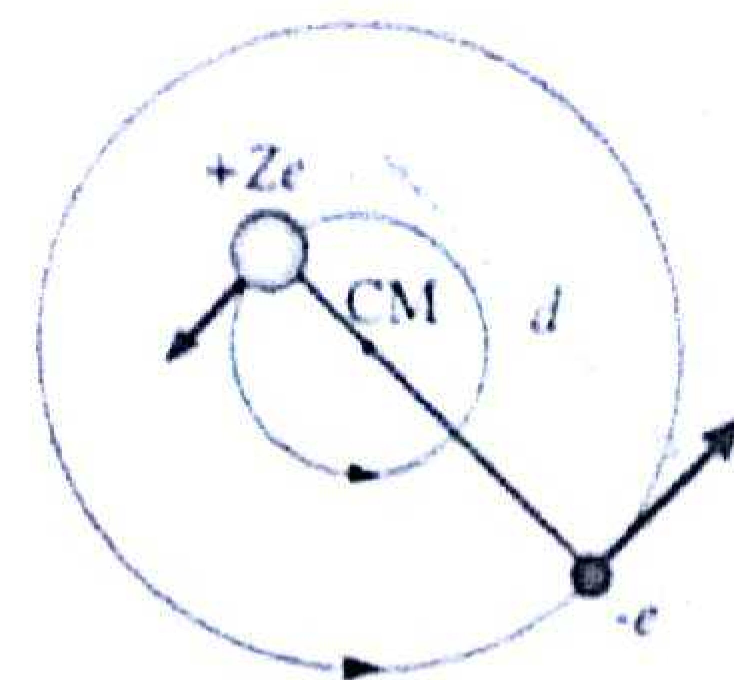
Queda demostrado que la fuerza resultante no depende del valor de n y por consiguiente, da lo mismo que la carga se distribuya en forma discreta (n = 1,2,3,...) o en forma continua (en un aro con $n \to \infty$).

Respuesta:

$$\vec{F}_{total} = \frac{kqQd}{(d^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

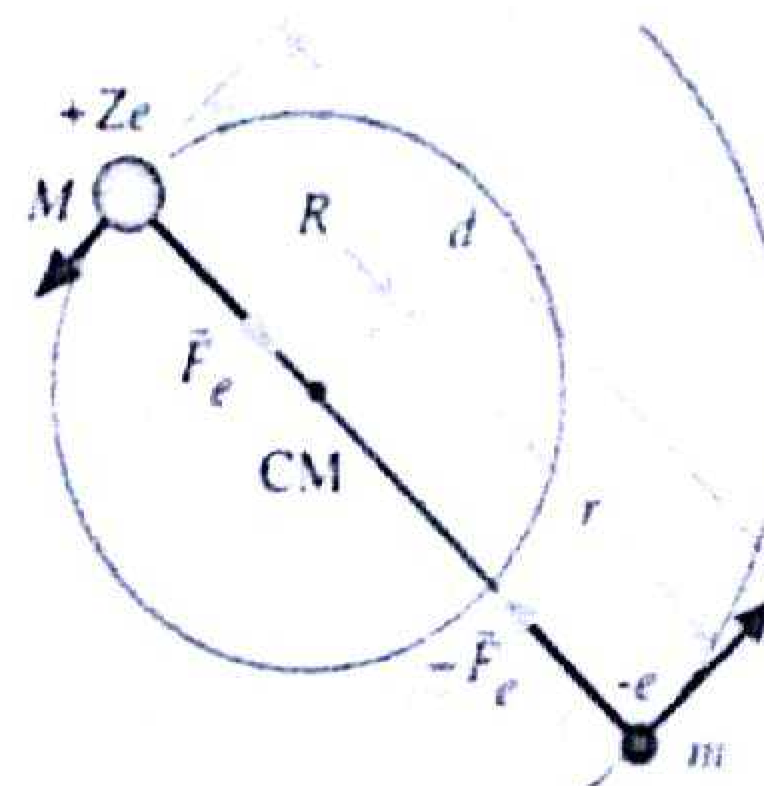
PR-1.25 *Atomo de un electrón*

Un cierto átomo ionizado consiste de un electrón de masa m y carga $-e$ que gira alrededor de un núcleo de masa M y carga $+Ze$, siendo Z el número atómico. Ambas partículas giran a una distancia fija d, en órbitas circulares alrededor del centro de masas CM. Determine la velocidad angular común del electrón y del núcleo.



Solución: Las fuerzas de atracción electrostática sobre el núcleo de masa M y sobre el electrón de masa m, son opuestas y de igual módulo. Estas fuerzas proporcionan una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro de masa (CM). El núcleo se mueve en una circunferencia de radio R y el electrón se mueve en una circunferencia de radio r. Aplicando la segunda ley de Newton tanto al núcleo como al electrón:

$$F_e = M\omega^2 R \qquad F_e = m\omega^2 r$$



Siendo ω la velocidad angular común de rotación. Igualando estas dos expresiones:

$$M\omega^2 R = m\omega^2 r \qquad \Rightarrow \qquad MR = mr$$

Tomando en cuenta que: $(r + R) = d$, las distancias al CM son, respectivamente:

$$R = (\frac{m}{M+m})d, \qquad r = (\frac{M}{M+m})d$$

Sustituyendo la fuerza de Coulomb en la segunda ley de Newton:

$$F_e = M\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad k\frac{e(Ze)}{d^2} = M\omega^2(\frac{m}{M+m})d$$

Despejando, se obtiene la frecuencia angular de rotación:

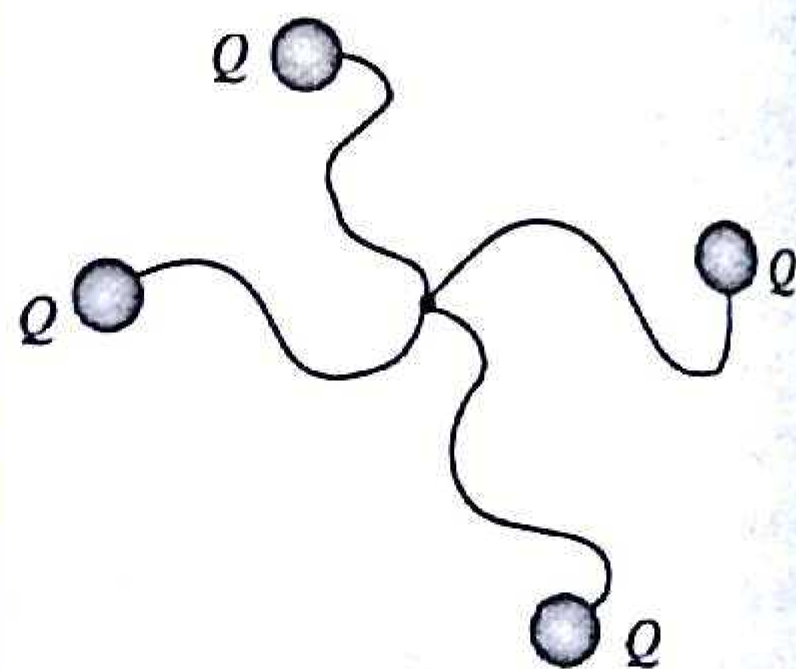
$$\omega^2 = \frac{kZe^2(M+m)}{d^3 Mm} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{kZe^2(M+m)}{d^3 Mm}}$$

Respuesta:

$$\omega = \sqrt{\frac{kZe^2(M+m)}{d^3 Mm}}$$

PR-1.26. *La repulsión provoca una situación tensa*

Cuatro esferitas idénticas están atadas mediante hilos aislantes e inextensibles de igual longitud, L, los cuales se unen a un punto común, como indica la figura. Se coloca el sistema sobre una superficie horizontal sin rozamiento y a continuación se le comunica igual carga, $+Q$ a cada esferita. ¿Cual será la tensión a que quedará sometido cada hilo?



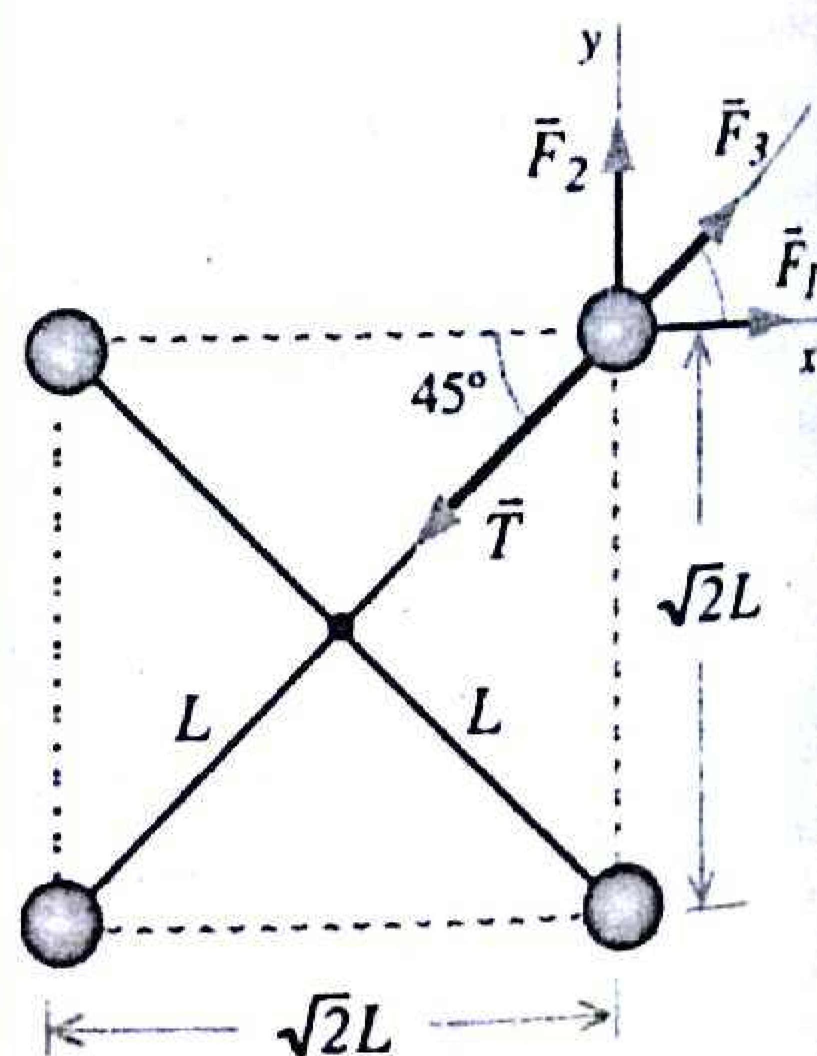
Solución: La repulsión electrostática entre las cargas provoca que tiendan a separarse, tanto como les sea posible. Las cuerda se tensan y, debido a la simetría de la situación, se alcanza el equilibrio cuando las cargas quedan ubicadas en los vértices de un cuadrado de lados $\sqrt{2}L$. Sobre cada carga actúan las fuerzas de repulsión ejercidas por las otras tres cargas, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$ y la tensión $\bar{T}$ del hilo. La condición de equilibrio es:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{T} = 0$$

En la dirección horizontal:

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \cos 45° - T\cos 45° = 0$$

Sustituyendo las fuerzas electrostáticas de Coulomb:



$$\frac{kQ^2}{(\sqrt{2}L)^2} + \frac{kQ^2}{(2L)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Despejando, se obtiene el módulo de la tensión de cada cuerda:

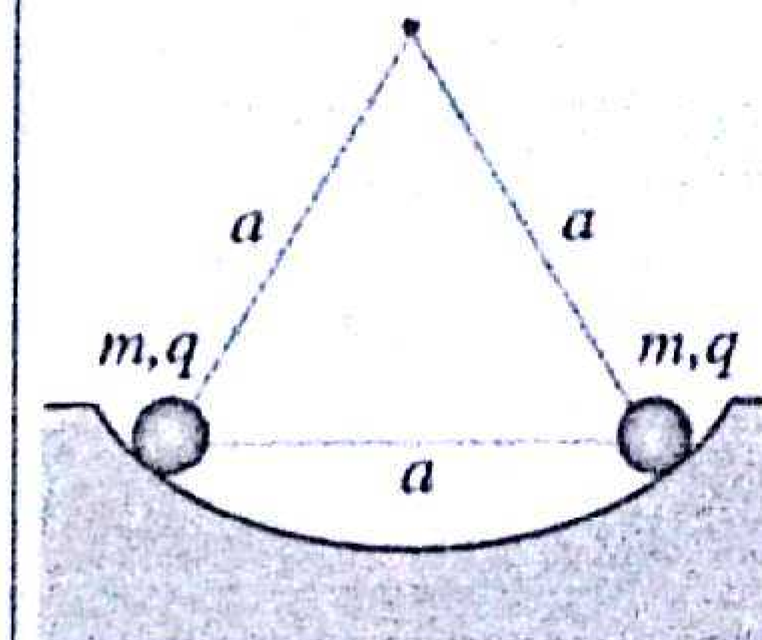
$$T = \frac{kQ^2}{L^2}(\frac{2\sqrt{2}+1}{4})$$

Respuesta:

$$T = \frac{kQ^2}{L^2}(\frac{2\sqrt{2}+1}{4})$$

PR-1.27. *Dos cargas que se repelen en un tazón*

Dos esferitas idénticas de masa m y carga q se colocan en el fondo de un tazón esférico de radio a, que tiene paredes no conductoras y sin rozamiento. Las esferitas se repelen y se ubican en posiciones de equilibrio separadas por una distancia a. Determine la carga de cada esferita.



Solución: Las fuerzas aplicadas sobre cada esferita son: el peso $m\bar{g}$, la fuerza electrostática $\bar{F}_e$ y la fuerza de contacto normal $\bar{N}$ de la superficie del tazón. Las condiciones de equilibrio son:

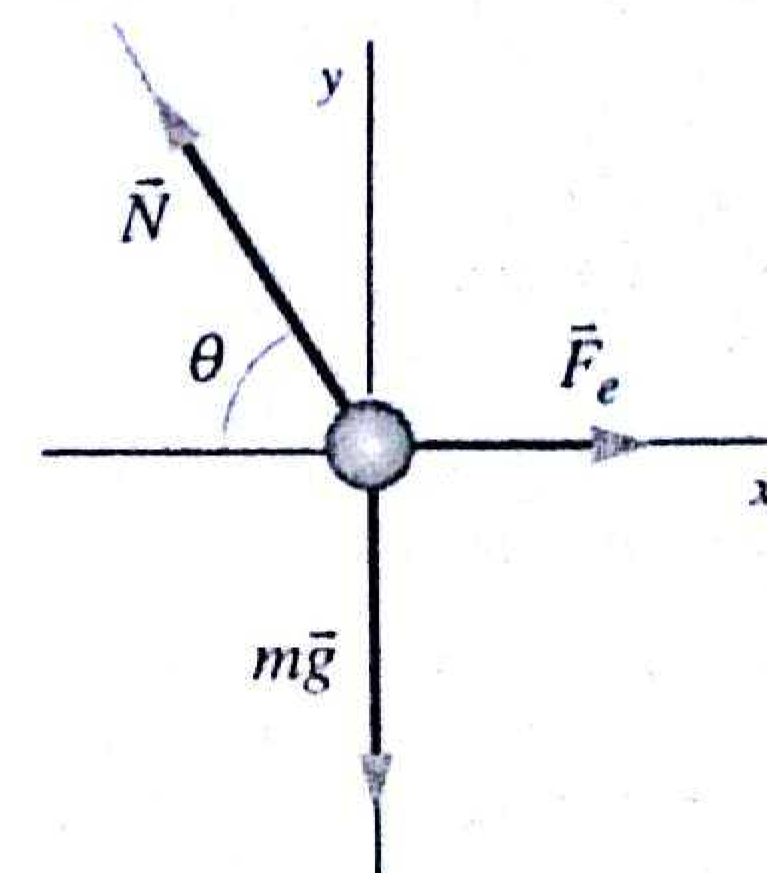
$$\sum F_x = F_e - N\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e = N\cos\theta$$

$$\sum F_y = N sen\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = N sen\theta$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$F_e = mg(\frac{\cos\theta}{sen\theta}) = \frac{mg}{tg\theta} = k\frac{q^2}{a^2}$$

$$q = a\sqrt{\frac{mg}{ktg\theta}} = a\sqrt{\frac{mg}{ktg60°}}$$

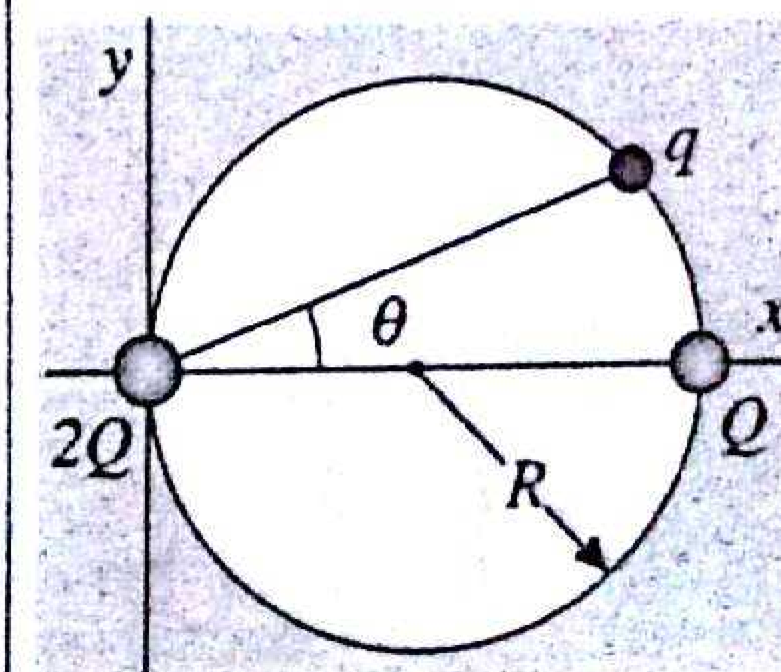


Respuesta:

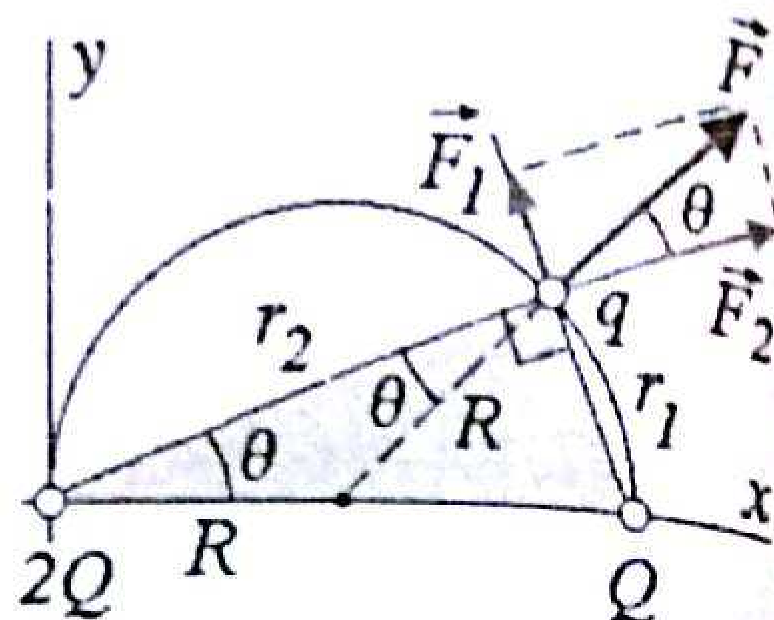
$$q = a\sqrt{\frac{mg}{ktg60°}}$$

PR-1.28. *Partícula en equilibrio en un riel circular*

Una partícula con carga positiva q, está libre de moverse sobre un riel circular de radio R y sin fricción. En los extremos diametralmente opuestos del riel están fijas dos cargas positivas Q y $2Q$. Determine el ángulo de orientación θ para la posición de equilibrio de la partícula q.



Solución: En la posición de equilibrio, la fuerza resultante sobre q no debe tener componente tangencial a lo largo de la pista. La fuerza resultante, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, debe tener dirección radial. El ángulo θ entre $\vec{F}$ y $\vec{F}_2$ viene dado por:



$$tg\theta = \frac{F_1}{F_2} = \frac{kQq/r_1^2}{k2Qq/r_2^2} = \frac{1}{2}(\frac{r_2}{r_1})^2$$

Además, las tres a cargas están ubicadas en las esquinas de un triángulo inscrito en el círculo que es un triángulo rectángulo. Considerando la construcción geométrica mostrada en la figura, podemos escribir otra expresión para el ángulo θ:

$$tg\theta = \frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}(\frac{r_2}{r_1})^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2^{1/3}}$$

$$tg\theta = \frac{1}{2^{1/3}} = 0{,}793 \quad \Rightarrow \quad \theta = 38{,}4°$$

Respuesta:

$\theta = 38{,}4°$

PR-1.29. *Distribuciones continuas de cargas*

Determine la carga total de los siguientes sistemas:

a) Una línea recta de extensión infinita con una *densidad lineal* de carga $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = \frac{\lambda_0}{1+(x/a)^2}$$

b) Una nube electrónica alrededor de un núcleo con carga positiva $+q$, con una *densidad volumétrica* de carga $\rho(r)$: Este es un modelo del átomo de hidrógeno y la constante a se llama el radio de Bohr.

$$\rho(r) = -\frac{q}{\pi a^3}e^{-2r/a}$$

Solución: a) Para la distribución lineal, la carga total es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0 dx}{1+(x/a)^2} = a\lambda_0 arctg\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$Q = a\lambda_0[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = a\lambda_0\pi$$

b) Para la distribución volumétrica:

$$\rho(r)dV = -\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{q}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}} r^2 sen\theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = -(\frac{q}{\pi a^3})(2)(2\pi)\int_{r=0}^{\infty} e^{-2r/a} r^2 dr$$

Esta integral es del tipo (Tables of Integrals Dwight, p.134).

$$\int x^2 e^{bx}dx = e^{bx}[\frac{x^2}{b} - \frac{2x}{b^2} + \frac{2}{b^3}]$$

Por lo tanto:

$$Q = -(\frac{4q}{a^3})(-\frac{a}{2})e^{-2r/a}[r^2 + ar + \frac{a^2}{2})]\Big|_{r=0}^{r=\infty} = -q$$

Es decir, la carga de la nube electrónica es igual y opuesta a la del núcleo, de modo que el átomo es neutro.

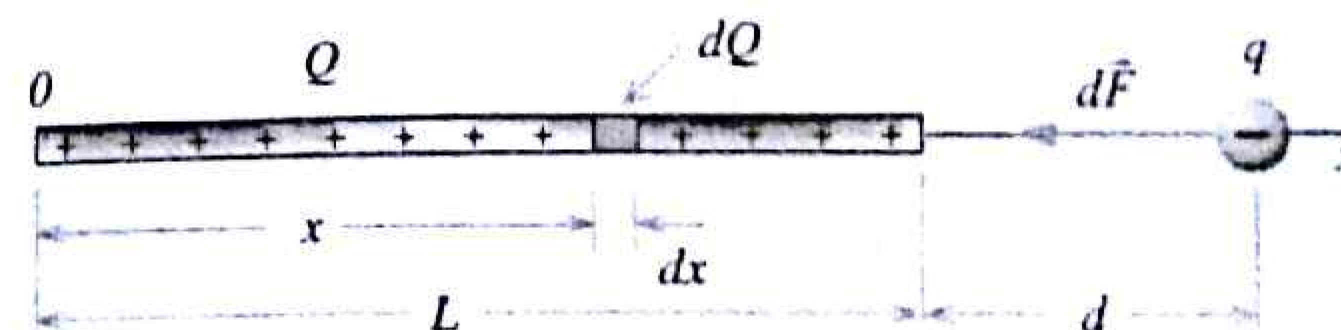
Respuesta:

a) $Q = a\lambda_0\pi$
b) $Q = -q$

PR-1.30. *Atracción entre una barra y una carga puntual*

Una barra delgada aislante de longitud L tiene una carga total positiva, $+Q$ distribuida uniformemente.

Determine la fuerza que ejerce la barra sobre una carga puntual $-q$ ubicada a una distancia d a la derecha.



Solución: Para poder aplicar la ley de Coulomb se divide la barra en elementos infinitesimales. Como la carga Q está distribuida uniformemente, un elemento de barra infinitesimal de longitud dx abarca una carga dQ:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{L} \quad \Rightarrow \quad dQ = (\frac{Q}{L})dx$$

Esta carga elemental ejerce una fuerza atractiva sobre la carga $-q$:

$$d\vec{F} = k\frac{qdQ}{r^2}(-\hat{x}) = \frac{kq(Q/L)dx}{(L+d-x)^2}(-\hat{x})$$

Todos los elementos de la barra producen una fuerza en la misma dirección $-x$, y la fuerza total debida a la barra es la suma (integral):

$$\bar{F} = \int d\bar{F} = (-\hat{x})\frac{kqQ}{L}\int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2}$$

$$\bar{F} = (-\hat{x})\frac{kqQ}{L}\frac{1}{(L+d-x)}\Big|_0^L = (-\hat{x})\frac{kqQ}{L}(\frac{1}{d}-\frac{1}{L+d})$$

$$\bar{F} = -\frac{kqQ}{d(L+d)}\hat{x}$$

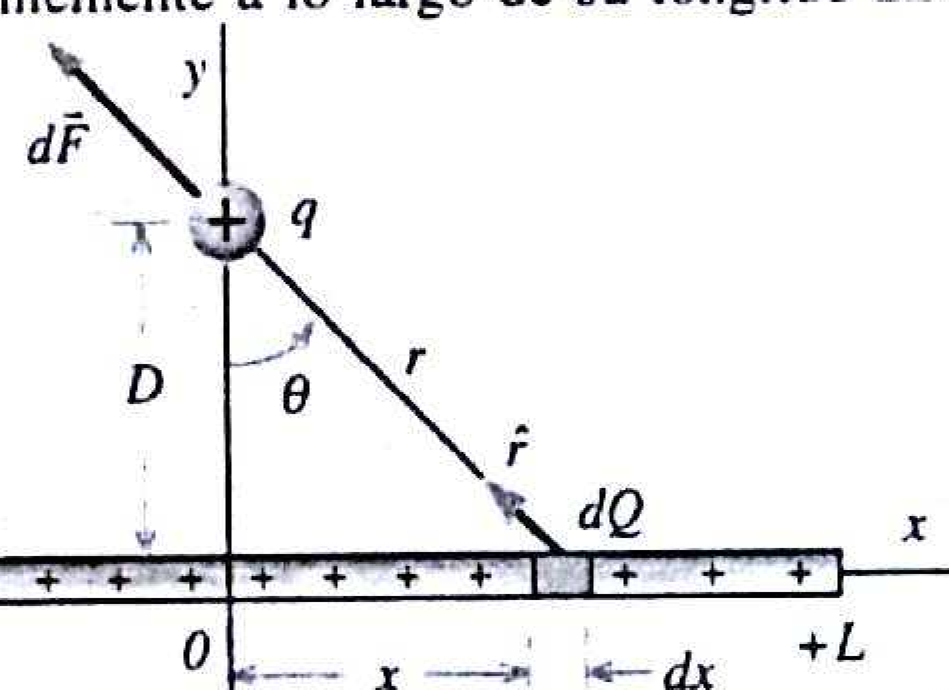
Note que para distancias grandes, $d >> L$, resulta: $F = kqQ/d^2$. Esta es la expresión para la fuerza entre dos cargas puntuales q y Q separadas por una distancia d.

Respuesta:

$$\bar{F} = -\frac{kqQ}{d(L+d)}\hat{x}$$

PR-1.31. *Carga puntual enfrente de una barra cargada*

Una barra delgada aislante tiene una carga positiva Q distribuida uniformemente a lo largo de su longitud $2L$.



Calcule la fuerza que ejerce la barra sobre una carga puntual situada en su eje bisector perpendicular y a una distancia D.

Solución: Al igual que en el problema anterior se divide la barra en elementos infinitesimales. Un elemento de barra infinitesimal de longitud dx abarca una carga dQ:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad dQ = (\frac{Q}{2L})dx$$

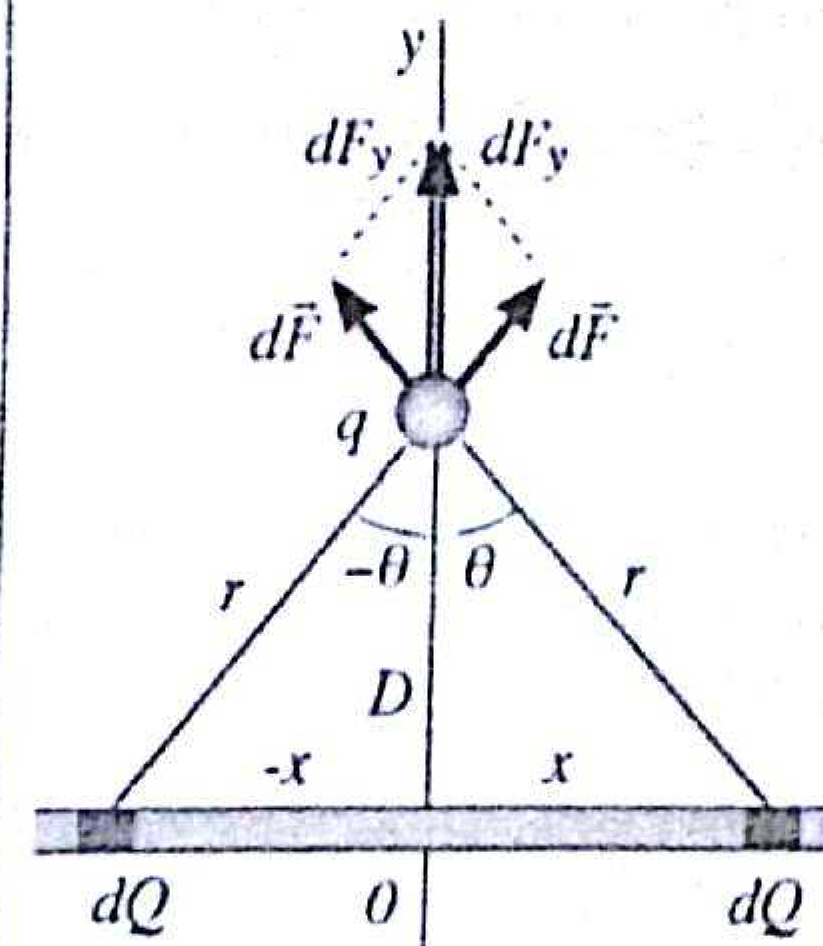
Esta carga elemental ejerce una fuerza sobre la carga q:

$$d\bar{F} = k\frac{qdQ}{r^2}\hat{r} = \frac{kqQ}{2L}\frac{dx}{r^2}\hat{r}$$

Notamos que, debido a la simetría de la situación, por cada dQ ubicado del lado derecho de la barra habrá un dQ similar en el lado izquierdo y cuando sumamos las dos fuerzas, se cancelan las componentes horizontales dF_x. De modo que, para hallar la fuerza total ejercida por la barra, solo necesitamos sumar las componentes verticales.

$$F_y = \int dF\cos\theta = \int (\frac{kqQ}{2L}\frac{dx}{r^2})\cos\theta$$

Podemos resolver esta integral usando cualquiera de las tres variables: r, θ y x. Si escogemos el ángulo θ como única variable, podemos escribir:



$$r = D/\cos\theta$$

$$x = Dtg\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = D\sec^2\theta d\theta = \frac{D}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$F_y = \frac{kqQ}{2L}\int \frac{1}{(D/\cos\theta)^2}(\frac{D}{\cos^2\theta}d\theta)\cos\theta$$

$$F_y = \frac{kqQ}{2LD}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = 2\frac{kqQ}{2LD}\int_0^{\theta_0}\cos\theta d\theta$$

$$F_y = \frac{kqQ}{LD}sen\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{kqQ}{LD}sen\theta_0$$

Tomando en cuenta que $sen\theta_0 = L/\sqrt{L^2+D^2}$, se obtiene finalmente:

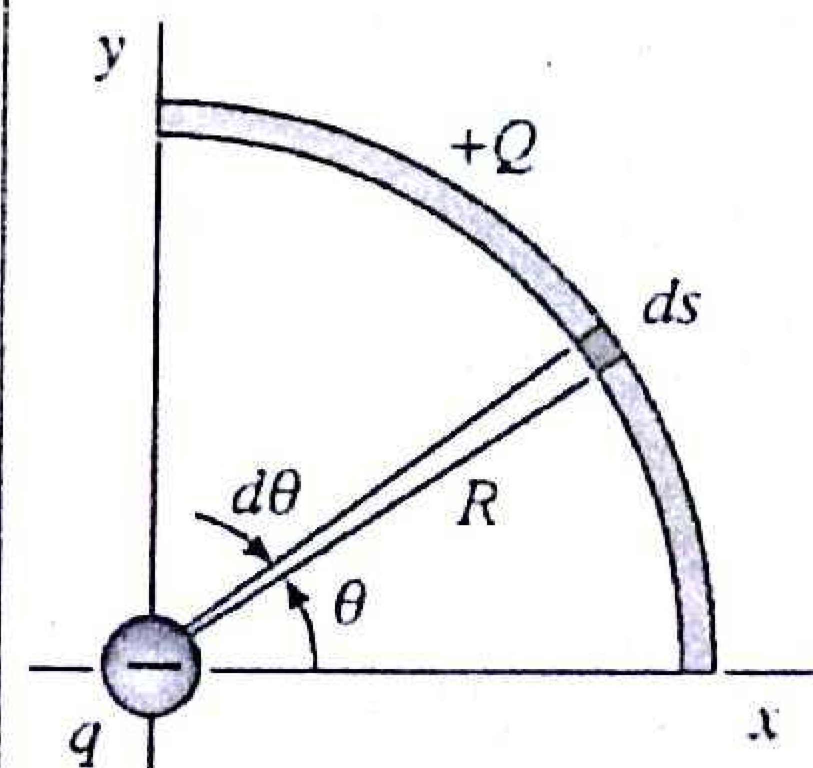
$$\bar{F} = \frac{kqQ}{D\sqrt{L^2+D^2}}\hat{y}$$

Respuesta:

$$\bar{F} = \frac{kqQ}{D\sqrt{L^2+D^2}}\hat{y}$$

PR-1.32. *Barra en arco cargada y una carga puntual*

Una barra aislante muy delgada, está doblada en forma de un cuarto de circunferencia de radio R, y tiene una carga total positiva, $+Q$ distribuida uniformemente. Determine la fuerza que ejerce la barra sobre una carga puntual $-q$ colocada en el centro del arco de círculo.



Solución: Consideremos en la barra un elemento infinitesimal ubicado a un ángulo θ respecto al eje $+x$, que abarca un arco de longitud $ds = Rd\theta$. Si λ representa la densidad lineal de carga (carga / longitud), este elemento tiene una carga infinitesimal dQ:

$$dQ = \lambda ds = (\frac{Q}{2\pi R/4})Rd\theta = (\frac{2}{\pi})Qd\theta$$

Esta carga elemental ejerce una fuerza sobre la carga q:

$$d\bar{F} = k\frac{qdQ}{r^2}\hat{r} = \frac{2kqQd\theta}{\pi R^2}\hat{r}$$

Podemos descomponer esta fuerza en sus componentes según las dos direcciones ortogonales. La componente x de la fuerza total es la integral:

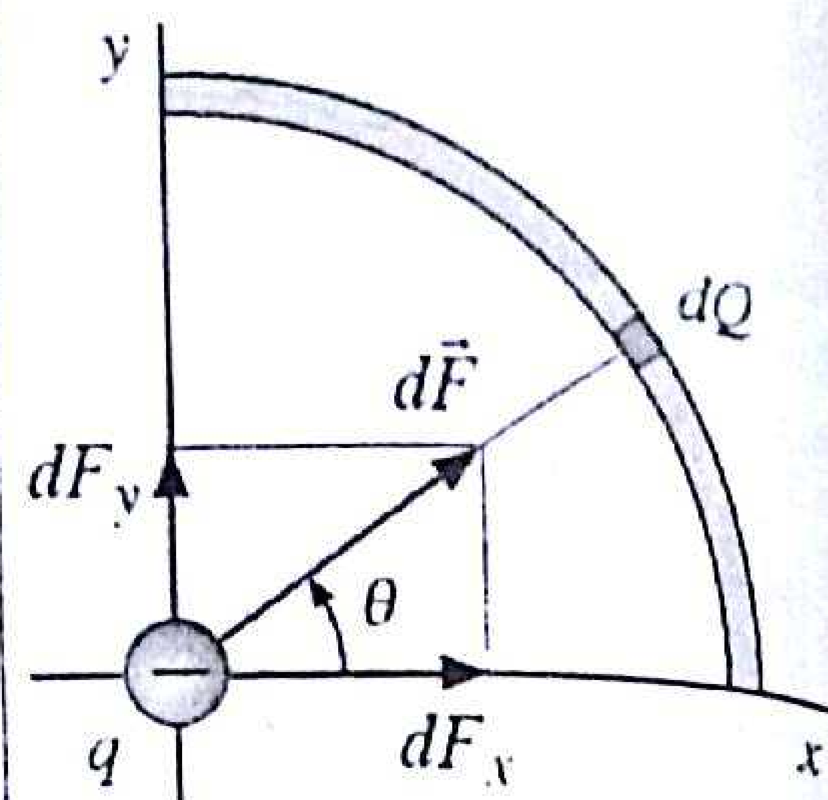
$$F_x = \int dF\cos\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{2kqQd\theta}{\pi R^2}\cos\theta$$

$$F_x = \frac{2kqQ}{\pi R^2}sen\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2kqQ}{\pi R^2}$$

Similarmente, para la componente y se obtiene:

$$F_y = \int dF sen\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{2kqQd\theta}{\pi R^2}sen\theta$$

$$F_y = -\frac{2kqQ}{\pi R^2}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2kqQ}{\pi R^2}$$



$$d\bar{F} = d\bar{F}_x + d\bar{F}_y$$

$$d\bar{F} = dF\cos\theta\hat{x} + dF sen\theta\hat{y}$$

Respuesta:

$$\bar{F} = \frac{2kqQ}{\pi R^2}(\hat{x} + \hat{y})$$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. ***Según la ley de conservación de la carga...***

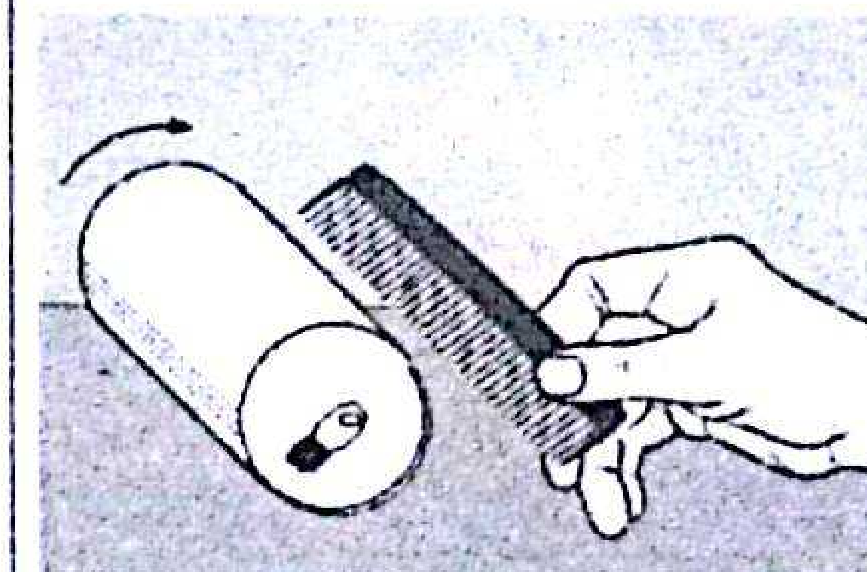
a) En un sistema dado no puede crearse o destruirse carga eléctrica alguna.
b) En un sistema la suma de las cargas positivas y la de las negativas deben permanecer constantes por separado.
c) Toda cantidad de carga eléctrica observable es siempre un número entero de veces la carga del electrón.
d) La suma algebraica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado permanece constante.

PE-1.02. ***Un aislador cargado y un conductor neutro...***

a) siempre se repelen.
b) siempre se atraen.
c) no ejercen fuerzas electrostáticas entre sí.
d) se atraen o se repelen, dependiendo del signo de la carga neta del aislador.
e) se atraen o se repelen, dependiendo del signo de los portadores de cargas libres del conductor.

PE-1.03. ***¿Qué tipo de carga tiene el peine?***

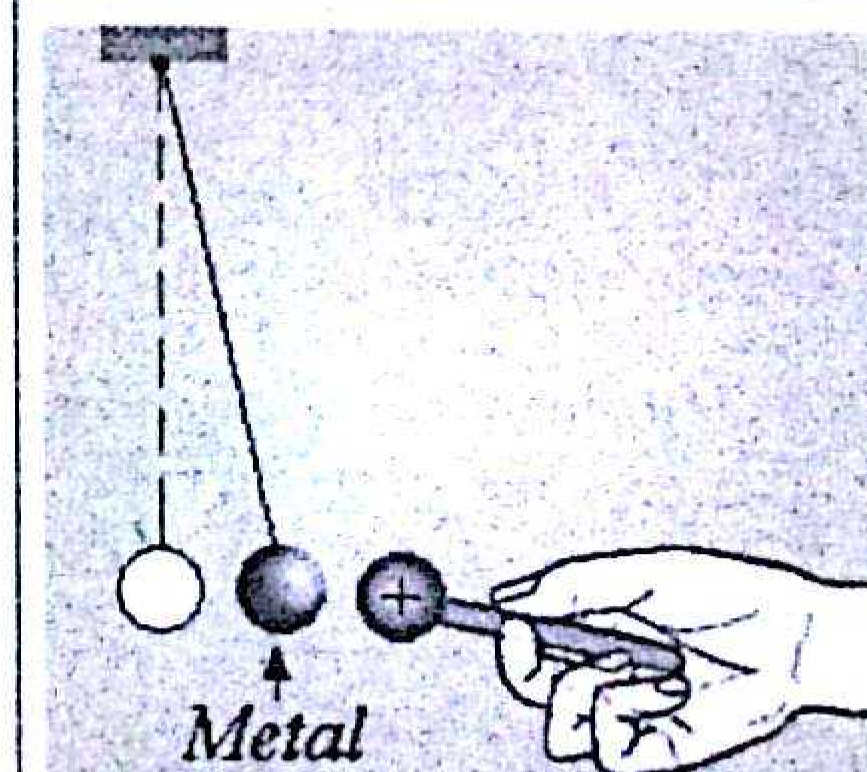
En una demostración de electrostática, se frota un peine plástico con el cabello y se coloca enfrente de una lata metálica de refresco vacía que reposa sobre una superficie horizontal. Se observa que la lata siempre rueda *atraída* por el peine. De esta observación podemos concluir que la carga neta del peine es…



a) positiva, b) negativa, c) positiva o negativa.

PE-1.04. ***¿Qué tipo de carga tiene la esferita metálica?***

Un objeto que tiene carga positiva *atrae* una esferita metálica que está suspendida por un hilo ligero. De esta observación podemos concluir que la carga neta de la esferita metálica es….



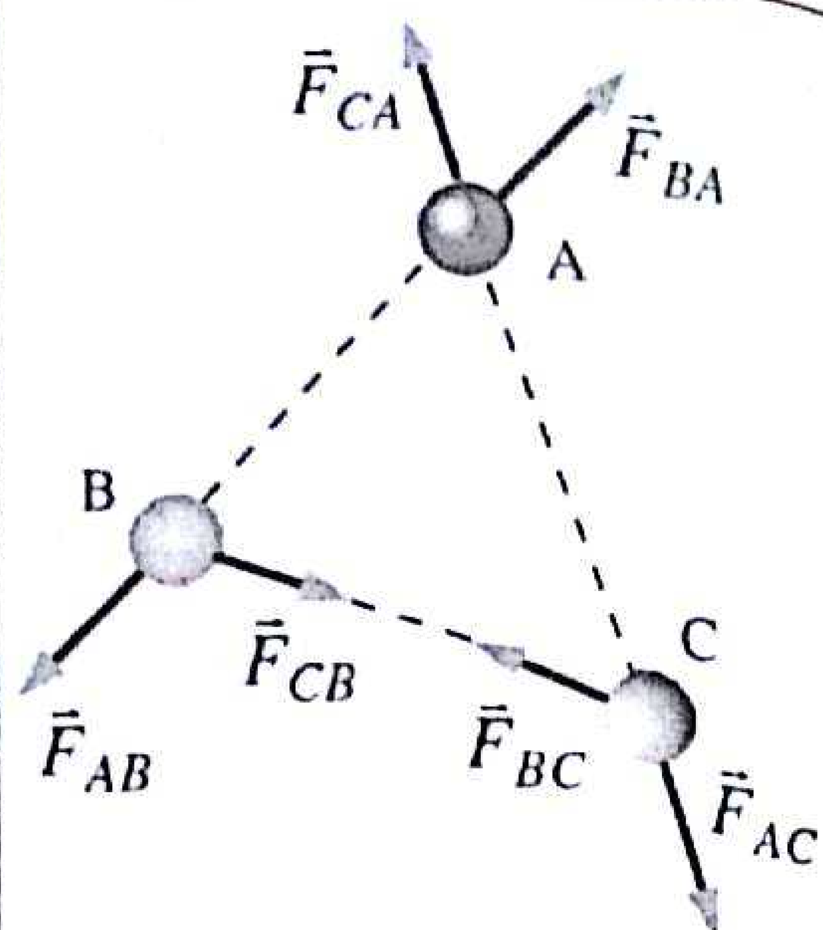
a) positiva, b) negativa, c) positiva o cero.

d) negativa o cero, e) positiva o negativa.

PE-1.05. *¿Cuál será este arreglo de cargas?*

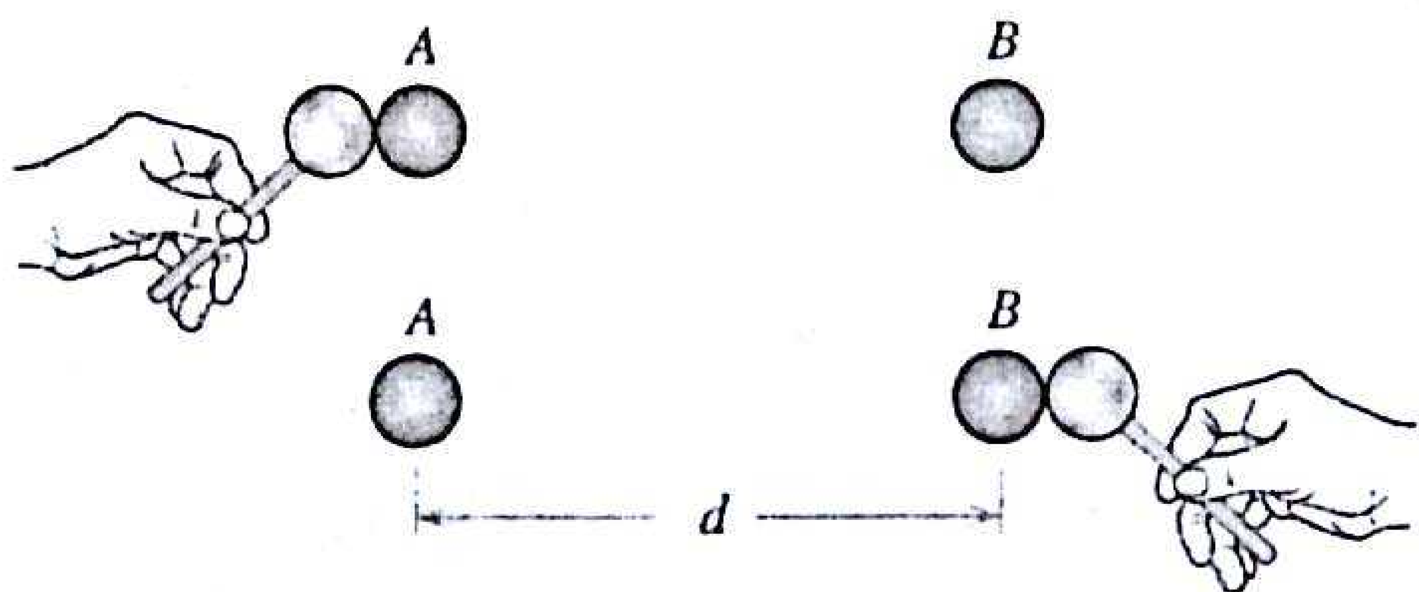
Un estudiante dibuja un diagrama de las fuerzas de interacción correspondiente a una posible distribución de tres cargas. De este diagrama podemos concluir que...

a) Dos de las cargas son positivas y la tercera es negativa.
b) Dos de las cargas son negativas y la tercera es positiva.
c) Las tres cargas son positivas.
d) Las tres cargas son negativas.
e) No existe ninguna combinación de tres cargas que corresponda a este diagrama.



PE-1.06. *¿Cuál será la nueva fuerza entre las esferitas?*

Dos esferitas conductoras idénticas *A* y *B* tienen cargas iguales y están separadas por una distancia fija *d*. La fuerza de repulsión electrostática entre *A* y *B* tiene un valor *F*. Con otra esferita metálica idéntica y neutra, provista de un mango aislante, se toca primero la esferita A, luego se toca la esferita B y finalmente se le retira.



¿Cuál será el valor de la nueva fuerza entre las esferitas A y B?

a) $F' = \frac{3}{8}F$ b) $F' = \frac{3}{4}F$

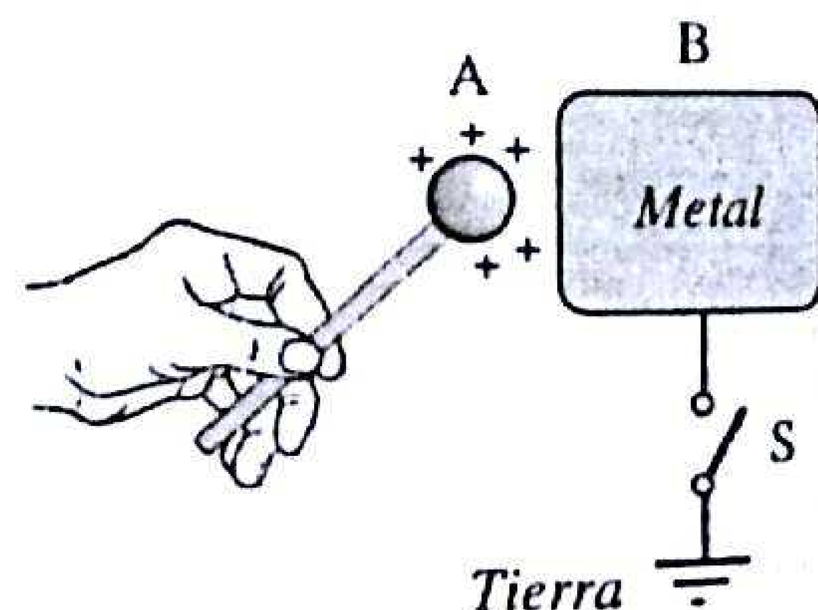
c) $F' = \frac{2}{3}F$ d) $F' = \frac{1}{2}F$

e) $F' = 0.$

PE-1.07. *Aterrizado y carga por inducción*

Un objeto A electrizado positivamente se aproxima sin tocar a un objeto metálico B, aislado y sin carga. Mientras el objeto cargado se mantiene cerca, con el interruptor S se procede a conectar el metal por un alambre a tierra*. ¿Con cuál de las operaciones siguientes, quedará el metal B cargado negativamente?

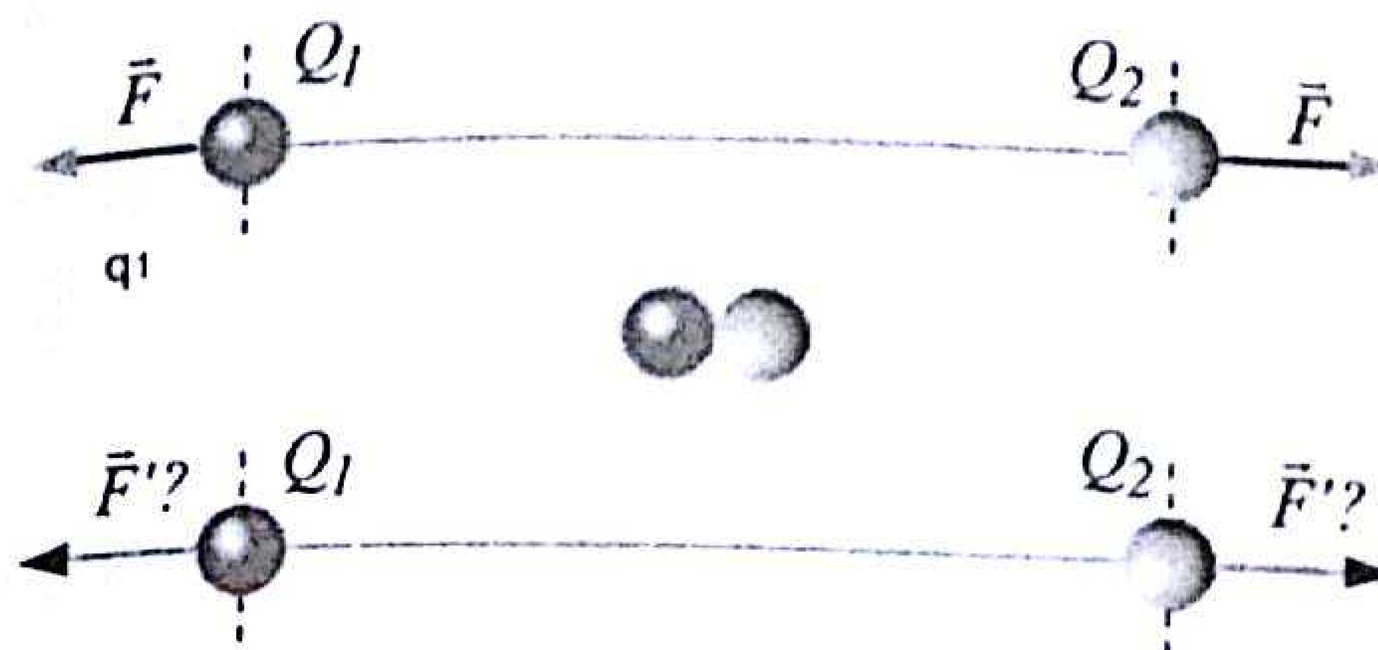
a) Primero se retira A y luego se desconecta la tierra.
b) Primero se desconecta la tierra y luego se retira A.
c) Con cualquiera de las operaciones (a) o (b).
d) Con ninguna de las dos operaciones (a) o (b).



(*) Llamamos tierra a cualquier conductor suficientemente grande que sirva como fuente o sumidero infinito de electrones.

PE-1.08. *¿Aumenta, disminuye o queda igual?*

Dos esferitas metálicas idénticas, con cargas de igual signo y diferentes magnitudes, Q_1 y Q_2 están a una cierta distancia.



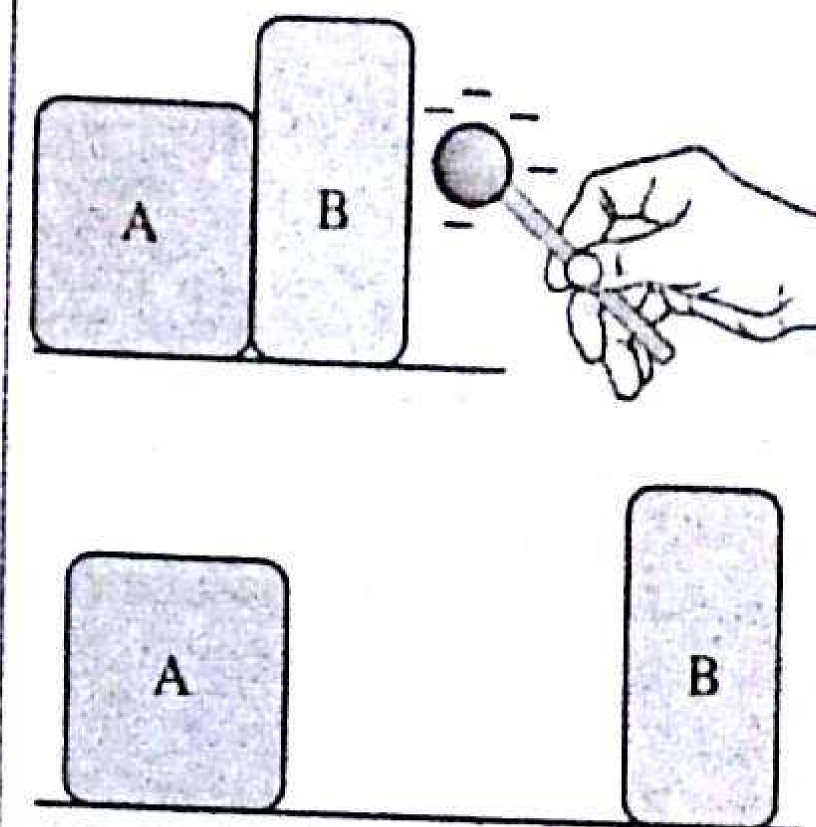
Las esferitas se repelen con una fuerza de magnitud *F*. Luego se ponen en contacto y se separan hasta la distancia inicial. Si comparamos el valor de la nueva fuerza de repulsión *F'*, con el valor de la inicial, entonces:

a) $F' = F$
b) $F' > F$
c) $F' < F$
d) No se puede predecir.

PE-1.09. *¿Con qué carga quedan los dos objetos?*

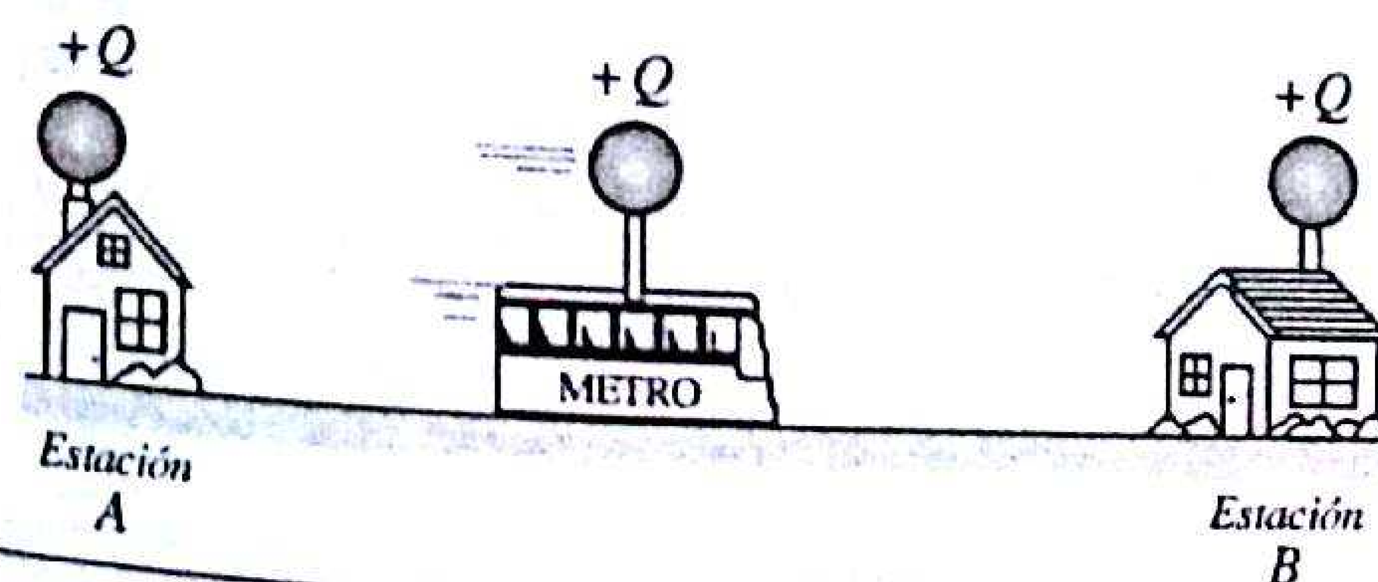
Dos objetos metálicos sin carga neta, A y B están en contacto sobre una superficie aislante. Se acerca a B un objeto con carga negativa, sin tocarlo. A continuación los objetos A y B se separan y posteriormente se retira el objeto cargado. Como resultado los objetos quedan:

a) ambos neutros.
b) ambos cargados positivamente.
c) ambos cargados negativamente.
d) A con carga positiva y B con carga negativa.
e) A con carga negativa y B con carga positiva.



PE-1.10. *Un tren electrostático.*

Un inventor propone un sistema de transporte en el cual los trenes tienen una carga eléctrica sobre el techo y viajarían en línea recta sobre rieles sin fricción impulsados por las fuerzas electrostáticas ejercidas por cargas iguales fijas en los techos de las estaciones.



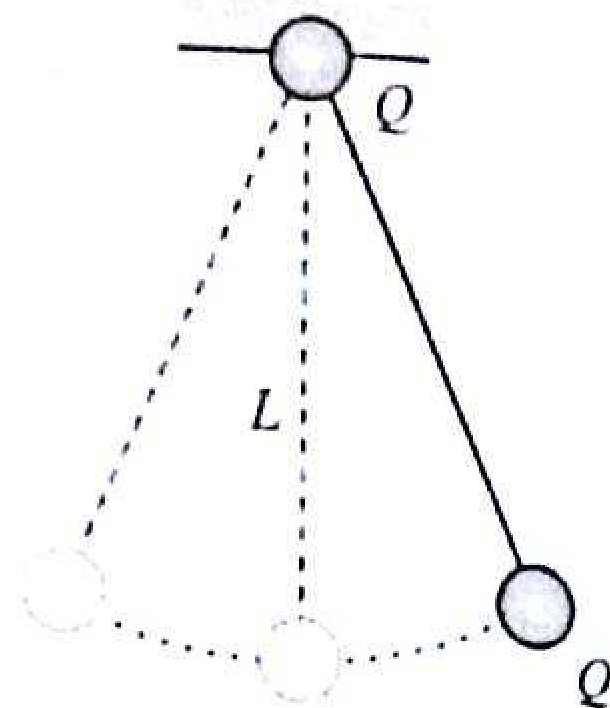
En la situación mostrada podemos afirmar que en un viaje desde la estación A hasta la estación B, la rapidez del tren:

a) primero aumenta y luego disminuye.
b) es constante.
c) primero disminuye y luego aumenta.
d) aumenta constantemente.
e) disminuye constantemente.

PE-1.11. *Un péndulo con interacción eléctrica*

Una esferita de masa m y carga Q está suspendida de un hilo ligero de longitud L. En el punto de suspensión del hilo se encuentra fija otra esferita con carga idéntica Q. Si apartamos la esferita suspendida de su posición vertical y la soltamos, el *período* de las oscilaciones será:

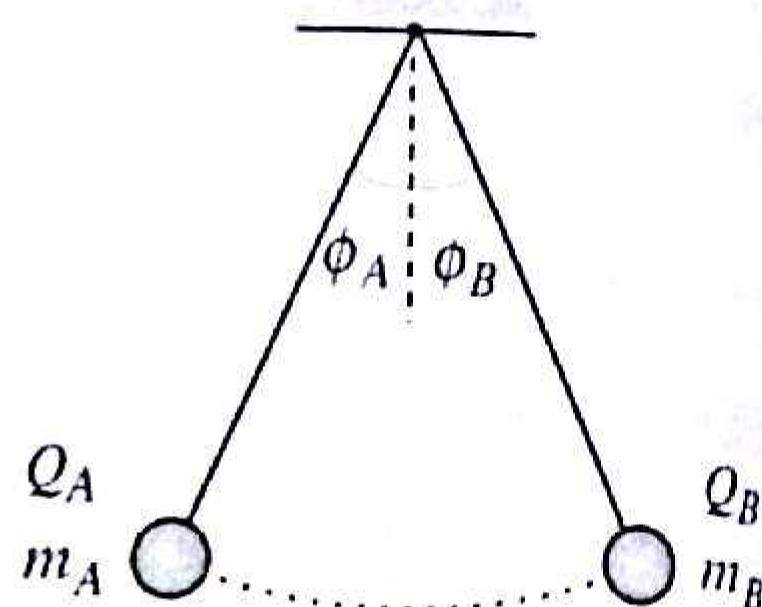
a) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, b) $T > 2\pi\sqrt{L/g}$
c) $T < 2\pi\sqrt{L/g}$, d) $T = 0$



PE-1.12. *Dos esferitas suspendidas a igual ángulo.*

Dos esferitas cargadas, A y B, están suspendidas de hilos de igual longitud. Si los ángulos de los hilos con la vertical son iguales ($\phi_A = \phi_B$), podemos concluir que:

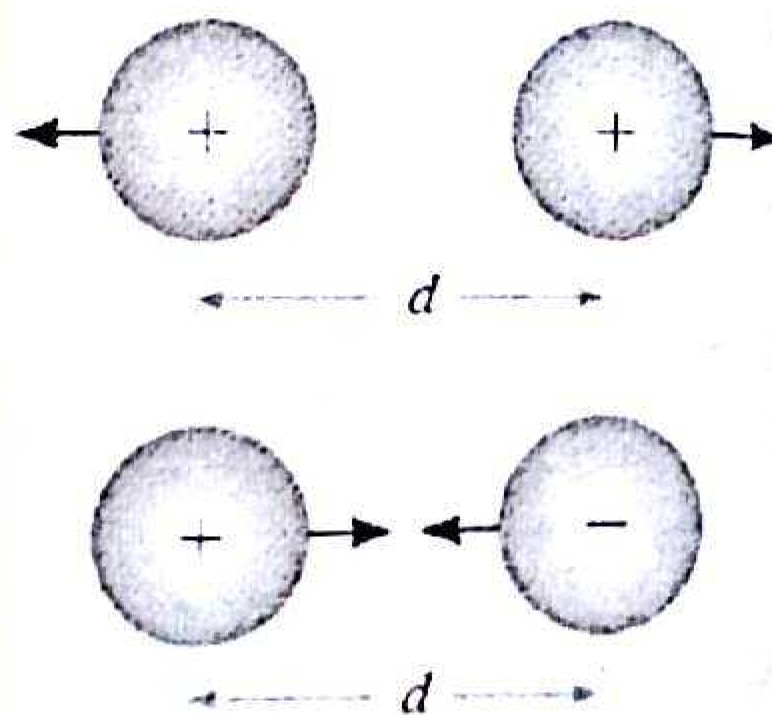
a) $Q_A = Q_B$. b) $m_A = m_B$
c) $m_A = m_B$ y $Q_A = Q_B$. d) $m_A > m_B$ y $Q_A < Q_B$
e) $m_A < m_B$ y $Q_A > Q_B$



PE-1.13. *Esferas repulsivas y esferas atractivas*

Dos esferas metálicas con cargas de igual magnitud son acercadas hasta una distancia pequeña d. En el primer caso las cargas son de igual signo y en el segundo caso las cargas son de signos opuestos. En cuál caso será mayor la magnitud de la fuerza eléctrica entre las dos esferas.

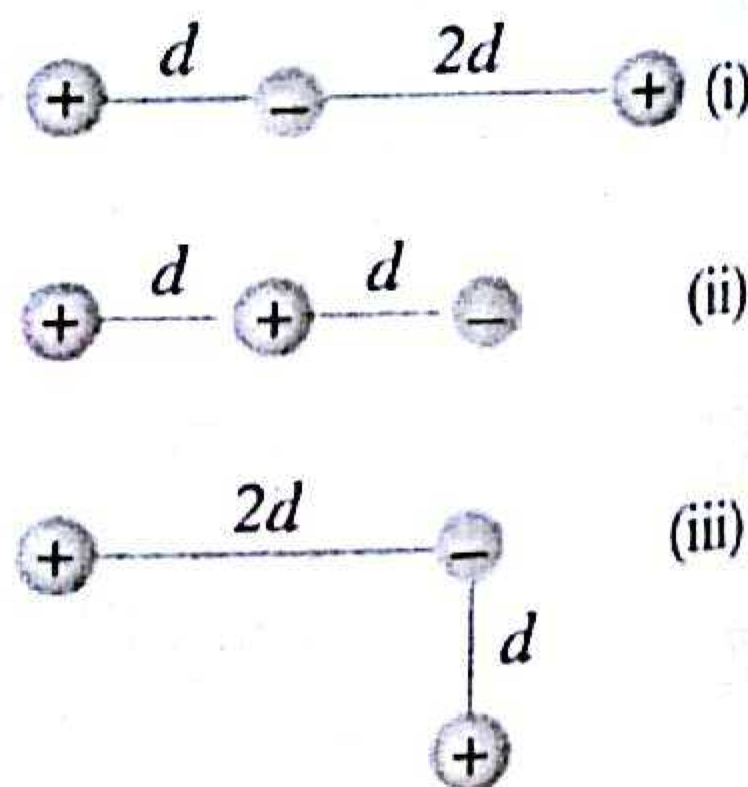
a) La fuerza es igual en ambos casos.
b) Es mayor cuando las cargas son de igual signo.
c) Es mayor cuando las cargas son de signos opuestos.



PE-1.14. *Fuerza de dos protones sobre un electrón*

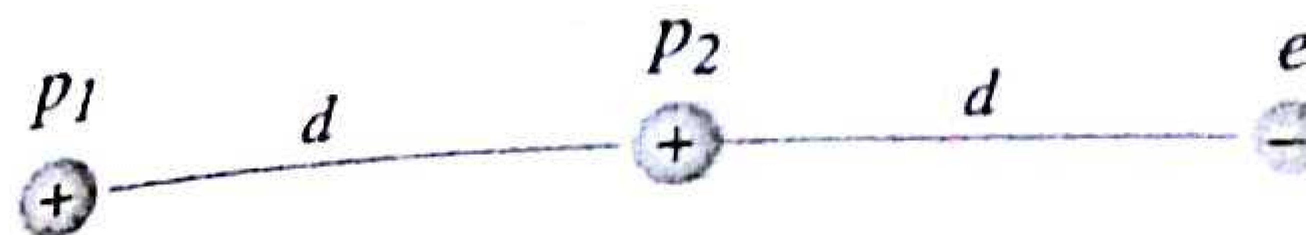
Un electrón y dos protones se colocan en los tres diferentes arreglos mostrados. Si comparamos la fuerza neta que se ejerce sobre el electrón en cada caso, encontramos que.....

a) $F(i) > F(ii) > F(iii)$, b) $F(i) > F(iii) > F(ii)$
c) $F(ii) > F(iii) > F(i)$ d) $F(ii) > F(i) > F(iii)$
e) $F(iii) > F(i) > F(ii)$



PE-1.15. *Fuerza eléctrica sobre el protón p_1*

Dos protones y un electrón están ubicados en una línea recta, siendo la distancia (p_1 - p_2) igual a la distancia (p_2 - e). Se sabe que la fuerza eléctrica neta sobre el protón del medio (p_2) tiene un valor $F_2 = 8$ N.

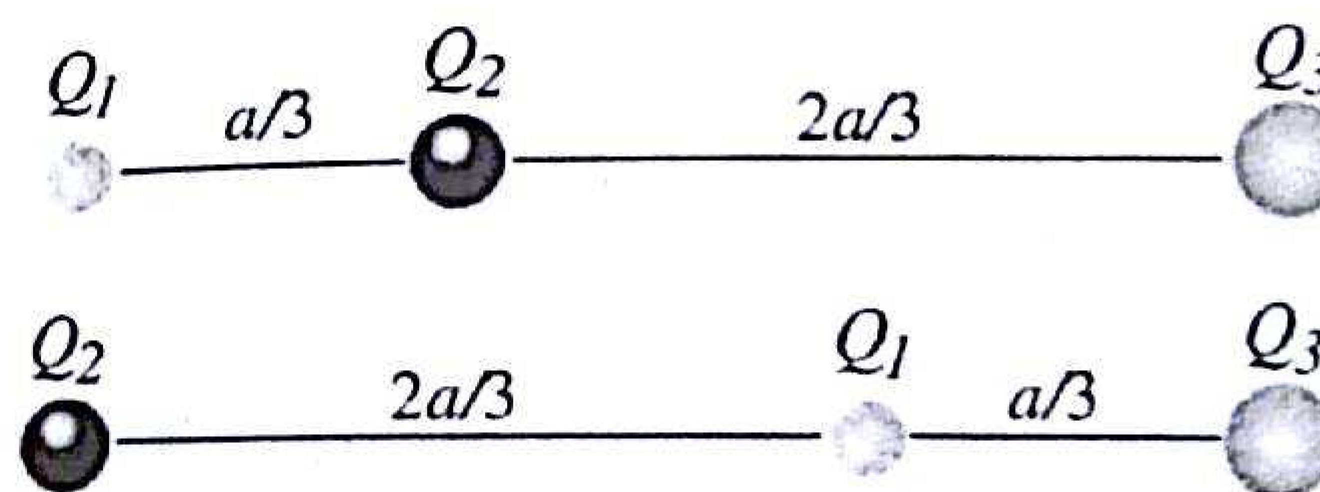


¿Cuál será la fuerza eléctrica neta sobre el protón p_1?

a) $F_1 = 3$ N
b) $F_1 = 5$ N
c) $F_1 = 6$ N
d) $F_1 = 12$ N
e) F_1 tiene otro valor

PE-1.16. *¿Cuál relación guardan estas tres cargas?*

Dos cargas puntuales Q_1 y Q_3 están fijas a una distancia a y, podemos desplazar otra carga, Q_2, hasta ubicarla en una posición de equilibrio la cual queda entre las dos, a una distancia $a/3$ de Q_1. Luego se fijan las cargas Q_2 y Q_3 a distancia a y Q_1 queda en libertad de ser desplazada hasta la posición de equilibrio que queda a una distancia $2a/3$ a la derecha de Q_2. Todas las cargas son positivas.



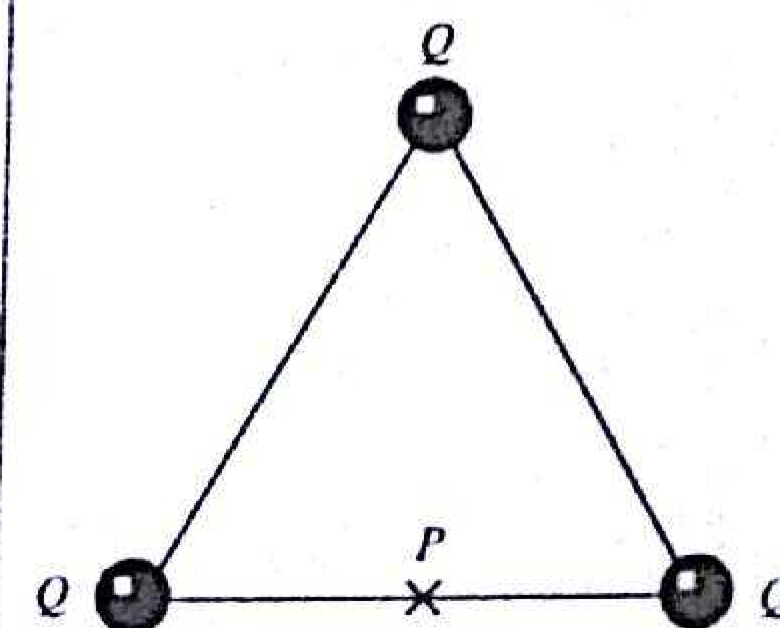
¿Qué relación guardan las cargas?

a) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 3 : 1 : 9$
b) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 1 : 3 : 12$
c) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 4 : 1 : 16$
d) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 8 : 2 : 1$
e) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 1 : 16 : 4$

PE-1.17. *Cargas en un triangulo equilátero*

Tres partículas con cargas idénticas, Q, están fijas en los vértices de un triángulo equilátero. La fuerza repulsiva entre cada par de cargas tiene magnitud F. Una cuarta partícula cargada, idéntica a las anteriores, es colocada en el punto medio P entre dos cargas, ¿Cuál sería la fuerza neta ejercida sobre esta carga?

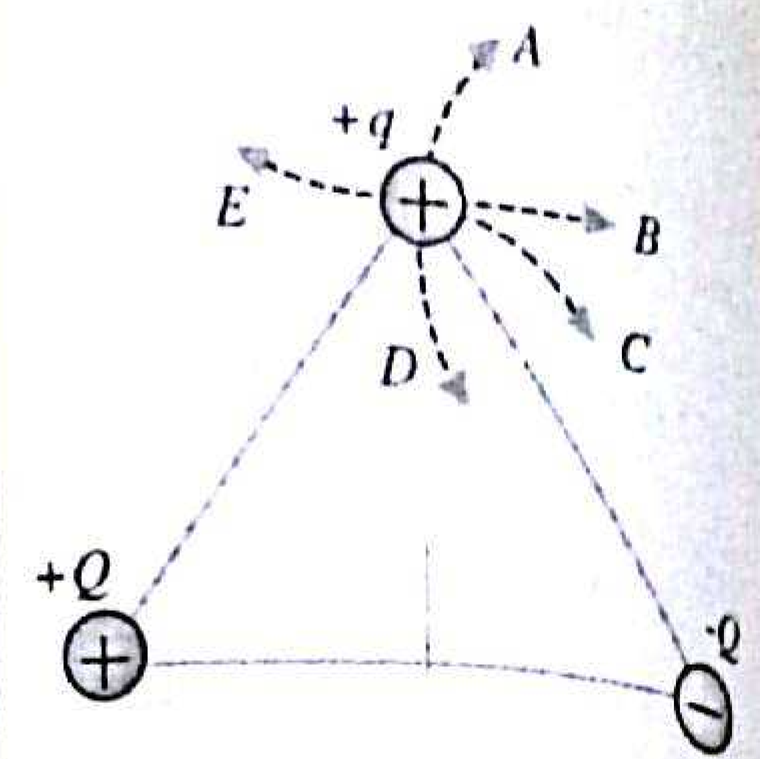
a) $F' = \frac{4}{3}F$, b) $F' = \frac{1}{2}F$, c) $F' = \frac{\sqrt{3}}{2}F$,
d) $F' = F$ e) $F' = 2F$



PE-1.18. *Trayectoria seguida por una partícula cargada*

Dos partículas con cargas $+Q$ y $-Q$ están fijas y en un punto ubicado a igual distancia de estas, es colocada otra partícula con carga $+q$, la cual es libre de moverse. ¿Cuál sería la trayectoria inicial que seguiría la carga $+q$?

a) A, b) B, c) C, d) D e) E



CAP. 1: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
1.01				✓	
1.03			✓		
1.05					✓
1.07		✓			
1.09					✓
1.11	✓				
1.13			✓		
1.15	✓				
1.17	✓				

	a	b	c	d	e
1.02		✓			
1.04				✓	
1.06	✓				
1.08		✓			
1.10	✓				
1.12		✓			
1.14			✓		
1.16					✓
1.18			✓		

Reseña biográfica

Benjamin Franklin

1706 - 1790



Billete de 100 U.S.$ en honor a Franklin

Nació en Boston, tuvo un infancia difícil y solo estudió hasta los 12 años para ponerse a trabajar en una imprenta. Hombre multifacético: Estadista, escritor, periodista, político y físico. Hizo dinero suficiente en varios negocios para vivir holgadamente por el resto de su vida y comenzó a interesarse por la física a la edad madura de cuarenta años. Las actividades científicas de Franklin se iniciaron con los pronósticos del tiempo que hacía como editor del Almanaque (Poor Richard's Almanac), una especie de calendario popular, que además de datos sobre astronomía, contenía consejos útiles, proverbios y juegos. Los fenómenos atmosféricos, los terremotos y las tempestades fueron los primeros temas abordados. Los científicos de la época debatían entre si los rayos eran o no fenómenos eléctricos y hasta había mentes supersticiosas que atribuía el estallido de un rayo a la ira divina. En 1752, Franklin hacía un experimento peligroso que más tarde le haría famoso: salió al campo abierto en medio de una tempestad y estuvo enviando cometas a las nubes tormentosas para recoger electricidad. La cuerda húmeda que sostenía la cometa servía de perfecto conductor y con ello podía acumular cargas en condensadores (o botellas de Leyden) que, al ser liberada en una descarga repentina, producía chispas explosivas. Comprobaba así que la electricidad producida en los laboratorios de física y el rayo son fenómenos de la misma naturaleza y además, acababa de inventar el pararrayos. Hizo contribuciones importantes al campo de la electricidad que fueron publicadas en el libro Experiments and Observations on Electricity Made at Phyladelphia in America (1753) y le valió el nombramiento de miembro de la Real Sociedad de Londres y de la Real Academia de Ciencias de Paris. Entre sus contribuciones está la formulación de la ley de conservación de la carga y la notación moderna de cargas positivas y negativas. Sugería que cierta cantidad de un único fluido determinaría el estado normal, neutro en un cuerpo, y un exceso o defecto produciría electricidades de distinta clase. El frotamiento modificaría la distribución del fluido en el cuerpo frotado y en el frotador, el uno pierde electricidad y el otro la gana. Franklin llamó a la electricidad vítrea (la del vidrio, lana, etc..) positiva, y a la resinosa (ámbar, seda, ..) negativa. Estuvo cerca de la verdad en el caso de los metales donde el transporte de electricidad es debido exclusivamente al movimiento de los electrones, excepto que éstos transportan electricidad resinosa y no vítrea. La convención de cargas positivas y negativas, a pesar de su infortunada elección se mantiene en la notación moderna. Franklin, hombre inquieto y multifacético, por naturaleza no pudo dedicarse por entero a la ciencia. Progresivamente, el estadista empeñado en liberar a su país de su condición de colonia, se sobreponía al científico trabajando intensamente, junto con George Washington. Redactó en colaboración con Thomas Jefferson y John Adams, la declaración de la independencia de los Estados Unidos (1776) e integró la comisión encargada de negociar la paz con Inglaterra. Su último acto político fue la firma de un memorándum, dirigido al Congreso, pidiendo la emancipación de los esclavos.

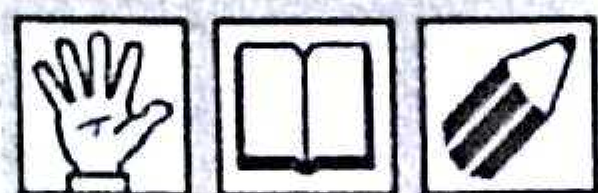
2

EL CAMPO ELÉCTRICO

La fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia y es pertinente preguntarnos, ¿cómo se transmite esta fuerza en el espacio vacío?, ¿se propaga instantáneamente?. Para resolver la dificultad conceptual de una fuerza que actúa a distancia, se puede describir la interacción como un proceso en dos etapas. Una carga modifica el espacio a su alrededor estableciendo (no instantáneamente) un *campo eléctrico*. Si se coloca una segunda carga, ésta no interactúa directamente con la primera, sino que responde al campo que allí encuentre. El campo eléctrico se comporta entonces como un agente intermedio entre las dos cargas. El concepto de campo eléctrico va mas allá de un simple artificio de cálculo. Si movemos repentinamente la carga fuente, la variación de su campo eléctrico se propagará a la velocidad de la luz y cualquier carga distante que encuentre a su paso reaccionará a la perturbación después de un cierto tiempo. En este capítulo vamos a estudiar algunas de las propiedades que tienen los campos eléctricos, veremos cómo se calculan los campos generados por distribuciones sencillas de cargas y también analizaremos el comportamiento de cargas puntuales en presencia de campos eléctricos.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Campo eléctrico
- Campo eléctrico de una carga puntual
- Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales
- Campo eléctrico de una distribución continua de carga
- Representación de campos eléctricos
- Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico
- Dipolos eléctricos en campos eléctricos.



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

EL CAMPO ELÉCTRICO

Una carga (la fuente) crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio. Para detectar el campo que está presente en un determinado punto se coloca allí una carga testigo y se mide la fuerza electrostática que actúa sobre ella.

El vector campo eléctrico en un punto se define como la fuerza que se ejerce sobre una carga testigo positiva, dividida por la magnitud, q_o, de dicha carga.

$$\vec{E} = Lim_{q_0 \to 0}(\frac{\vec{F}}{q_0})$$

La razón de tomar el límite $q_0 \to 0$ es que $\vec{E}$ no dependa de la magnitud de la carga testigo. Esta debe ser tan pequeña como sea posible para no perturbar el campo que allí existe.

El campo eléctrico

$$\vec{E} = Lim_{q_0 \to 0}(\frac{\vec{F}}{q_0})$$

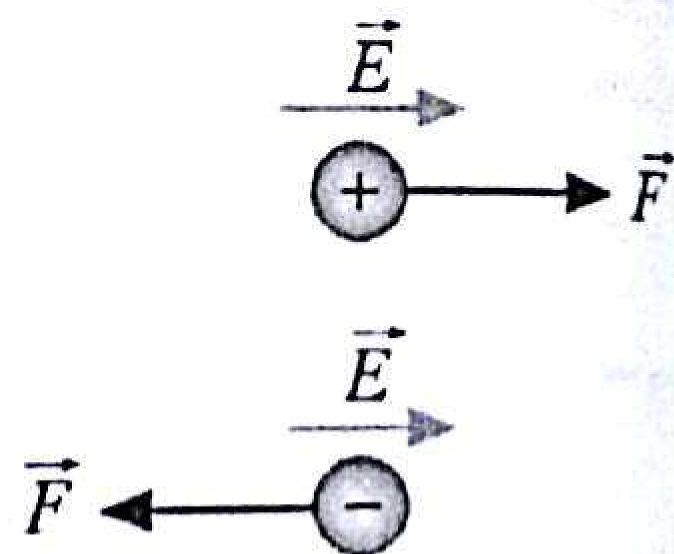
La Unidad SI del campo eléctrico es el newton por coulomb (N/C).

1 newton / coulomb

Una vez que el campo eléctrico $\vec{E}$ es conocido, podemos determinar la fuerza sobre cualquier partícula con carga q, mediante la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Si q es positiva, $\vec{F}$ tiene el mismo sentido de $\vec{E}$. En tanto que si q es negativa, $\vec{F}$ tiene sentido opuesto a $\vec{E}$.



CAMPO ELÉCTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL

Para hallar el campo eléctrico creado por una sola carga puntual Q, colocamos una carga testigo q a distancia r de Q y dividimos la fuerza de Coulomb por el valor de q:

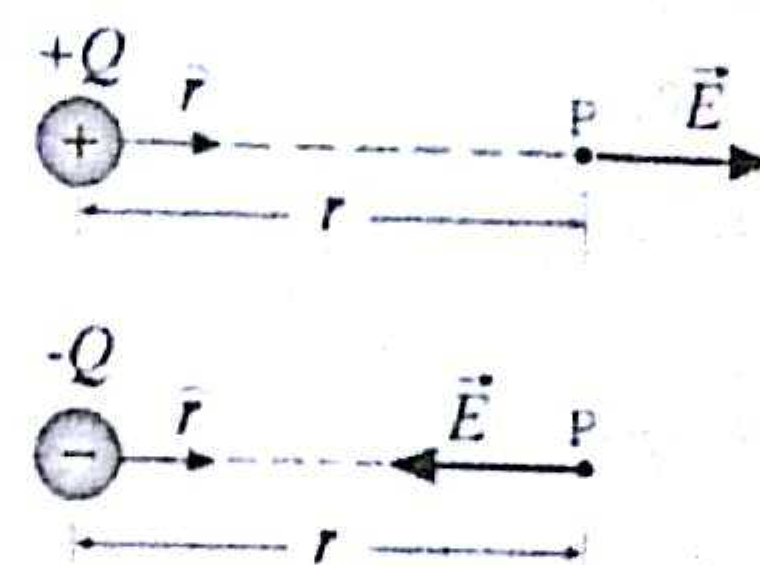
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{q}(\frac{kqQ}{r^2}\hat{r}) = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección radial, alejándose de la carga fuente, Q. El sentido de $\vec{E}$ respecto a $\hat{r}$ estará dado por el signo de Q.

Si Q es positiva, $\vec{E}$ apunta hacia afuera de Q.

Si Q es negativa, $\vec{E}$ apunta hacia Q.



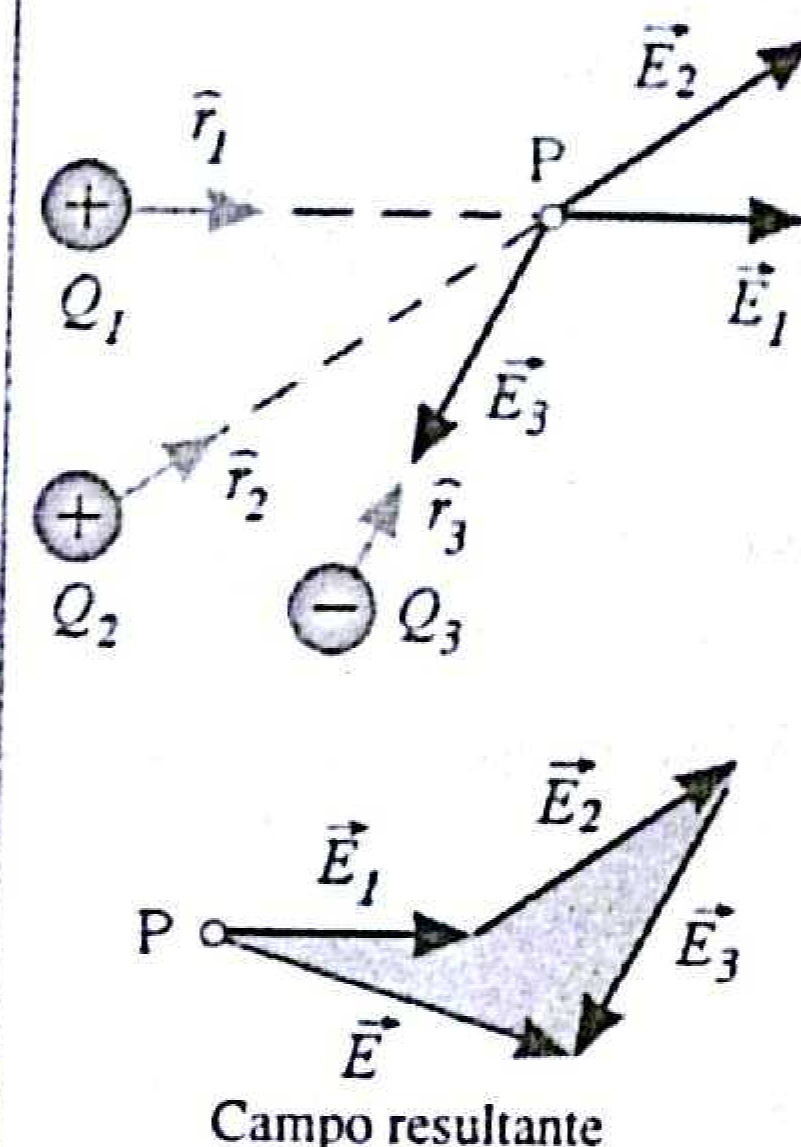
CAMPO DE VARIAS CARGAS PUNTUALES

Si el campo se debe a mas de una carga, los campos eléctricos individuales se combinan vectorialmente de la misma forma que lo hacen las fuerzas eléctricas.

El campo eléctrico en un punto P debido a un sistema de N cargas puntuales Q_1, Q_2, Q_3,... es el resultante de la suma vectorial:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... = k\sum\frac{Q}{r^2}\hat{r}_i$$

La validez del *principio de superposición* está confirmada por los experimentos.



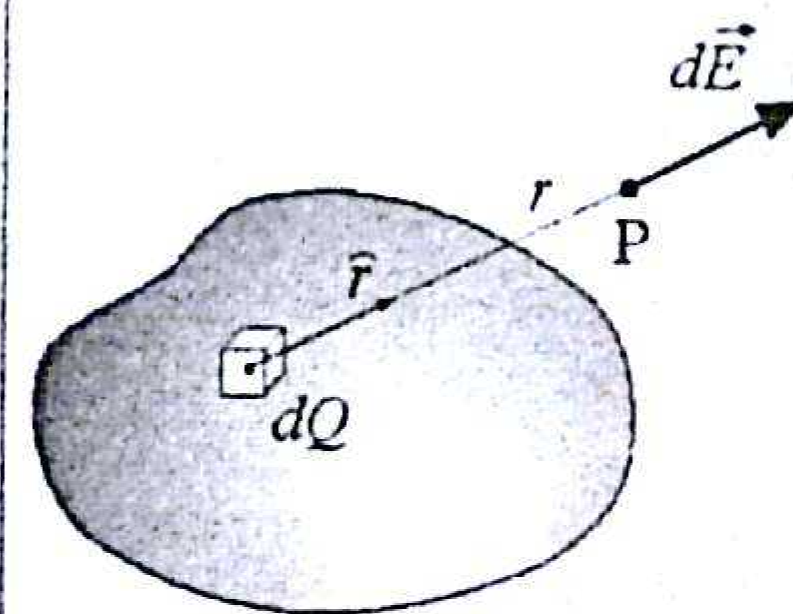
Campo resultante

CAMPO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA

Para calcular el campo eléctrico debido a una distribución continua de cargas, la estrategia que se usa es dividir la distribución en elementos infinitesimales de carga dQ, los cuales pueden ser considerados como cargas puntuales.

Aplicando el principio de superposición, el campo total en un punto P es la suma vectorial (integral) de las contribuciones individuales, $d\vec{E}$ de todos los elementos de carga en la distribución:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k\int \frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$



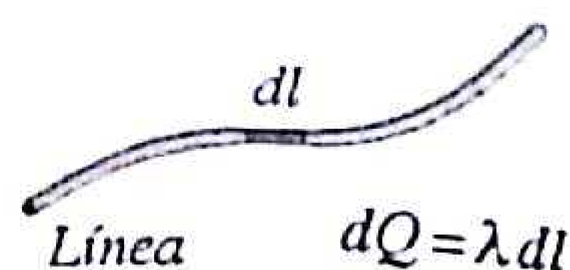
$$\vec{E} = k\int \frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$

En donde r es la distancia del elemento de carga dQ al punto P. El correspondiente vector unitario $\hat{r}$ tiene origen en el elemento de carga.

Una distribución continua se describe por su densidad de carga en cada punto y para evaluar esta integral debemos expresar el diferencial de carga, dQ, en términos de r.

En una *distribución lineal*, un elemento arbitrario de longitud dl abarca una carga infinitesimal dQ dada por:

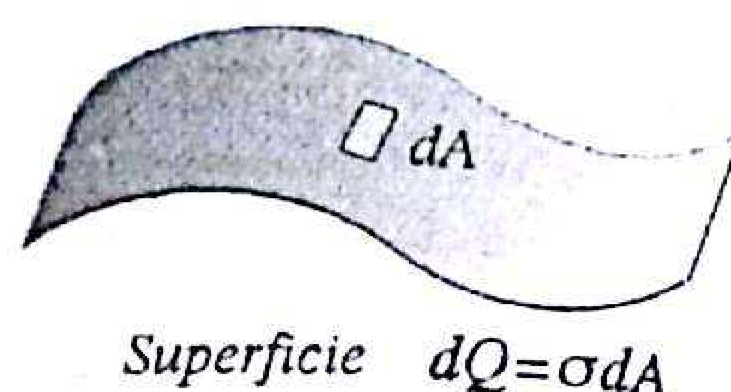
$$dQ = \lambda\, dl$$



donde λ es la densidad lineal o carga por unidad de longitud (C/m).

En una *distribución superficial*, la carga dQ sobre cualquier elemento de área dA es:

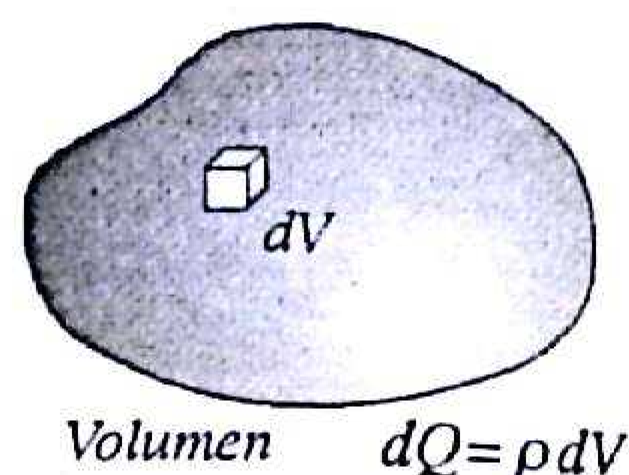
$$dQ = \sigma\, dA$$



donde σ es la densidad superficial o carga por unidad de superficie (C/m^2).

En una *distribución volumétrica*, la carga dQ en cualquier elemento de volumen dV es:

$$dQ = \rho\, dV$$



donde ρ es la densidad volumétrica o carga por unidad de volumen (C/m^3).

En el caso mas sencillo de que la distribución de carga sea *uniforme*, las densidades de carga λ, σ o ρ son constantes.

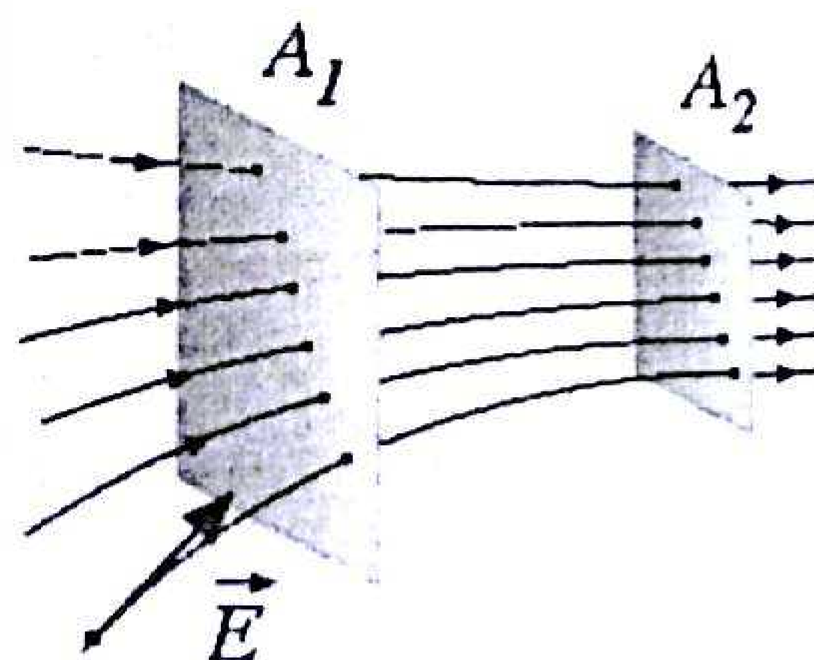
LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

Las líneas de campo eléctrico son una ayuda visual para representar una configuración dada del campo eléctrico.

Esta representación geométrica consiste en dibujar *líneas imaginarias* siguiendo los siguientes criterios:

a) Las líneas se dirigen de modo que en cada punto, la tangente a dicha línea quede en la *dirección* del vector $\vec{E}$ en ese punto.

b) La densidad de líneas (número de líneas por unidad de área perpendicular) es proporcional al *módulo* del campo $\vec{E}$.



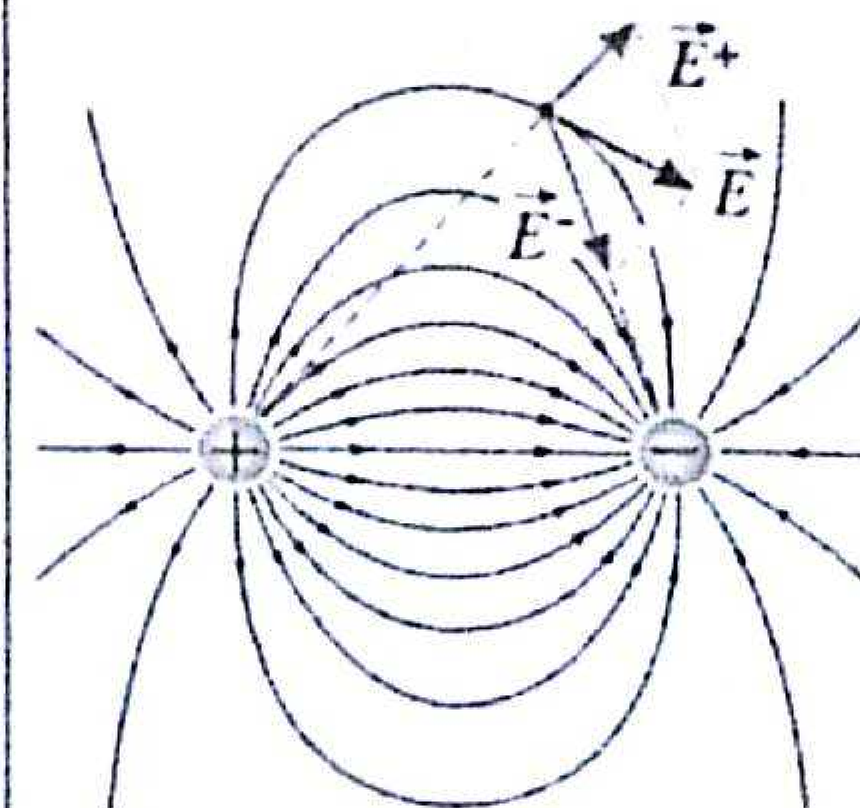
Para trazar líneas de campo eléctrico se siguen las siguientes *reglas*:

1) Las líneas siempre comienzan en cargas positivas (+) y terminan en cargas negativas (-).

2) Las líneas son continuas en toda región libre de cargas.

3) Las líneas nunca se interceptan (a menos que haya carga en ese sitio)

En la figura se muestra la configuración de líneas de campo eléctrico debido a dos cargas iguales y opuestas.



MOVIMIENTO DE CARGAS EN CAMPOS $\vec{E}$

Una partícula de masa m y carga q en un campo eléctrico experimenta una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. En ausencia de otros tipos de fuerza (como la de gravedad), de acuerdo a la segunda ley de Newton, la aceleración de la partícula es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

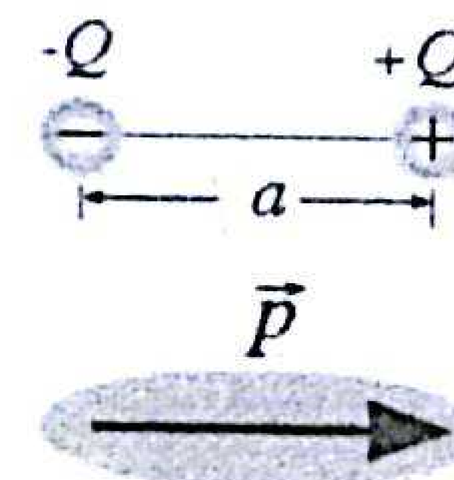
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Si el campo es uniforme, la aceleración es constante en módulo y dirección, y se pueden usar las expresiones conocidas de cinemática para aceleración constante.

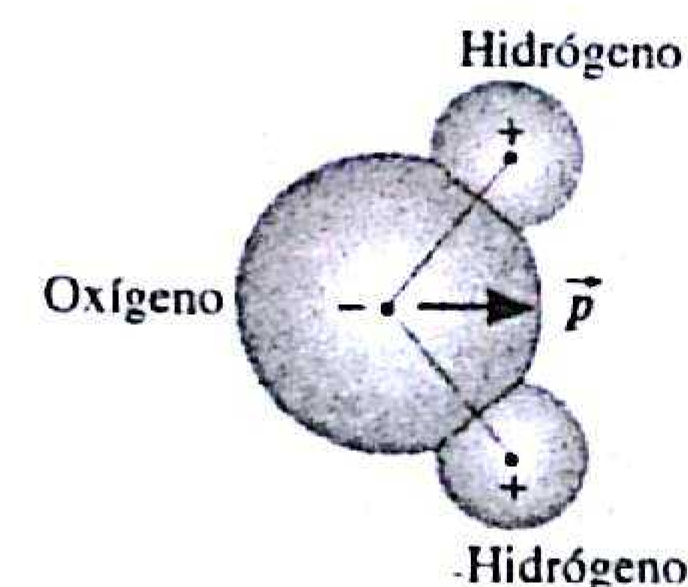
DIPOLOS ELÉCTRICOS

Un dipolo eléctrico es una configuración de un par de cargas iguales y opuestas $\pm Q$ que están separadas por una distancia fija a. El momento dipolar de un dipolo es un vector que se define como:

$$\vec{p} = Q\vec{a}$$



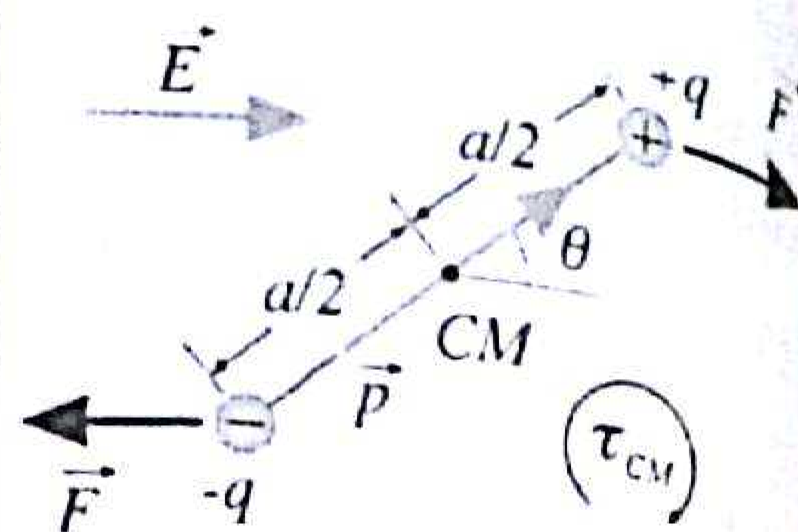
Existen muchas moléculas en las que no coinciden sus centros de carga positiva con sus centros de carga negativa y pueden ser considerados como dipolos eléctricos. Estas moléculas como H_2O, HCl,..tienen momentos dipolares permanentes y se llaman moléculas *polares*. En una molécula no polar un campo eléctrico externo puede provocar la separación de cargas (+) y (-), y de esta manera se le *induce* un dipolo.



La molécula de agua es polar

DIPOLOS EN UN CAMPO UNIFORME

Si consideramos un dipolo en un campo eléctrico uniforme, las fuerzas individuales sobre las cargas $+q$ y $-q$ son iguales y opuestas y no hay fuerza neta sobre el dipolo ($\vec{F} = 0$). Por lo tanto, su centro de masa CM no se mueve.



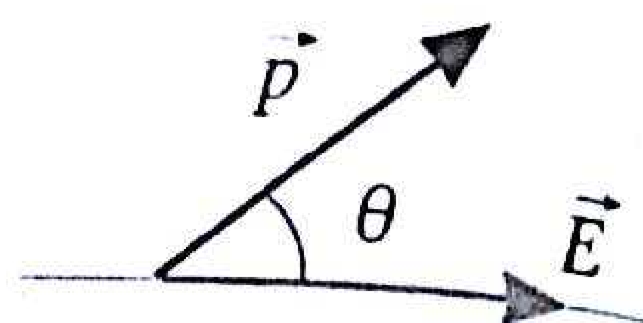
Dipolo en campo uniforme

Sin embargo, existe un torque sobre el dipolo que tiende a girarlo en torno a su CM. Las magnitudes de los torques individuales respecto del centro del dipolo son:

$$\tau_+ = \tau_- = (\frac{1}{2} a sen\theta) F$$

Estos torques actúan en el mismo sentido, de modo que el módulo del torque neto sobre el dipolo es:

$$\tau = 2(\frac{1}{2} a sen\theta) qE = aqE sen\theta = pE sen\theta$$

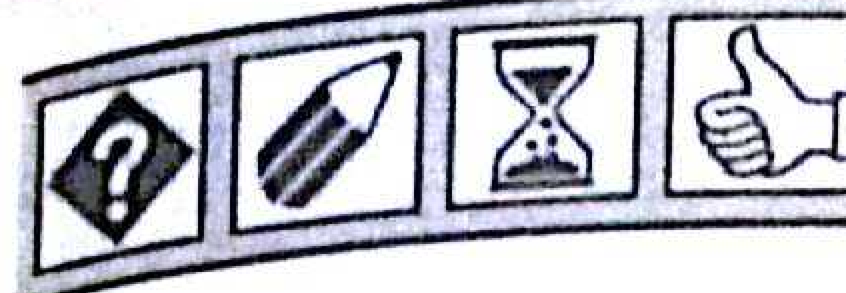


Torque sobre el dipolo

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

El torque tiende a alinear el dipolo a lo largo de las líneas del campo eléctrico. En notación vectorial el torque es el producto vectorial del vector momento dipolar, $\vec{p}$, y el vector campo eléctrico, $\vec{E}$:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



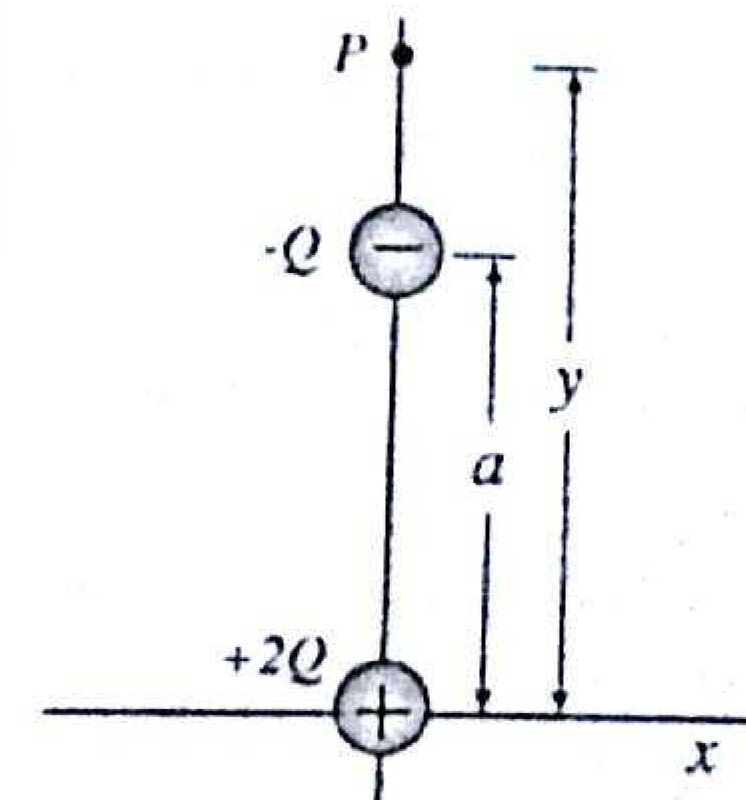
PROBLEMAS RESUELTOS

PR-2.01. ***Líneas de campo $\vec{E}$ de dos cargas desiguales.***

Dos cargas puntuales $+2Q$ y $-Q$ están separadas por una distancia a.

a) Determine un punto en la región cercana a las cargas donde el campo eléctrico resultante es nulo.

b) Haga un diagrama aproximado de las líneas de campo eléctrico en la vecindad de las cargas.



Solución: a) El campo eléctrico total es cero en un punto donde los campos $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$ tengan igual magnitud y direcciones opuestas. Como el campo de una carga aumenta con la magnitud de esta y decrece con la distancia al cuadrado, la anulación solo puede suceder en un punto P ubicado arriba de la carga negativa $(y > a)$.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + E_- = \frac{k(2Q)}{y^2}\vec{y} + \frac{k(Q)}{(y-a)^2}(-\vec{y})$$

El campo es cero para: $\dfrac{k(2Q)}{y^2} - \dfrac{k(Q)}{(y-a)^2} = 0$

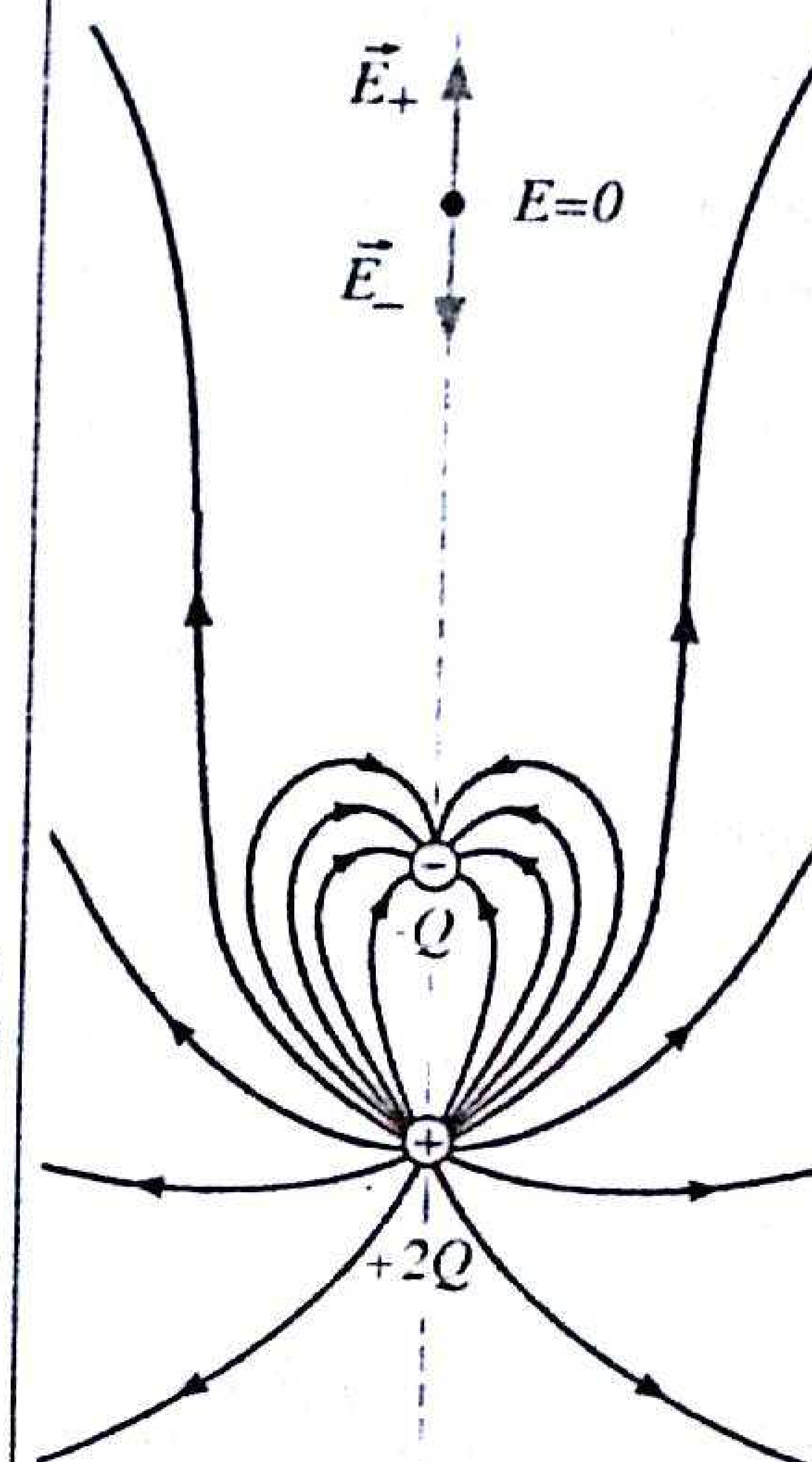
$$\frac{2}{y^2} = \frac{1}{(y-a)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{y} = \pm\frac{1}{y-a}$$

$$\sqrt{2}(y-a) = \pm y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} \mp 1)} a = (2 \pm \sqrt{2})a$$

Escogemos la solución con signo (+) ya que la del signo negativo no tiene sentido físico, porque el punto P debe estar en la región $y > a$, por lo tanto, $y = (2 + \sqrt{2})a$.

b) Las líneas de campo $\vec{E}$ están dibujadas teniendo presente las siguientes consideraciones:

(1) *Simetría*: La figura debe ser simétrica respecto a la línea que une las dos cargas.



(2) *Número de líneas*: El número de líneas es arbitrario pero, desde la carga $+2Q$ debe partir un número de líneas doble que el número de las que entran a la carga $-Q$. En este caso, 16 líneas de campo se han dibujado emergiendo de la carga $+2Q$ y 8 líneas entrando a la carga $-Q$.

(3) *Campo nulo*: Por el punto donde $E = 0$ no debe pasar ninguna línea de campo.

(4) *Campo cercano*: En la vecindad cercana a una carga puntual, su campo propio predomina y las líneas deben ser radiales y con simetría esférica.

(5) Campo lejano: Desde una región lejos del sistema de cargas, la figura debe lucir como la de una carga puntual, en este caso con una carga neta positiva $(+2Q - Q) = +Q$.

Respuesta:

a) $y = (2+\sqrt{2})a$

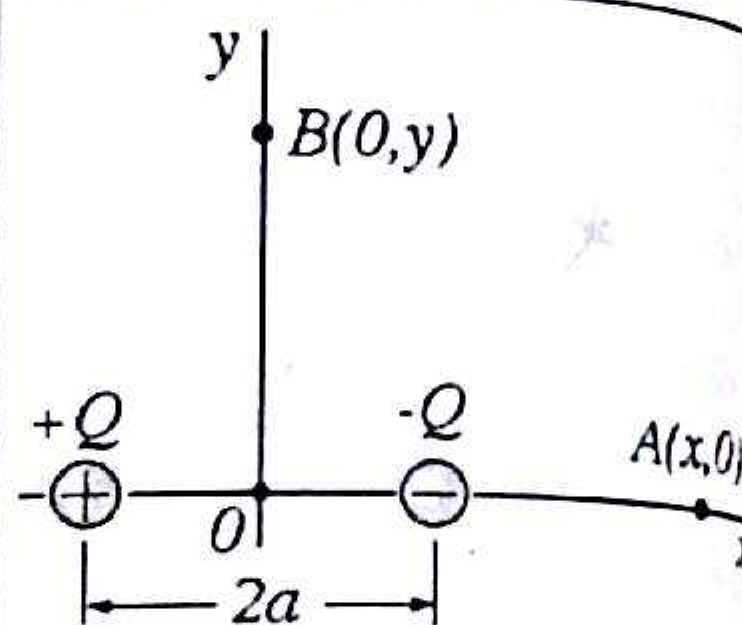
PR-1.02. *Campo de un dipolo eléctrico*

Dos cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ están separadas por una distancia fija $2a$, constituyendo un dipolo eléctrico. Determine el campo eléctrico en los tres puntos indicados:

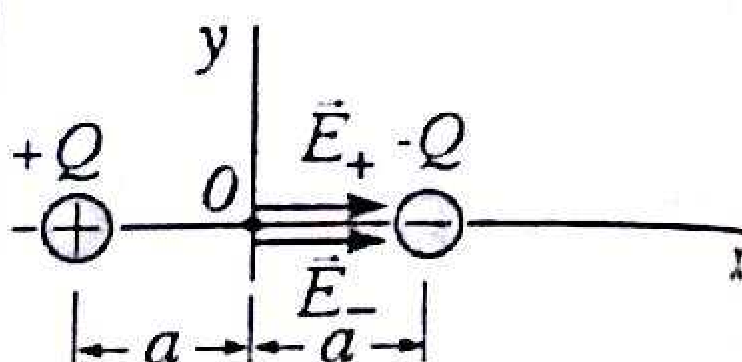
a) En el punto O ubicado en el centro del dipolo.

b) En el punto A a una distancia x en el eje x.

c) En el punto B a una distancia y en el eje y.



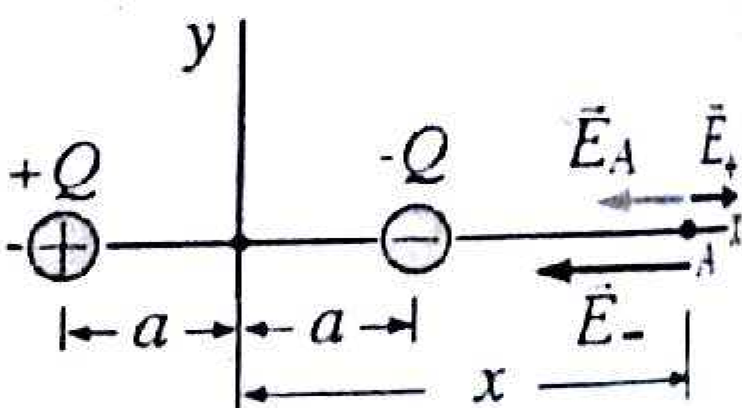
Solución: a) En el punto O en el centro del dipolo, los campos $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$ tienen igual magnitud y sentido:



$$\vec{E}_- = \vec{E}_+ = \frac{kQ}{a^2}\hat{x}$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_- + \vec{E}_+ = 2\frac{kQ}{a^2}\hat{x}$$

b) En el punto A a una distancia x en el eje x, el campo es:

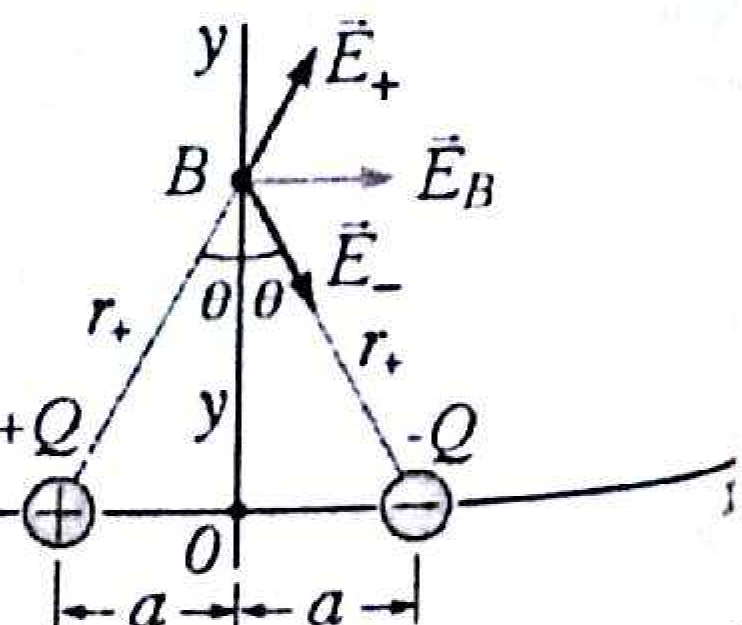


$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{kQ\hat{x}}{(x+a)^2} - \frac{kQ\hat{x}}{(x-a)^2}$$

$$\vec{E}_A = kQ[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2}]\hat{x}$$

$$\vec{E}_A = -\frac{4kQax}{(x+a)^2(x-a)^2}\hat{x} = -\frac{4kQax}{(x^2-a^2)^2}\hat{x}$$

b) En el punto B a una distancia y en el eje y, el campo es:



$$E_+ = E_- = \frac{kQ}{r^2} = \frac{kQ}{y^2+a^2}$$

$$\vec{E}_B = 2E_+ sen\theta\hat{x} = 2(\frac{kQ}{y^2+a^2})(\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}})\hat{x}$$

$$\vec{E}_B = \frac{2kQa}{(y^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$$

Respuesta:

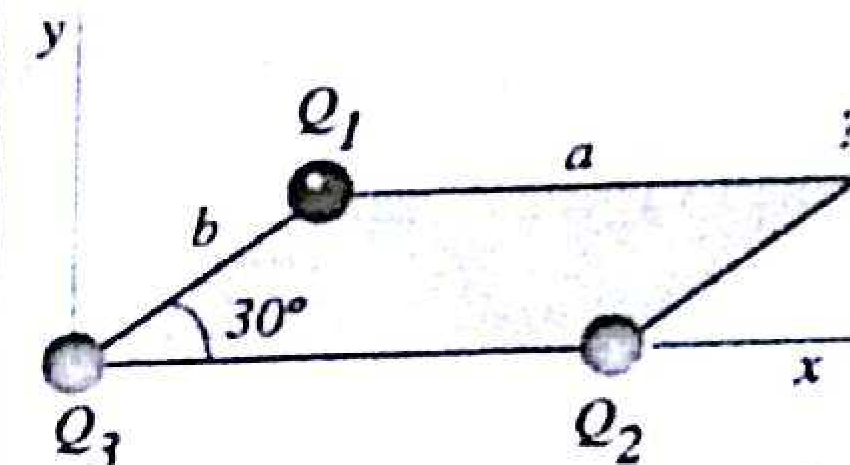
a) $\vec{E}_O = 2\frac{kQ}{a^2}\hat{x}$

b) $\vec{E}_A = -\frac{4kQax}{(x^2-a^2)^2}\hat{x}$

c) $\vec{E}_B = \frac{2kQa}{(y^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$

PR-2.03. *Campo de tres cargas en un paralelogramo.*

Tres cargas puntuales $Q_1 = -3\text{x}10^{-6}$C, $Q_2 = 2\text{x}10^{-6}$C y $Q_3 = 10^{-6}$C están en las esquinas de un paralelogramo, cuyos lados son a = 3 m y b = 2 m, en el plano x-y, como muestra la figura. ¿Cuál es el campo eléctrico en la esquina vacante?



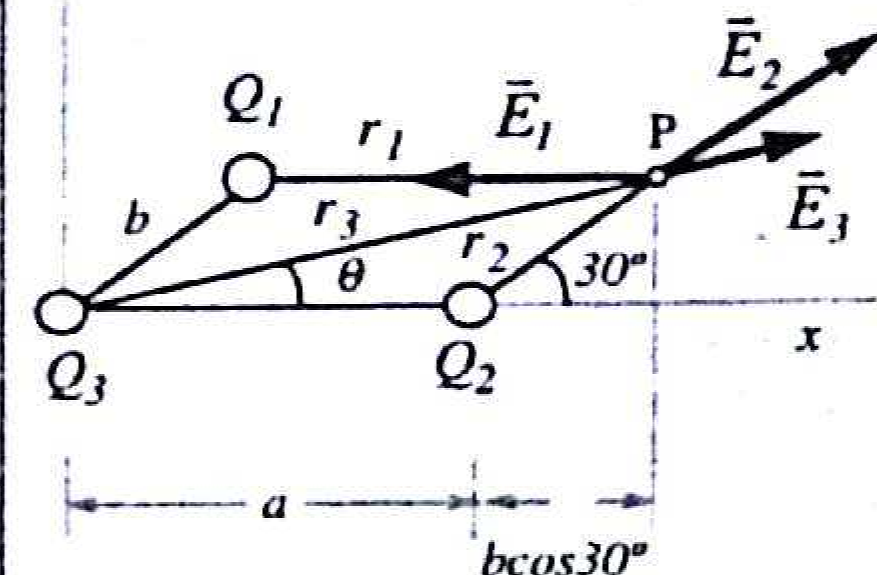
Solución: Se determina primero las distancias desde cada carga a la esquina vacante del paralelogramo:

$$r_1 = a = 3\text{m}, \quad r_2 = b = 2\text{m}$$

$$r_3 = \sqrt{(a+b\cos 30^\circ)^2 + (bsen30^\circ)^2} = 4{,}83\text{m}$$

$$tg\theta = \frac{bsen30^\circ}{a+b\cos 30^\circ} = \frac{1}{4{,}73} \quad \Rightarrow \quad \theta = 11{,}9^\circ$$

Sustituyendo las respectivas distancias r_1, r_2 y r_3, los campos individuales debido a cada carga son:



$$E_1 = \frac{kQ_1}{r_1^2} = \frac{(9{,}0\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2)(3\text{x}10^{-6}\text{C})}{(3\text{m})^2} = 3000\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_1 = -3000\frac{\text{N}}{\text{c}}\hat{x}$$

$$E_2 = \frac{kQ_2}{r_2^2} = \frac{(9{,}0\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2)(2\text{x}10^{-6}\text{C})}{(2\text{m})^2} = 4500\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_2 = 4500\frac{\text{N}}{\text{c}}(\cos 30^\circ\hat{x} + sen30^\circ\hat{y})$$

$$E_3 = \frac{kQ_3}{r_3^2} = \frac{(9{,}0\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2)(1\text{x}10^{-6}\text{C})}{(4{,}83\text{m})^2} = 386\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\bar{E}_3 = 386\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{c}}(\cos 11{,}9^\circ\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,11{,}9^\circ\,\hat{y})$$

El campo total en la esquina desocupada es la suma vectorial:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3$$

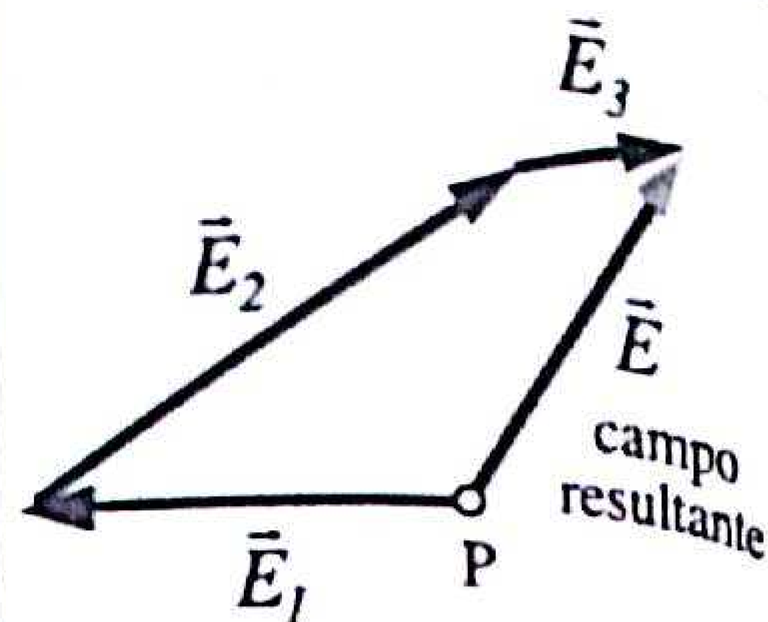
Reemplazando las expresiones de los campos individuales:

$$\bar{E} = -3000\hat{x} + 4500(\cos 30^\circ\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,30^\circ\,\hat{y}) +$$

$$386(\cos 11{,}9^\circ\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,11{,}9^\circ\,\hat{y})\ \mathrm{N/C}$$

Simplificando:

$$\bar{E} = (1275\hat{x} + 2330\hat{y})\ \mathrm{N/C}$$

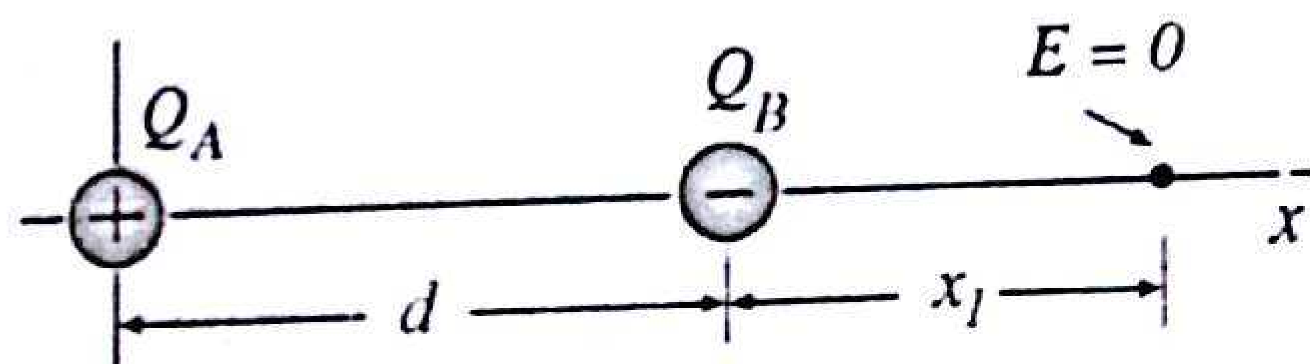


Respuesta

$\bar{E} = (1275\hat{x} + 2330\hat{y})$ N/C

PR-2.04. *¿Dónde será máximo el campo eléctrico?*

Dos cargas puntuales $+Q_A$ y $-Q_B$ está separadas por una distancia d = 0,60 m. Se sabe que el campo eléctrico resultante es nulo a una distancia x_1 = 0,40 m a la derecha de Q_B.



a) Determine la relación entre las cargas, Q_A/Q_B.
b) Determine el punto en el eje x donde el campo eléctrico alcanza su máximo valor.

Solución: La expresión para el campo eléctrico resultante a distancia x de la carga Q_B es:

$$E(x) = \frac{kQ_A}{(d+x)^2} - \frac{kQ_B}{x^2}$$

Como el campo es nulo en $x = x_1$, se tiene:

$$\frac{kQ_A}{(d+x_1)^2} - \frac{kQ_B}{x_1^2} = 0$$

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \left(\frac{d+x_1}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{0.60\mathrm{m}+0.40\mathrm{m}}{0.40\mathrm{m}}\right)^2 = 6.25$$

b) En el punto donde el campo se anula su derivada debe ser cero:

$$\frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{kQ_A}{(d+x)^2} - \frac{kQ_B}{x^2}\right] = 0$$

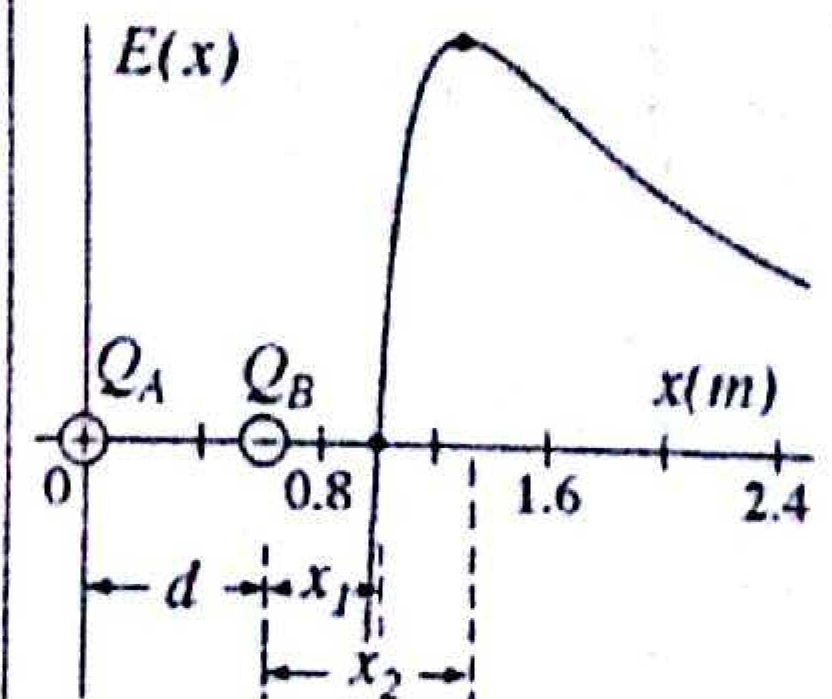
$$k\left[-\frac{2Q_A}{(d+x)^3} + \frac{2Q_B}{x^3}\right] = 0$$

Despejando, se obtiene la distancia x donde ocurre el máximo del campo E:

$$x_2 = \frac{d}{(Q_A/Q_B)^{1/3} - 1} = \frac{0.60\mathrm{m}}{6.25^{1/3} - 1} = 0.713\ \mathrm{m}$$

La distancia al origen de este punto es:

$$d + x_2 = 0.713\mathrm{m} + 0.60\mathrm{m} = 1.31\ \mathrm{m}$$

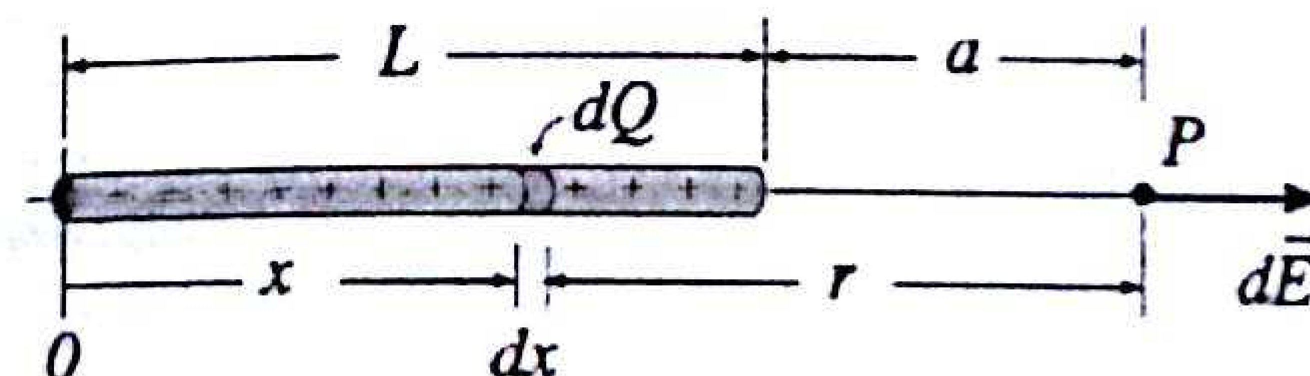


Respuesta

a) $Q_A/Q_B = 6.25$
b) $d + x_2 = 1.31$ m

PR-2.05. *Campo de una barra recta y delgada.*

Una barra aislante muy delgada y de longitud L tiene una carga distribuida a lo largo del eje x. Calcule el campo eléctrico en un punto P a una distancia a del extremo de la barra.



Considere estos dos casos:
a) La barra tiene una carga uniforme Q.
b) La carga está distribuida con una densidad lineal:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$$

Solución: Elegimos en la barra un pequeño elemento diferencial dx ubicado a distancia x del origen. Este pequeño segmento tiene una carga $dQ = \lambda dx$, siendo λ la carga por unidad de longitud. El punto P del campo se encuentra a una distancia $r = (L + a - x)$ de dQ. El campo $d\bar{E}$ producido por este elemento de carga está dirigido a lo largo del eje x:

$$d\bar{E} = \frac{kdQ}{r^2}\hat{x} = \frac{k\lambda dx}{(L+a-x)^2}\hat{x}$$

a) Si la carga es uniforme, la proporción entre dQ y dx es igual a la proporción entre la carga total Q y la longitud L de la barra, y por lo tanto la densidad de carga es una constante: $\lambda = Q/L$. El campo total en P es la suma de los aportes de todos los elementos de la barra:

$$\bar{E} = \int d\bar{E} = \hat{x}\int_0^L \frac{k(Q/L)dx}{(L+a-x)^2} = \hat{x}\frac{kQ}{L}\int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2}$$

$$\bar{E} = \hat{x}\frac{kQ}{L}\frac{1}{(L+a-x)}\Big|_0^L = \hat{x}\frac{kQ}{L}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(L+a)}\right] = \hat{x}\frac{kQ}{L}\frac{L}{a(L+a)}$$

$$\bar{E} = \frac{kQ}{a(L+a)}\hat{x}$$

$$\int \frac{dx}{(b-x)^2} = \frac{1}{b-x}$$

Observe que si la longitud L fuera despreciable frente a la distancia a, se obtiene la expresión familiar para el campo eléctrico producido por una carga puntual: $E = kQ/a^2$

a) Si la densidad de carga está especificada por la función: $\lambda(x) = \lambda_0 x/L$, se sustituye esta expresión en la del campo eléctrico:

$$\bar{E} = \hat{x}\int_0^L \frac{k\lambda(x)dx}{(L+a-x)^2} = \hat{x}\frac{k\lambda_0}{L}\int_0^L \frac{xdx}{(L+a-x)^2}$$

$$\int \frac{xdx}{(b-x)^2} = \frac{b}{b-x} + \ln(b-x)$$

Resolviendo la integral en x, se obtiene

$$\bar{E} = \hat{x}\frac{k\lambda_0}{L}\left[\frac{L+a}{L+a-x} + \ln(L+a-x)\right]\Big|_0^L$$

$$\bar{E} = \hat{x}\frac{k\lambda_0}{L}\left[\frac{L+a}{a} - 1 + \ln a - \ln(L+a)\right]$$

$$\bar{E} = \frac{k\lambda_0}{L}\left[\frac{L}{a} - \ln\left(\frac{L}{a}+1\right)\right]\hat{x}$$

Respuesta:

a) $\bar{E} = \dfrac{kQ}{a(L+a)}\hat{x}$

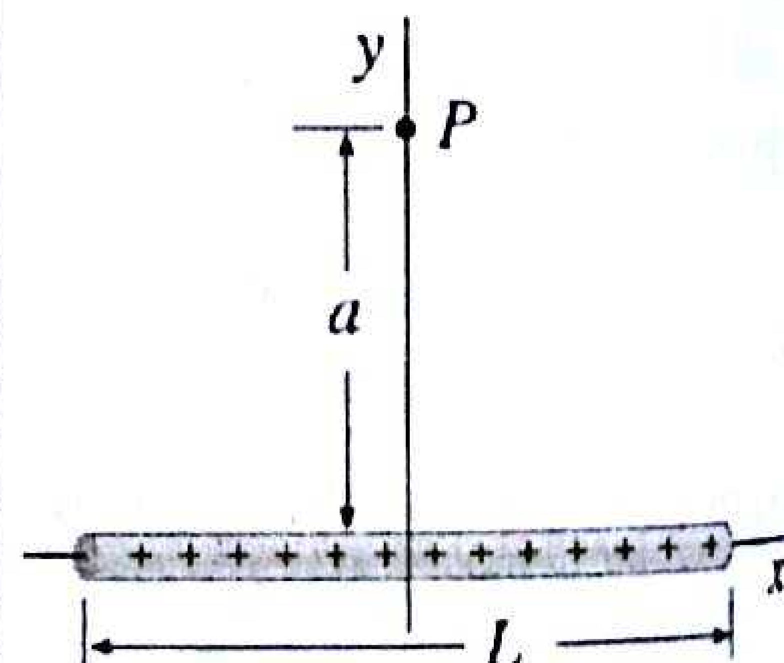
b) $\bar{E} = \dfrac{k\lambda_0}{L}\left[\dfrac{L}{a} - \ln\left(\dfrac{L}{a}+1\right)\right]\hat{x}$

PR-2.06. *Campo eléctrico en la mediatriz de una varilla uniforme y campo de una varilla infinita.*

Una varilla delgada no conductora de longitud finita L, contiene una carga positiva Q distribuida uniformemente.

a) Determine el campo eléctrico en un punto ubicado a una distancia a sobre la mediatriz perpendicular a la varilla.

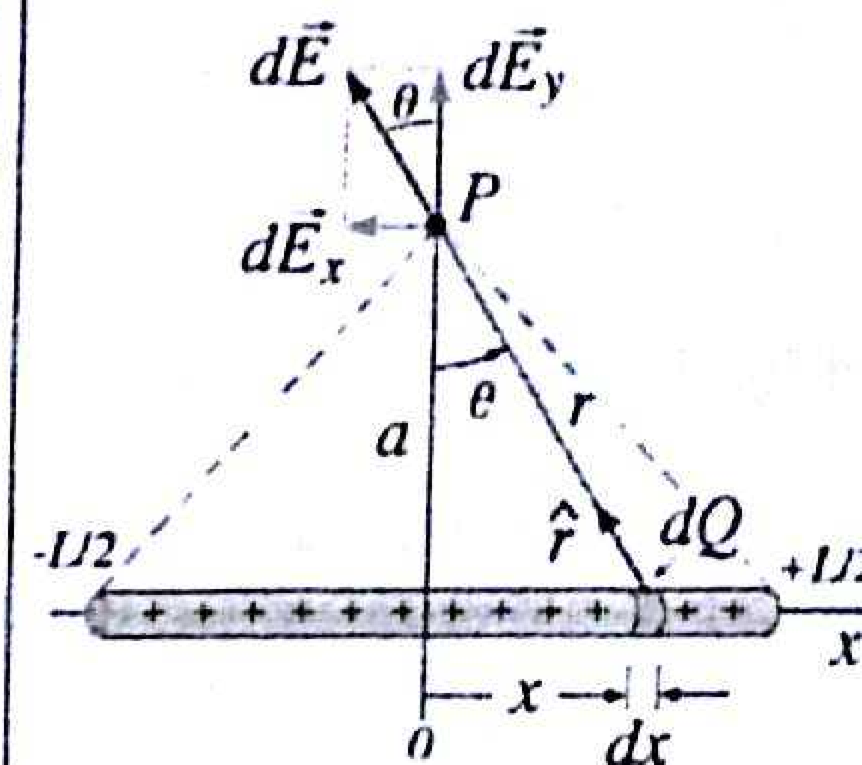
b) Utilice el resultado anterior para hallar el campo eléctrico producido por una carga lineal infinita.



Solución: a) Hemos escogido un sistema de coordenadas con origen en el centro de la varilla. Un elemento de carga de longitud dx a distancia x del origen abarca una carga elemental $dQ = \lambda dx$ y produce un campo eléctrico en el punto P a una distancia r:

$$d\bar{E} = \frac{kdQ}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda dx}{r^2}\hat{r}$$

Este campo tiene una componente paralela a la varilla y una componente perpendicular. Sin embargo, debido a la simetría, por cada carga dQ a la derecha del origen existe otra carga dQ a la izquierda, que produce un campo con componente paralela igual y opuesto al indicado. Por lo tanto, cuando sumamos todos los campos de los elementos de carga, las componentes paralelas a la varilla se cancelan ($\bar{E}_x = 0$) y solo necesitamos la componente del campo total que es perpendicular a la varilla.



Línea de carga de longitud L

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{k\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

La integración puede simplificarse si pasamos de la variable lineal x a la variable angular θ, relacionadas por la expresión:

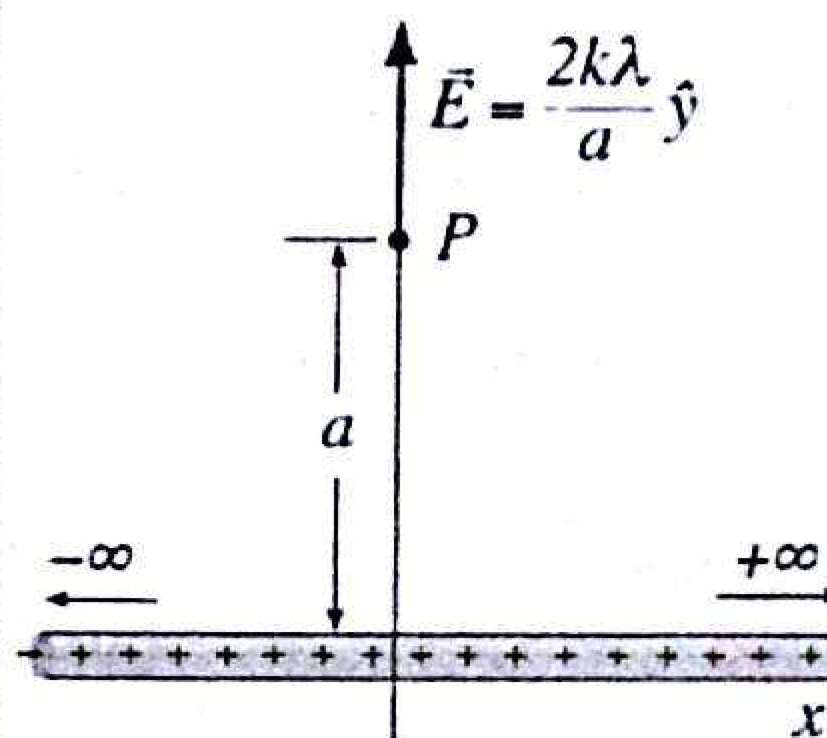
$$x = a\,tg\theta$$

$$dx = a\sec^2\theta d\theta = a\left(\frac{r}{a}\right)^2 d\theta = \left(\frac{r^2}{a}\right)d\theta$$

La componente E_y del campo total se obtiene integrando dE_y.

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{k\lambda}{r^2}\cos\theta\left(\frac{r^2}{a}d\theta\right) = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{a}sen\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{2k\lambda}{a}sen\theta_0$$



Línea de carga infinita

Note que el ángulo θ se mide a partir del eje y, y por lo tanto es cero para $x = 0$, alcanza un máximo positivo $+\theta_0$ para $x = +L/2$ y un máximo negativo $-\theta_0$ para $x = -a$. El valor límite θ_0 viene dado por

$$sen\theta_0 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + a^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}$$

Por lo tanto el campo eléctrico total en el punto P es:

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{L^2+4a^2}}\hat{y}$$

b) El campo producido por una línea de carga de longitud infinita se obtiene a partir de este resultado haciendo θ_0 = 90° que corresponde a senθ_0=1 o bien poniendo $a << L$.

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a}\hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{y}$$

Respuesta

a) Línea de longitud L:

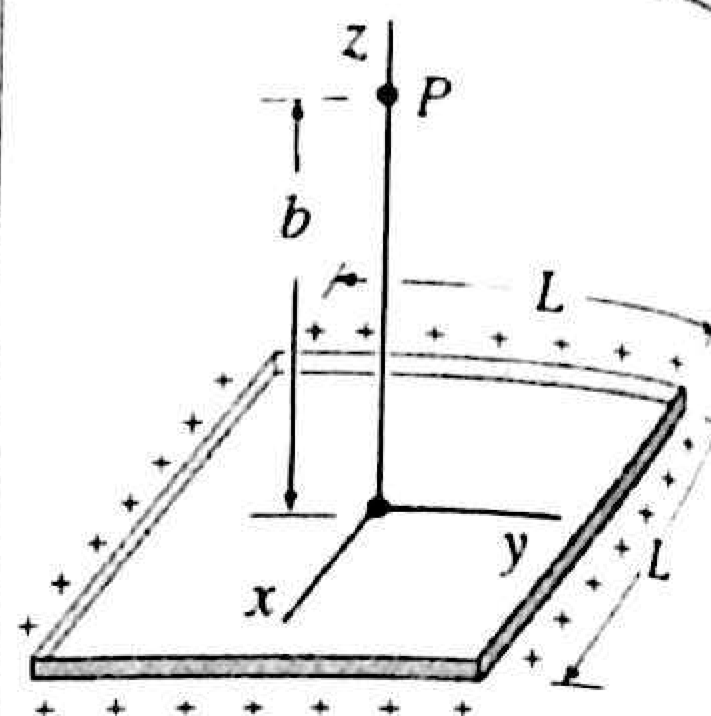
$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{L^2+4a^2}}\hat{y}$$

b) Línea carga infinita:

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a}\hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{y}$$

PR-2.07. *Campo en el eje de un cuadrado*

Una placa cuadrada de dimensiones $L \times L$ hecha de plexiglas, es frotada en sus bordes de manera tal que adquiere una carga uniformemente distribuida con densidad lineal λ (C/m). Halle el campo eléctrico en el eje z, a una distancia b respecto al centro de la placa.



Solución: El campo resultante en el punto P es la superposición vectorial de los cuatro campos debidos a las líneas de carga de longitud L a distancia a de sus centros.

$$\vec{E}_1 = \frac{2k\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{L^2+4a^2}}\hat{r}$$

Por simetría las componentes de estos campos en el plano x-y se cancelan. Las componentes según el eje z se suman.

$$\vec{E} = 4E_1\cos\theta\hat{z} = 4\left(\frac{2k\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{L^2+4a^2}}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\hat{z}$$

Tomando en cuenta que:

$$a = \sqrt{b^2+(L/2)^2} \qquad a^2 = b^2+(L/2)^2$$

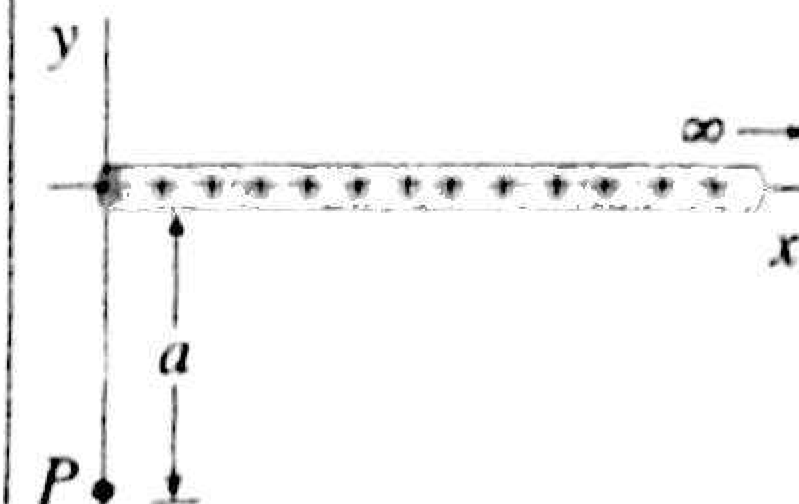
$$\vec{E} = \frac{4k\lambda Lb}{\left(b^2+\frac{L^2}{4}\right)\sqrt{b^2+\frac{L^2}{2}}}\hat{z}$$

Respuesta

$$\vec{E} = \frac{4k\lambda Lb}{\left(b^2+\frac{L^2}{4}\right)\sqrt{b^2+\frac{L^2}{2}}}\hat{z}$$

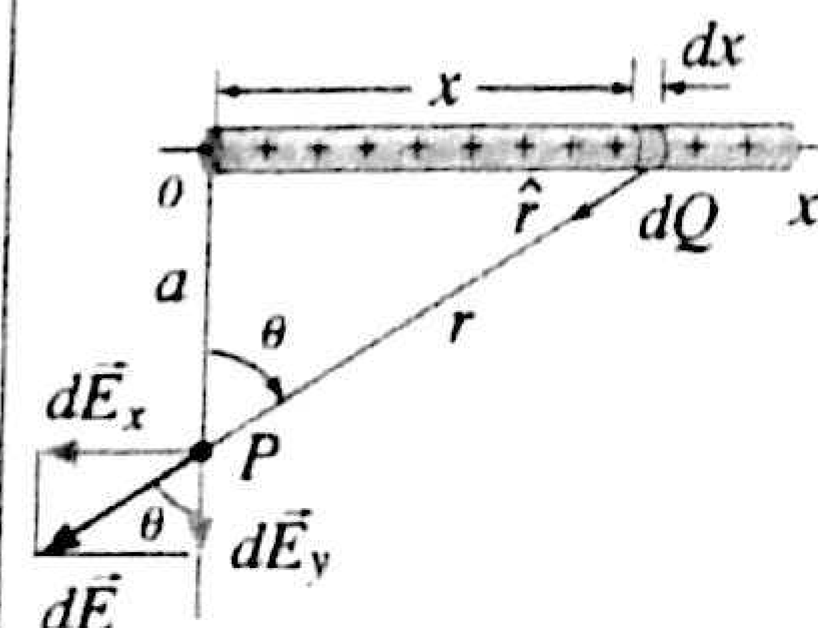
PR-2.08. *Campo $\vec{E}$ que siempre forma un ángulo de 45°*

Una barra aislante semi-infinita tiene una carga constante por unidad de longitud igual a λ. Demuestre que el campo eléctrico en un punto arbitrario P enfrente de la punta de la barra, forma un ángulo de 45° con la barra, independientemente de la distancia a.



Solución: Consideremos un elemento infinitesimal de longitud dx, a distancia x del extremo izquierdo de la barra. Este elemento contiene una carga $dQ = \lambda dx$ y está a una distancia r del punto P. El campo eléctrico que produce en P es:.

$$d\vec{E} = \frac{kdQ}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda dx}{r^2}\hat{r}$$



Las componentes cartesianas del vector $d\vec{E}$ son:

$$dE_x = -dE sen\theta = -\frac{k\lambda dx}{r^2}sen\theta$$

$$dE_y = -dE\cos\theta = -\frac{k\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

Como en el problema anterior escogemos como variable de integración el ángulo θ. Expresando x y r en términos de θ, tenemos:

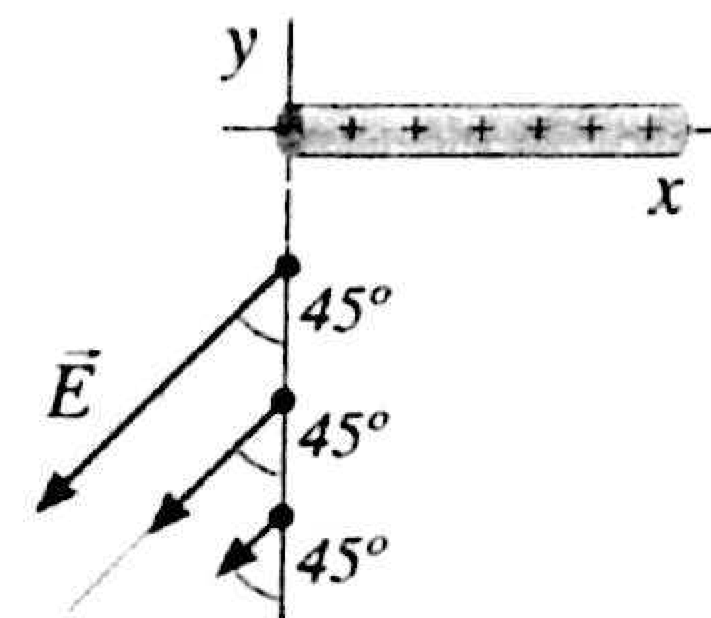
$$x = a\,tg\theta \quad \Rightarrow \quad dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$

$$r = a/\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2\sec^2\theta$$

Reemplazando dx y r^2 en las expresiones para las componentes del campo eléctrico y tomando en cuenta que cuando x varía entre los límites "0" e "∞", el ángulo θ varía entre 0 y $\pi/2$, se obtiene:

$$E_x = -\frac{k\lambda}{a}\int_0^{\pi/2} sen\theta d\theta = \frac{k\lambda}{a}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{k\lambda}{a}$$

$$E_y = -\frac{k\lambda}{a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta - \frac{k\lambda}{a}sen\theta\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{k\lambda}{a}$$



El módulo del campo eléctrico resultante decrece con el inverso de la distancia a:

$$E = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \sqrt{2}\frac{k\lambda}{a}$$

La dirección del vector $\bar{E}$ respecto al eje y es:

$$tg\phi = \frac{E_x}{E_y} = \frac{k\lambda / a}{k\lambda / a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 45^\circ$$

Este ángulo $\phi = 45^\circ$ es independientemente de la distancia a a la punta de la barra.

Respuesta:

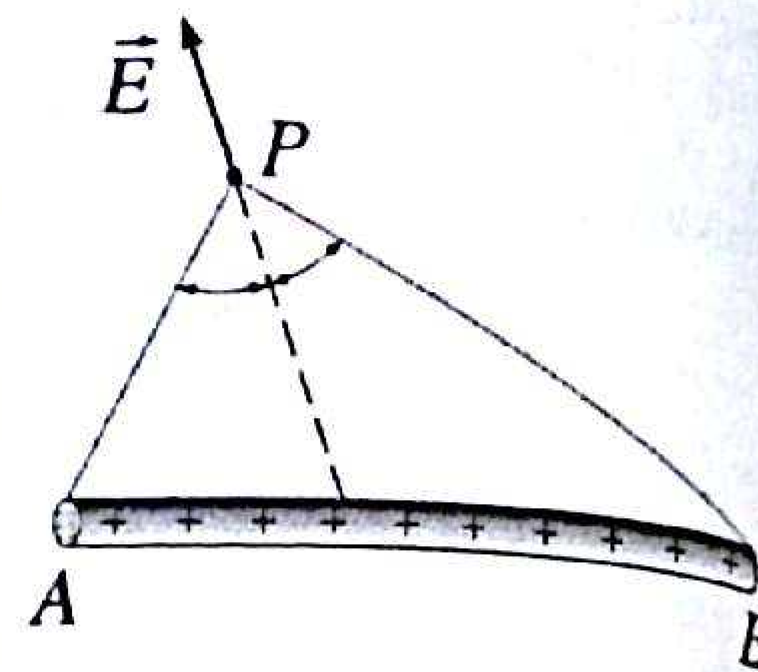
$$\bar{E} = \frac{k\lambda}{a}(-\hat{x} - \hat{y})$$
$\phi = 45^\circ$ (no depende de a)

PR-2.09. *El campo queda en la dirección de la bisectriz*

Sea una barra aislante de longitud finita $\overline{AB}$, que tiene una carga constante por unidad de longitud igual a λ.

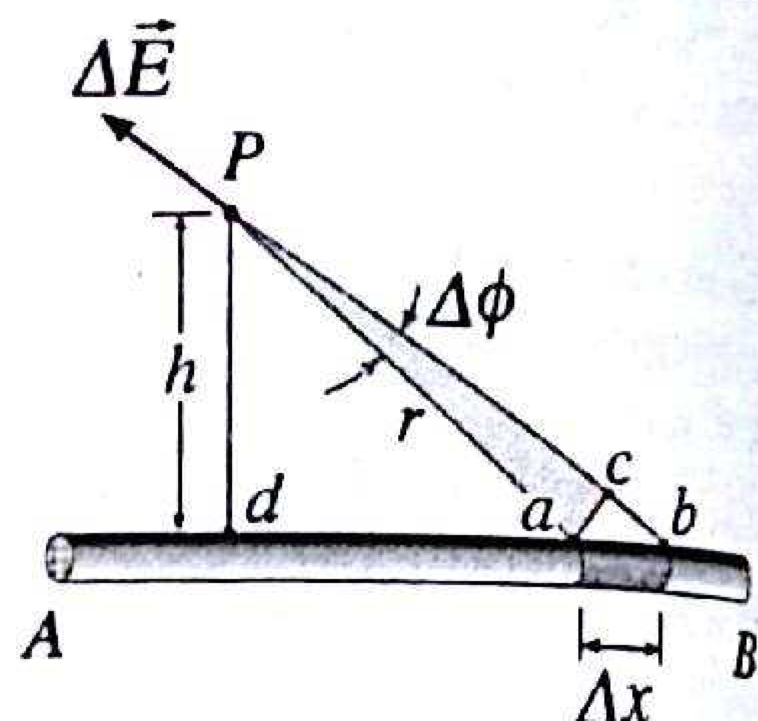
a) Demuestre que el campo eléctrico en un punto arbitrario P, a distancia h de la barra, siempre apunta en la dirección de la línea bisectriz del ángulo APB.

b) Verifique el resultado del problema anterior, es decir, que para una barra semi infinita, el campo $\bar{E}$ a una distancia cualquiera de un extremo forma 45° con la barra.



Solución: Consideremos un trozo muy pequeño de barra de longitud Δx a distancia r del punto P, que subtiende un ángulo $\Delta\phi$. En virtud de la semejanza de los dos triángulos ΔadP y Δacb, podemos escribir:

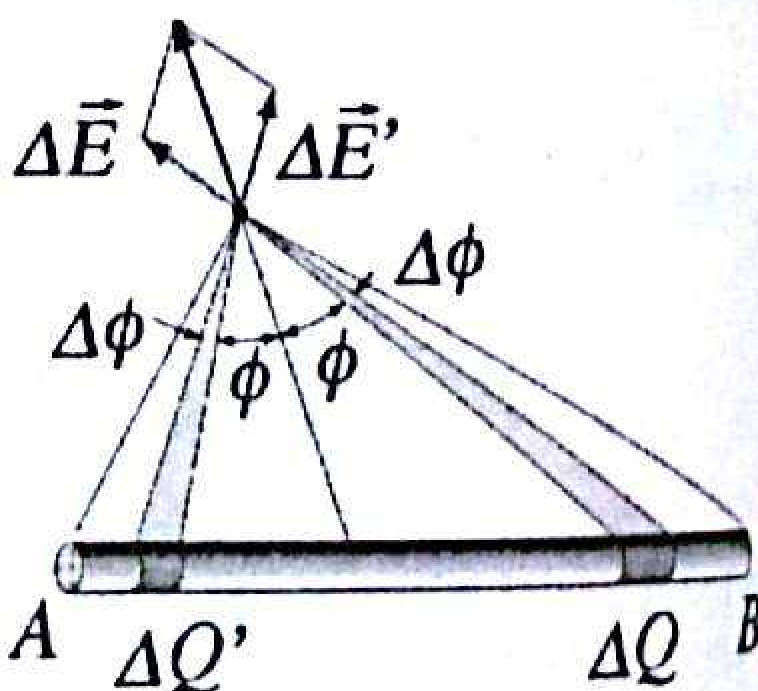
$$\frac{h}{r} = \frac{ac}{\Delta x} = \frac{r\Delta\phi}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{r^2 \Delta\phi}{h}$$



El campo $\Delta\bar{E}$ producido por la carga $\Delta Q = \lambda\Delta x$ es:

$$\Delta\bar{E} = \frac{k\Delta Q}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda\Delta x}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda(r^2\Delta\phi / h)}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda}{h}\Delta\phi\hat{r}$$

Como el factor $k\lambda/h$ es constante, vemos que el campo $\Delta\bar{E}$ depende únicamente del ángulo $\Delta\phi$ subtendido por ΔQ. Este resultado tiene como consecuencia que si consideramos dos elementos de carga con igual $\Delta\phi$, situados simétricamente con respecto a la bisectriz en el punto P, sus campos tendrán igual módulo y el vector $\bar{E}$ resultante quedará alineado en la dirección de la bisectriz.



b) Si se trata de una barra semi infinita y el punto P está a una distancia h del extremo, el ángulo total que subtiende este punto con los puntos extremos de la barra es 90°.

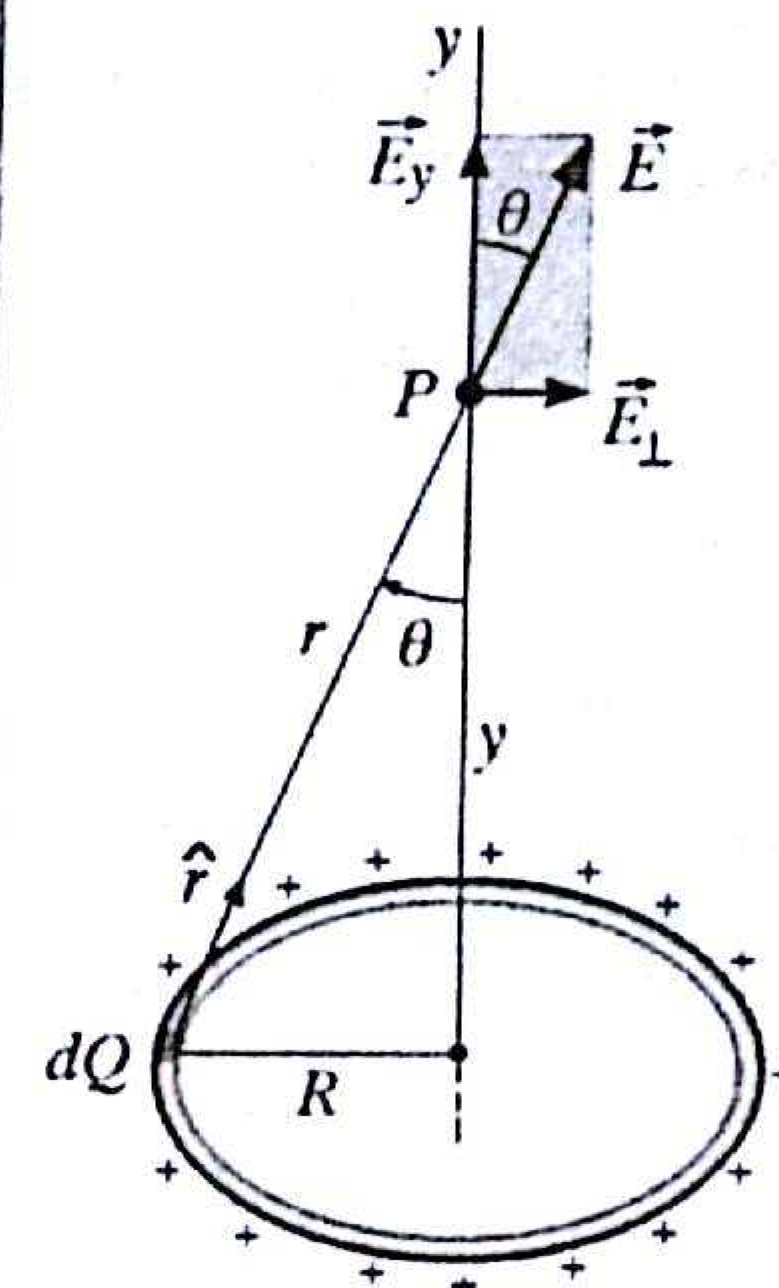
Por lo tanto, el vector campo total E quedará alineado en la bisectriz de este ángulo, es decir, formando un ángulo de 45° con la barra.

PR-2.10. *Anillo uniforme cargado*

Un anillo de radio R tiene una carga positiva, Q, repartida uniformemente. Calcule el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo, en un punto P que esté a una distancia y del centro.

Solución: Considerando en el anillo un segmento de carga dQ, el campo eléctrico que produce en P es:

$$d\bar{E} = \frac{kdQ}{r^2}\hat{r}$$



Podemos descomponer este vector $d\bar{E}$ en dos componentes: una, dE_y a lo largo del eje del anillo y la otra, $dE_\perp$ perpendicular a dicho eje. Ahora bien, para cada elemento de carga dQ existe un elemento correspondiente, dQ' ubicado en el lado opuesto del anillo. Las componentes $dE_\perp$ de estos elementos simétricos son iguales y opuestas y *se cancelan*.

Por lo tanto, el campo en P debe estar a lo largo del eje y del anillo y solo nos interesa la componente dE_y:

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{kdQ}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{ky}{r^3}dQ$$

Como todos los puntos del anillo están a igual distancia r del punto P, la suma de todas las contribuciones es:

$$E_y = \int dE_y = \frac{ky}{r^3}\int dQ = \frac{kQy}{r^3} = \frac{kQy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

Donde hemos hecho la sustitución:

$$r = (R^2 + y^2)^{1/2}$$

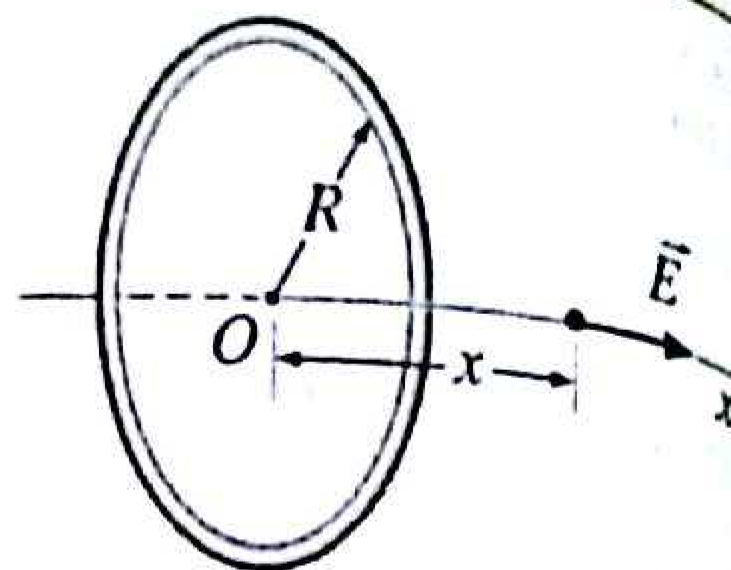
Observe una vez más que, para puntos ubicados a grandes distancias del anillo ($y >> R$), el resultado se reduce al campo eléctrico de una carga puntual.

Respuesta:

$$\bar{E} = \frac{kQy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\hat{y}$$

PR-2.11. *Valor máximo del campo de un anillo cargado*

En el problema anterior hemos calculado el campo eléctrico de un anillo de radio R con carga uniforme, Q, a lo largo del eje del anillo. Demuestre que el módulo del campo tiene una valor máximo a una distancia $x = R/\sqrt{2}$ a cada lado del centro y calcule ese valor máximo. Haga una gráfica de E como función de x.



Solución: El módulo del campo eléctrico en el eje x del anillo es:

$$E(x) = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

En los puntos del eje donde esta función presenta valores extremos se cumple:

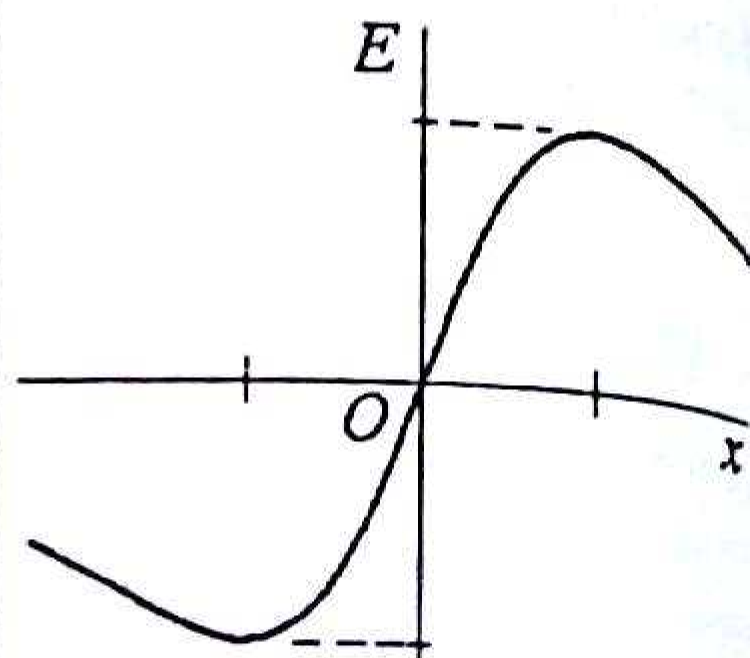
$$\frac{dE}{dx} = kQ[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}] = 0$$

Los valores extremos ocurren para:

$$R^2 + x^2 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm R/\sqrt{2}$$

Como la función es simétrica: $E(-x) = -E(x)$ y decrece a cero ($E \rightarrow 0$) para valores $|x| \mapsto \infty$, los puntos hallados corresponden a los máximos de $|E|$. El máximo es:

$$E_{max} = \frac{kQ(R/\sqrt{2})}{[R^2 + (R/\sqrt{2})^2]^{3/2}} = \frac{kQ/\sqrt{2}}{R^2(3/2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{9}}\frac{kQ}{R^2}$$



Respuesta:

$$x = \pm R/\sqrt{2}$$
$$E_{max} = \frac{2}{\sqrt{9}}\frac{kQ}{R^2}$$

PR-2.12. *Un disco cargado y un plano infinito*

Considere un disco de radio R que tiene una densidad de carga superficial uniforme σ (C/m^2).

a) Determine el campo eléctrico a lo largo del eje del disco a una distancia y de su centro.

b) Use el resultado anterior para determinar el campo eléctrico de una lámina infinita cargada uniformemente.

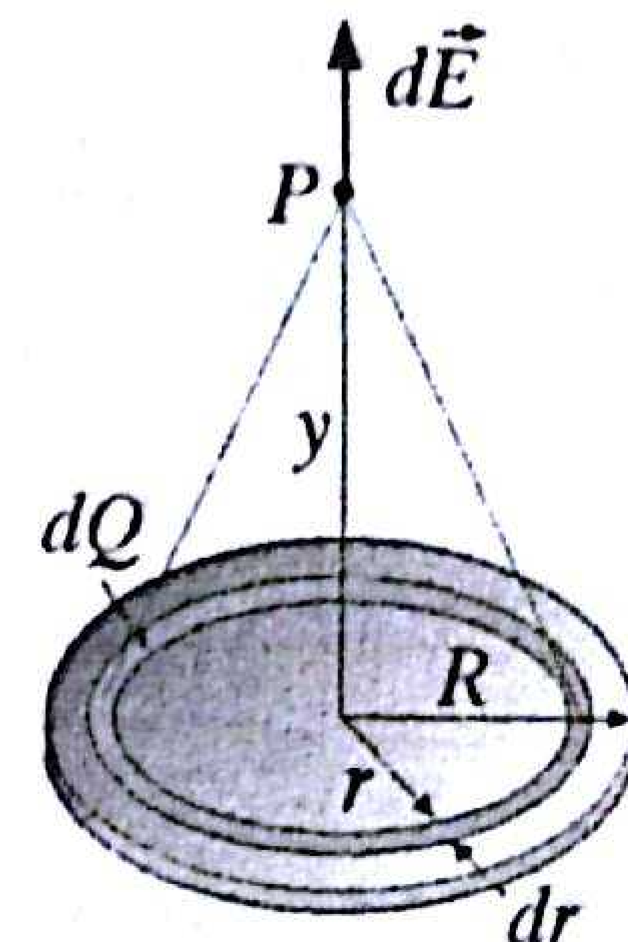
Solución: a) Consideremos al disco constituido por anillos concéntricos para luego sumar las contribuciones al campo eléctrico de todos los anillos. Un anillo de radio r y espesor dr tiene un área diferencial $dA = 2\pi r dr$.

La carga de este anillo es:

$$dQ = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr)$$

Usando el resultado del problema anterior para el campo de un anillo de radio r y carga dQ, escribimos:

$$dE = \frac{kQy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{ky(\sigma 2\pi r dr)}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$



El campo eléctrico total se halla integrando esta expresión entre los límites $r = 0$ y $r = R$, y observando que y es constante:

$$E = \int dE = ky\sigma\pi \int_{r=0}^{r=R} \frac{2rdr}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1}$$

$$E = \pi k\sigma y \frac{(r^2+y^2)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_{r=0}^{r=R} = 2\pi k\sigma[1 - \frac{y}{(R^2+y^2)^{1/2}}]$$

$$u = (r^2+y^2) \qquad p = -3/2$$

b) Para puntos en las proximidades del disco, o haciendo muy grande el radio del disco ($y \ll R$), el segundo término dentro del corchete tiende a cero y la ecuación se reduce a:

$$\vec{E}_P = 2\pi k\sigma\hat{z}$$

Es decir, en las proximidades del disco el campo es uniforme (no depende de la distancia y) y se comporta como si fuese de extensión infinita. Esto es razonable, ya que un disco infinito luce lo mismo desde todas partes.

Respuesta:

a) Para y positivo o negativo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}]\hat{y}$$

b) Lámina infinita:

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma\hat{y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}$$

PR-2.13. *Hoja grande de carga con un agujero circular*

A una hoja muy grande de papel que contiene una carga uniforme por unidad de área, σ (C/m^2), se le extrae una porción circular de radio R. ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto del eje del agujero a una distancia z del plano del papel?

Solución: Si aplicamos el principio de superposición, podemos considerar el campo eléctrico de un plano completo en ese punto, $\vec{E}_P$, como la suma de los campos de un disco circular, $\vec{E}_C$, más el campo debido al plano con el agujero circular, $\vec{E}_{P/C}$ (incógnita).

$$\vec{E}_P = \vec{E}_C + \vec{E}_{P/C} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{P/C} = \vec{E}_P - \vec{E}_C$$

El campo de un plano infinito es independiente de la distancia z:

$$\vec{E}_P = 2\pi k\sigma\hat{z}$$

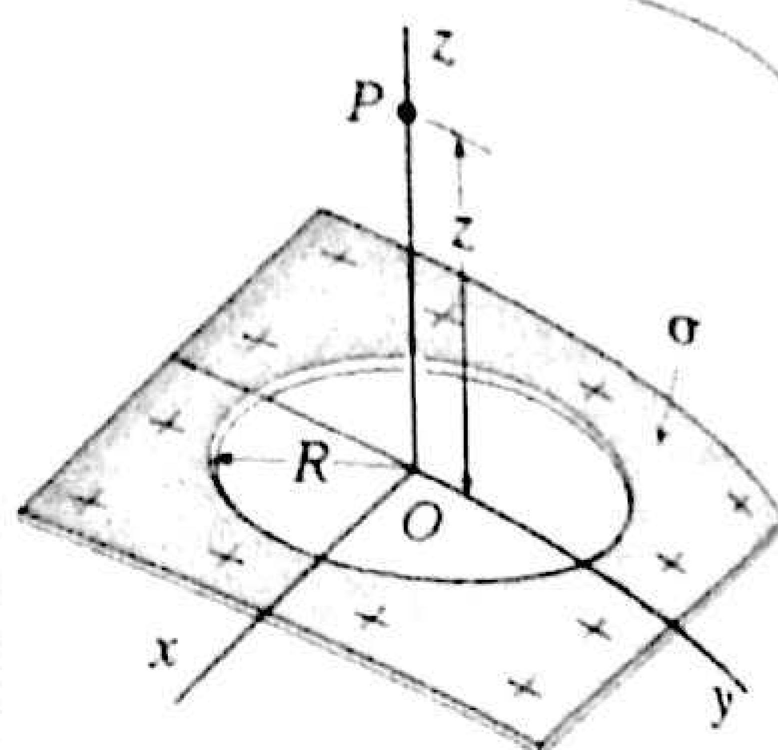
Mientras que el campo a distancia z de un disco circular de radio R es:

$$\vec{E}_C = 2\pi k\sigma[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\hat{z}$$

Utilizando estas dos expresiones se obtiene:

$$\vec{E}_{P/C} = 2\pi k\sigma\hat{z} - 2\pi k\sigma[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{2\pi k\sigma z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{z}$$

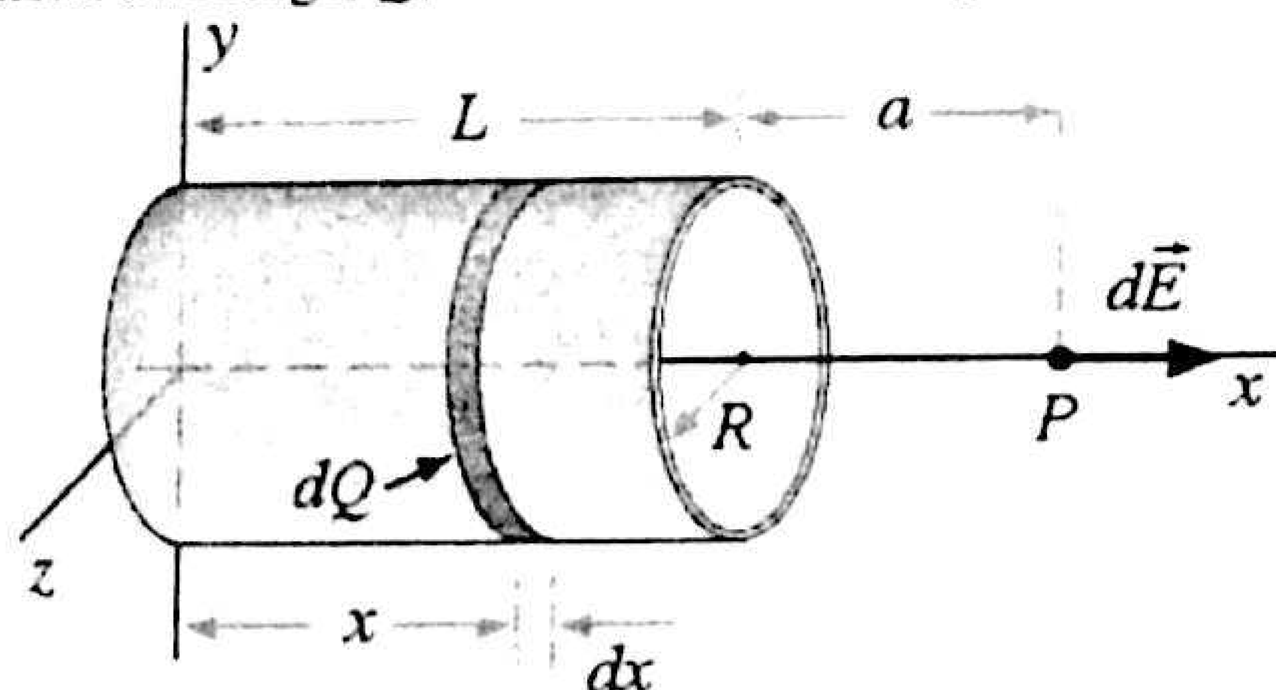


Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{2\pi k\sigma z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{z}$$

PR-2.14. *Campo eléctrico de un cascarón cilíndrico*

Un cascarón cilíndrico no conductor de radio R y longitud L tiene una carga, Q, uniforme sobre su superficie. Determine el campo eléctrico en un punto P en el eje x a una distancia a de un extremo.



Solución: Consideremos el cascarón cilíndrico como constituido por una serie de anillos de radio R. Un anillo elemental de longitud dx ubicado a una distancia x del origen tiene una carga $dQ = (Q/L)dx$. Este elemento queda a una distancia $x' = (L + a - x)$ del punto P y el campo eléctrico que produce allí viene dado por:

Campo de un anillo

$$d\vec{E} = \frac{kx'dQ}{(R^2+x'^2)^{3/2}}\hat{x}$$

$$dE = \frac{k(L+a-x)dQ}{[R^2+(L+a-x)^2]^{3/2}} = \frac{k(Q/L)(L+a-x)dx}{[R^2+(L+a-x)^2]^{3/2}}$$

La integral es del tipo:

$$\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1},$$

$$u = R^2 + (L+a-x)^2$$
$$p = -3/2$$

Para hallar el campo total en el punto P, integramos esta expresión sobre toda la longitud del tubo:

$$E = \frac{kQ}{L}\int_0^L \frac{(L+a-x)dx}{[R^2+(L+a-x)^2]^{3/2}} = \frac{(kQ/L)}{\sqrt{R^2+(L+a-x)^2}}\Bigg|_0^L$$

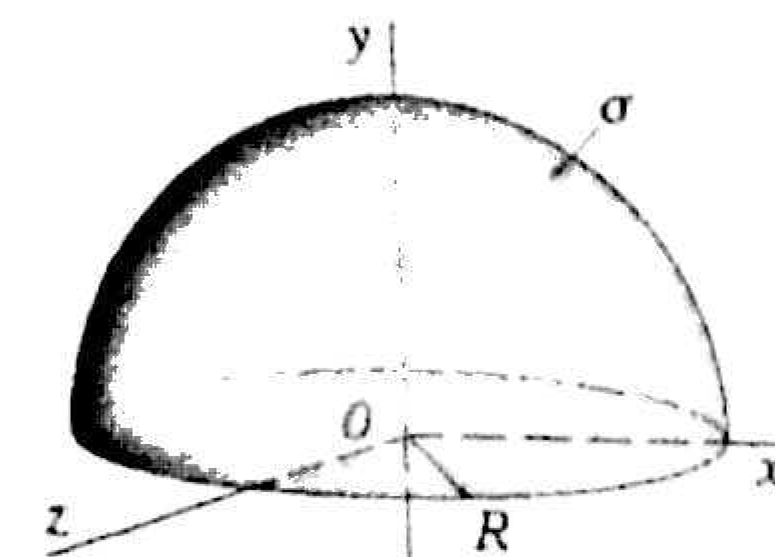
$$\vec{E} = \frac{kQ}{L}(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(L+a)^2}})\hat{x}$$

Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{L}(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(L+a)^2}})\hat{x}$$

PR-2.15. *Campo $\vec{E}$ de un cascarón semiesférico*

Un cascarón hemisférico no conductor de radio R tiene una carga, Q, distribuida uniformemente sobre su superficie. Determine el campo eléctrico en su centro de curvatura O.

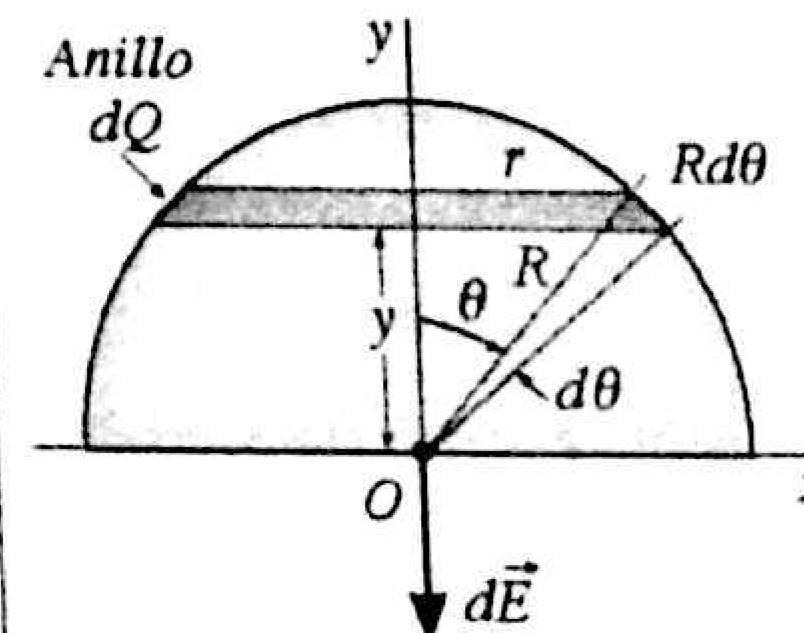


Solución: Consideremos el cascarón como constituido por una pila de anillos. Un elemento diferencial de carga consiste de un anillo circular de radio r alineado perpendicularmente a su eje y, a distancia y del origen. La carga que abarca este anillo es: $dQ = \sigma dA$, siendo el diferencial de área:

$$dA = 2\pi r(Rd\theta) = 2\pi(Rsen\theta)(Rd\theta) = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$$

La densidad superficial de carga es la carga total dividida por el área del cascarón:

$$\sigma = Q/A = Q/2\pi R^2$$



Si usamos el resultado obtenido anteriormente para el campo producido por un anillo de carga uniforme, y lo aplicamos al anillo elemental de radio r y a distancia y del centro O, podemos escribir:

$$dE = \frac{kydQ}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{ky\sigma dA}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{ky\sigma 2\pi R^2 sen\theta d\theta}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

Este vector $d\vec{E}$ queda en la dirección $-y$. Sustituyendo las distancias:

$$y = Rcos\theta \qquad (r^2 + y^2) = R^2$$

$$dE = \frac{k\sigma(Rcos\theta)2\pi R^2 sen\theta d\theta}{R^3} = 2\pi k\sigma\cos\theta sen\theta d\theta$$

El campo total es la integral sobre todos los anillos hasta cubrir el hemisferio:

$$E = 2\pi k\sigma \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \, sen\theta d\theta = 2\pi k\sigma \int_{\theta=0}^{\pi/2} sen\theta d(sen\theta)$$

Integrando, se obtiene finalmente:

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma \frac{sen^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} (-\hat{y}) = \pi k\sigma(-\hat{y}) = \frac{kQ}{2R^2}(-\hat{y})$$

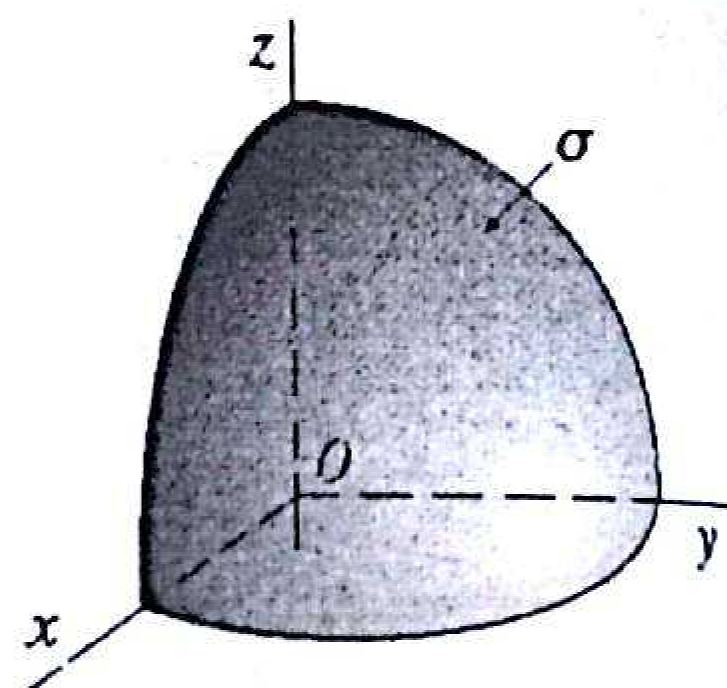
Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{2R^2}(-\hat{y})}$$

PR-2.16. *Campo de un octante de esfera*

Un octante de una esfera de radio R que yace entre los tres planos de coordenadas xy, yz y zx, tiene en su superficie una carga con densidad uniforme σ (C/m^2). Halle el campo eléctrico en el origen O de coordenadas.

Solución: Para hallar el campo eléctrico en O podemos considerar el octante como la cuarta parte de un hemisferio. Según el resultado del problema anterior, el campo en O debido a un hemisferio que yace sobre el plano xy es: $\vec{E}_h = \pi k\sigma(-\hat{z})$. Como el hemisferio consiste de cuatro octantes y debido a la simetría, el aporte de un octante será:



$$\vec{E}_z = \frac{1}{4}\vec{E}_h = \frac{1}{4}\pi k\sigma(-\hat{z})$$

Si este octante fuera parte de un hemisferio que yace en el plano yz, su aporte al campo es:

$$\vec{E}_x = \frac{1}{4}\pi k\sigma(-\hat{x})$$

Siguiendo el mismo análisis, si el octante fuera parte de un hemisferio que yace en el plano zx, su aporte es:

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4}\pi k\sigma(-\hat{y})$$

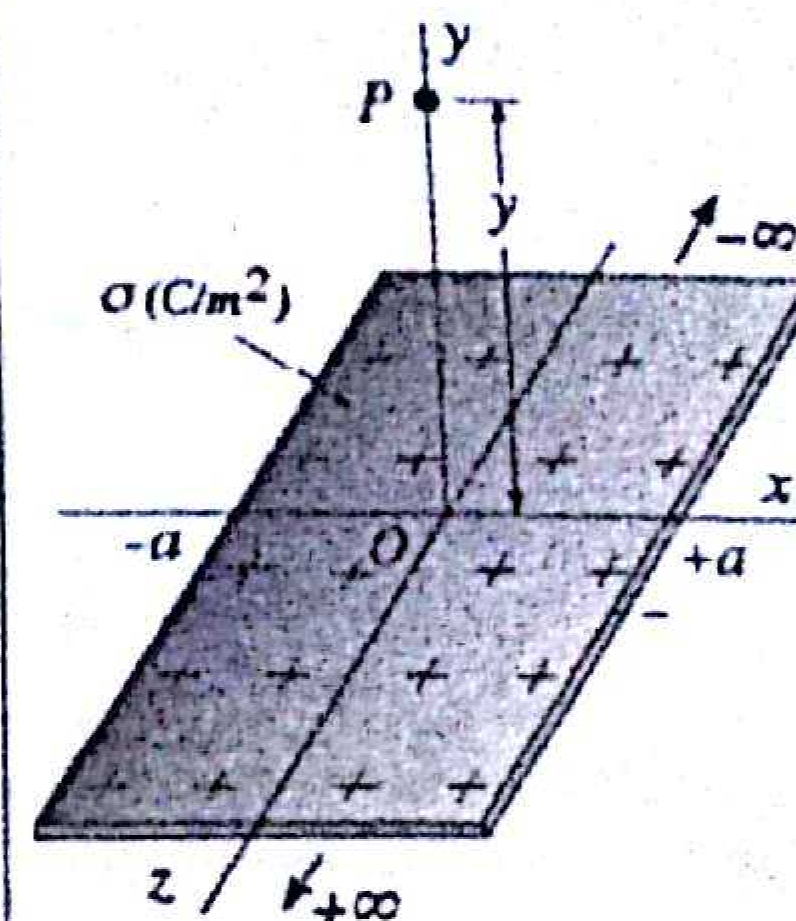
Por lo tanto, el campo total que produce el octante con densidad de carga σ en el punto O es:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = -\frac{1}{4}\pi k\sigma(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4}\pi k\sigma(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})}$$

PR-2.17. *Campo de una hoja de carga plana y larga*



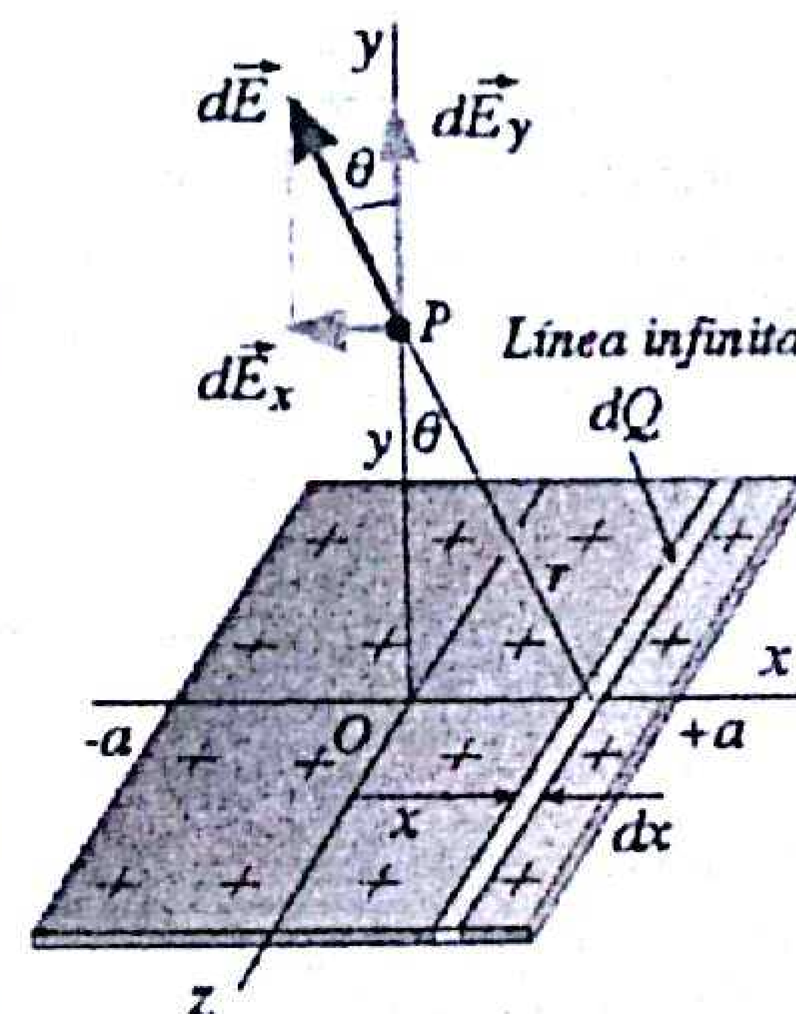
Una lámina aislante delgada, de ancho $2a$ e infinitamente larga tiene una densidad superficial de carga uniforme σ (C/m^2).
a) Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado a distancia y en el eje de simetría, perpendicular el plano.
b) Compruebe que en el límite $2a >> y$, el resultado se reduce al campo debido a una hoja de carga ilimitada.

Solución: a) Procedemos a dividir la lámina en tiras delgadas y largas. Una tira finita de largo L y ancho dx ubicada a distancia x del eje z, tendrá una carga $dQ = \sigma(Ldx)$, de modo que la *carga por unidad de longitud* es:

$$\lambda = \frac{dQ}{L} = \sigma dx$$

Aplicamos ahora la expresión para el campo eléctrico producido por una línea infinita de carga en el punto P a distancia r:

$$d\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$$



Se observa que las componentes $d\vec{E}_x$ en dirección paralela al plano de la lámina provenientes de elementos simétricos a cada lado del eje z, se cancelan. Por lo tanto, sólo nos interesa la componente perpendicular:

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{2k\lambda}{r}\cos\theta = \frac{2k\sigma dx}{r}\cos\theta$$

Sustituyendo r y dx en términos del ángulo θ:

$$r = y/\cos\theta,$$

$$x = y\,tg\theta, \quad dx = y\sec^2\theta\, d\theta$$

$$tg\theta_0 = a/y$$

El campo debido a toda la lámina es:

$$E_y = 2k\sigma \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{dx}{r}\cos\theta = 2k\sigma \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{y\sec^2\theta d\theta}{y/\cos\theta}\cos\theta$$

$$E_y = 2k\sigma \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta = 2k\sigma\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0} = 4k\sigma\theta_0 = 4k\sigma arctg(\frac{a}{y})$$

b) En el límite ($y << a$) entonces $arctg(a/y) \rightarrow \pi/2$ la ecuación anterior se reduce a:

$$E = 2\pi k\sigma = 2\pi(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0})\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

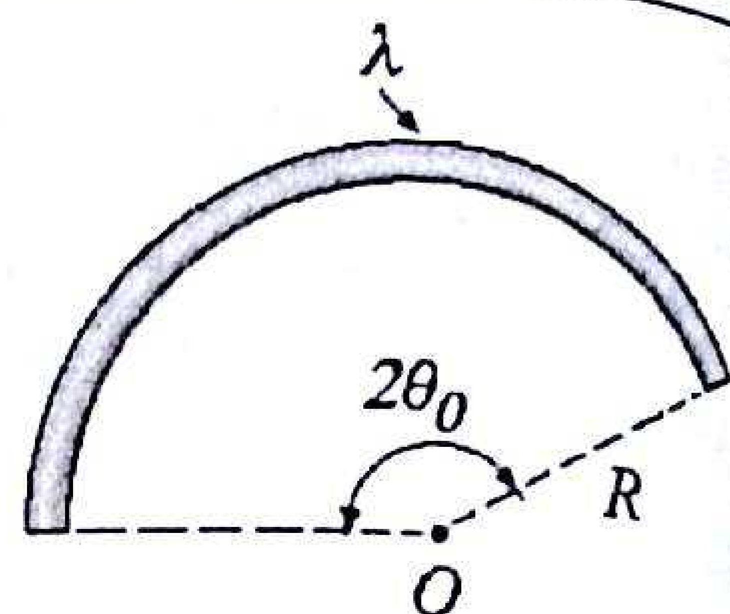
Esta expresión coincide con la hallada anteriormente para un disco circular de radio infinito.

Respuesta:

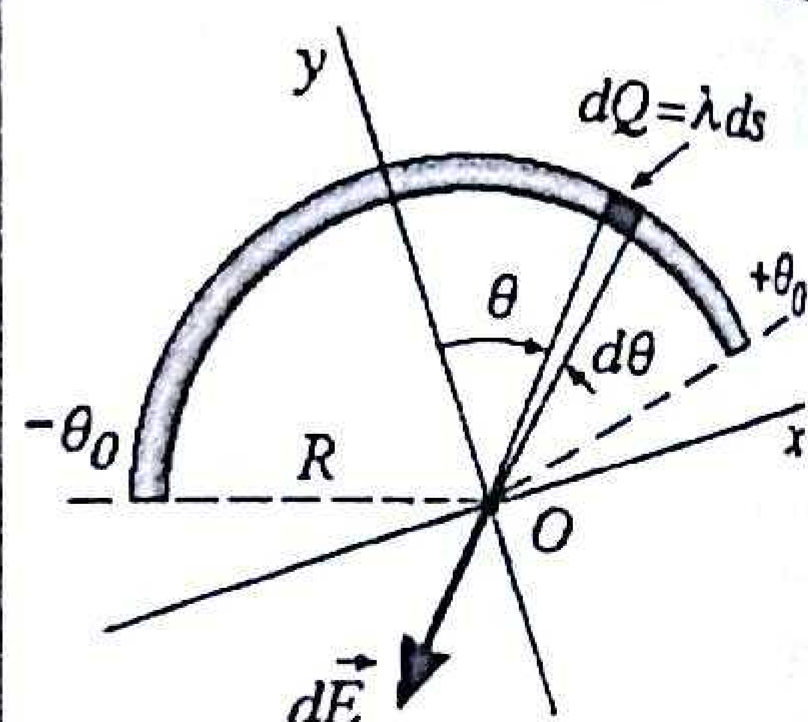
a) Tira infinita de ancho $2a$:
$\vec{E} = 4k\sigma arctg(\frac{a}{y})\hat{y}$
b) Hoja de carga infinita:
$\vec{E} = 2\pi k\sigma\hat{y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}$

PR 2.18. *Una barra doblada en forma de arco.*

Una barra delgada de material aislante con carga por unidad de longitud constante, λ, está doblada formando un arco circular de radio R. El arco sustenta un ángulo $2\theta_0$ respecto del centro de la circunferencia. Determine el campo eléctrico en el centro de la circunferencia.



Solución: Para simplificar los cálculos escogemos los ejes de forma tal que el eje y divide al ángulo en dos partes iguales. La contribución al campo eléctrico en el punto O debida a un elemento de arco $ds = Rd\theta$ es radial y tiene un valor:



$$dE = \frac{kdQ}{R^2} = \frac{k\lambda ds}{R^2} = \frac{k\lambda Rd\theta}{R^2} = \frac{k\lambda d\theta}{R}$$

En virtud de la simetría respecto del eje y, cuando sumamos todos los aportes de elementos simétricos la componente x del campo eléctrico se anula:

$$E_x = 0$$

Por otra parte, la componente E_y es:

$$E_y = \int dE\cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta d\theta = \frac{k\lambda}{R}sen\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0}$$

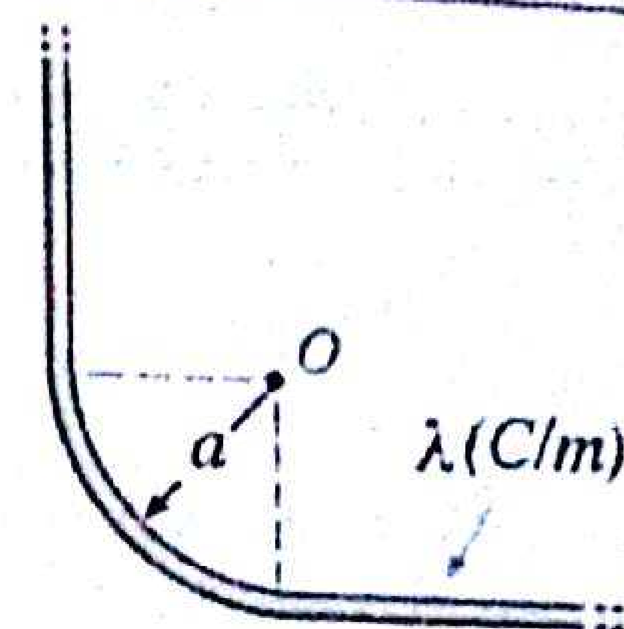
$$E_y = \frac{2k\lambda}{R}sen\theta_0$$

Respuesta:

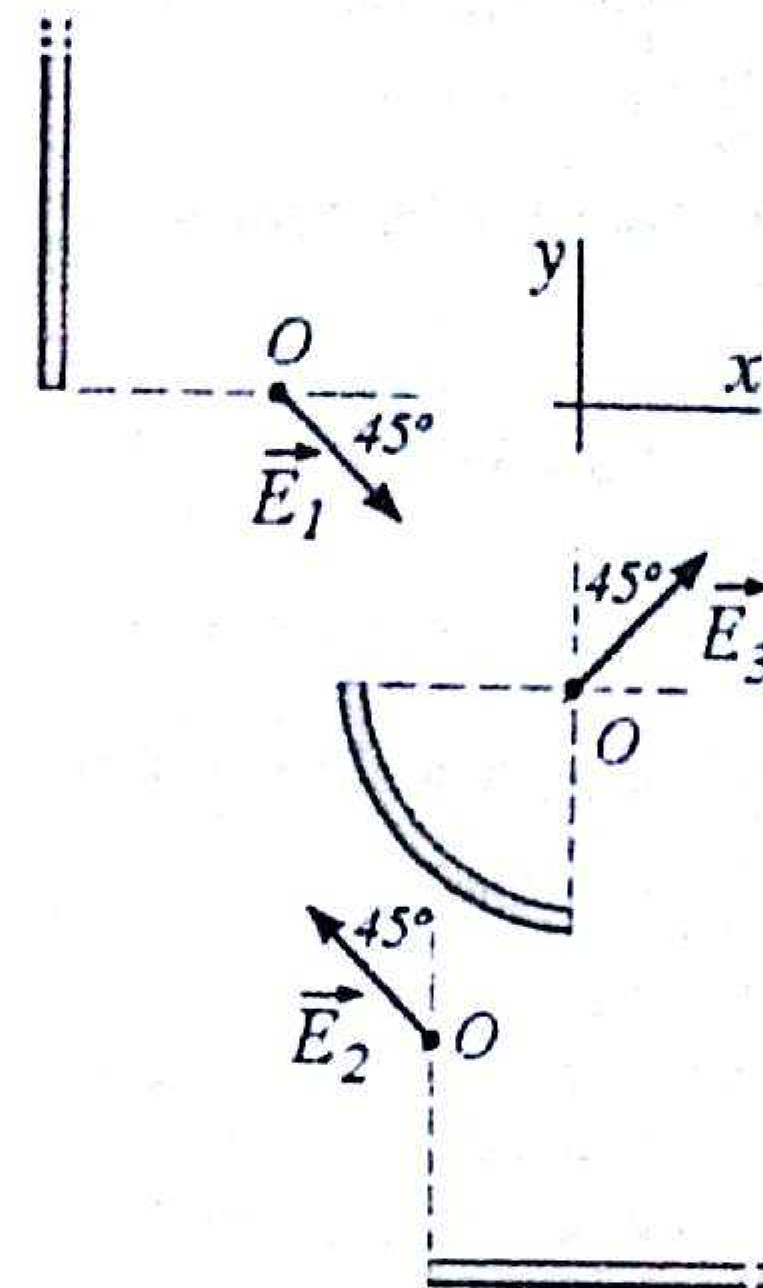
$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}sen\theta_0(-\hat{y})$
(en la dirección de la bisectriz)

PR-2.19. *Alambre largo doblado a 90º*

Un alambre largo está doblado de forma tal que su parte curva tiene un radio a y las dos partes rectas quedan a 90º. Si la carga por unidad de longitud del alambre es λ, determine el campo eléctrico en el centro O de curvatura.



Solución: Podemos descomponer el alambre en los tres pedazos mostrados, dos rectas semi infinitas y un arco circular. Hemos visto que el campo de un alambre semi infinito en un punto a distancia a de la punta forma un ángulo de 45° y no depende de la distancia a. Para el alambre vertical y horizontal, podemos escribir:



$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}-\hat{y}) \qquad \vec{E}_2 = \frac{k\lambda}{a}(-\hat{x}+\hat{y})$$

Para el alambre doblado en forma de arco circular, aplicamos el resultado del problema anterior con $R = a$ y $2\theta_0 = \pi/2$, es decir, $\theta_0 = \pi/4$.

$$\vec{E}_3 = \frac{2k\lambda}{a}sen\theta_0(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}) = \frac{2k\lambda}{a}sen\frac{\pi}{4}(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}) = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}+\hat{y})$$

Superponiendo los tres campos: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$, se obtiene:

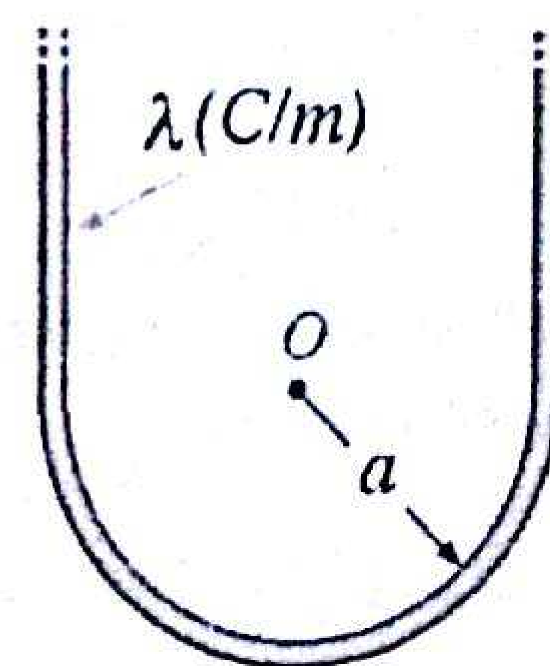
$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}-\hat{y}) + \frac{k\lambda}{a}(-\hat{x}+\hat{y}) + \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}+\hat{y}) = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}+\hat{y})$$

Respuesta:

$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x}+\hat{y})$

PR-2.20. *Alambre largo doblado en forma de U*

Un alambre muy largo está doblado en forma de U de forma tal que sus dos partes rectas quedan paralelas y su parte curva tiene un radio a. Si la carga por unidad de longitud del alambre es λ, determine el campo eléctrico en el centro O de la curva



Solución: Al igual que en el problema anterior, se procede a descomponer el alambre en tres pedazos: dos rectas semi-infinitas paralelas y media circunferencia.

Los campos debidos a los alambres rectos 1 y 2 a una distancia a de sus extremos, son respectivamente:

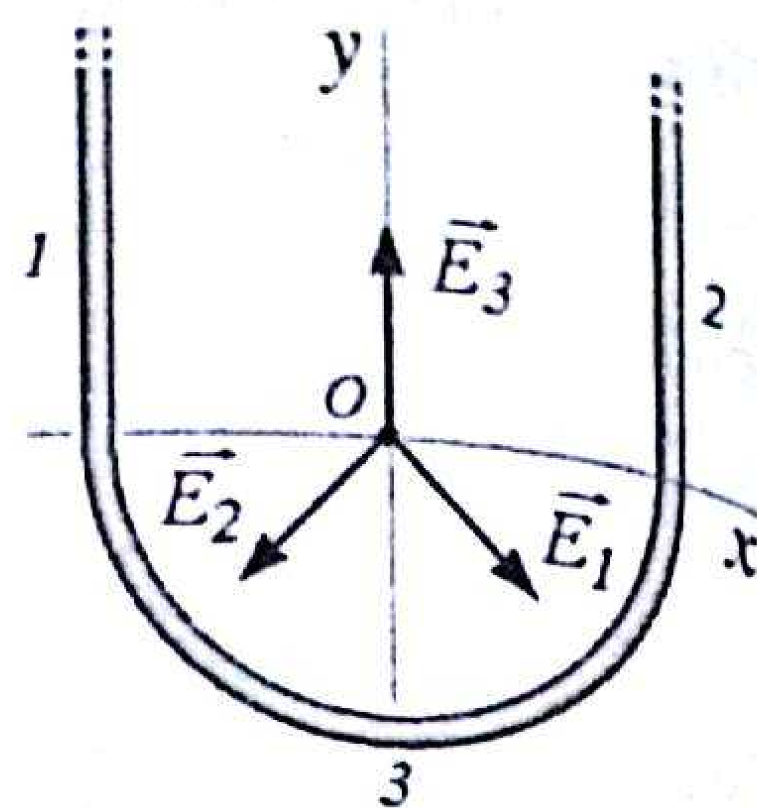
$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x} - \hat{y}) \qquad \vec{E}_2 = \frac{k\lambda}{a}(-\hat{x} - \hat{y})$$

Para el alambre 3 doblado en forma de arco circular de radio a y ángulo $2\theta_0 = \pi$, ($\theta_0 = \pi/2$), el campo es:

$$\vec{E}_3 = \frac{2k\lambda}{a}(sen\theta_0)\hat{y} = \frac{2k\lambda}{a}(sen\frac{\pi}{2})\hat{y} = \frac{2k\lambda}{a}\hat{y}$$

Superponiendo los tres campos: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}(\hat{x} - \hat{y}) + \frac{k\lambda}{a}(-\hat{x} - \hat{y}) + \frac{2k\lambda}{a}\hat{y} = 0$$

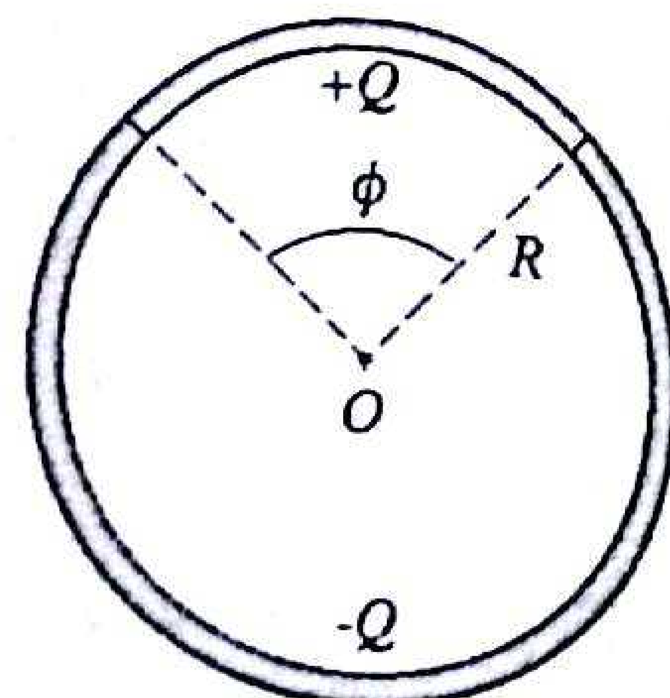


Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

PR-2.21. *Campo en el centro de un anillo compuesto.*

Un anillo delgado de material aislante de radio R, tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente en el segmento de arco subtendido por un ángulo ϕ. En el resto del anillo hay una carga negativa $-Q$ uniforme. Determine el vector campo eléctrico en el centro del anillo.

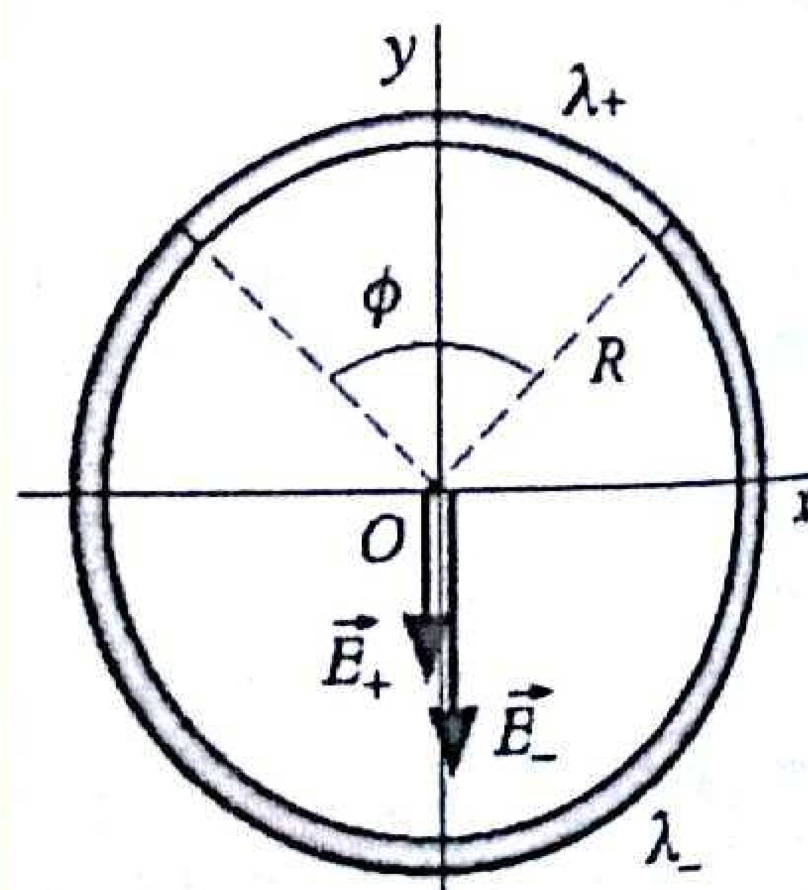


Solución: En esta distribución podemos aprovechar el resultado del problema anterior para el campo de una barra doblada en forma de arco y superponer los campos debidos a las dos secciones diferentes del anillo.

Para la sección superior, la carga positiva $+Q$ está distribuida sobre un arco de longitud $R\phi$ y su densidad lineal de carga es: $\lambda_+ = +Q/R\phi$. El campo producido en el centro apunta hacia abajo:

$$\vec{E}_+ = \frac{2k\lambda_+}{R}sen\theta_0(-\hat{y}) = \frac{2kQ}{R^2\phi}sen\frac{\phi}{2}(-\hat{y})$$

Para la sección inferior la carga negativa $-Q$ está distribuida sobre un arco de longitud $R(2\pi-\phi)$ y su densidad lineal de carga es: $\lambda_- = Q/R(2\pi-\phi)$. El campo en el centro también apunta hacia abajo:



$$\vec{E}_- = \frac{2k\lambda_-}{R}sen\theta_0(-\hat{y}) = \frac{2kQ}{R^2(2\pi-\phi)}sen(\pi - \frac{\phi}{2})(-\hat{y})$$

Tomando en cuenta que $sen(\pi - \phi/2) = +sen(\phi/2)$ y sumando las dos contribuciones $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$, se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{2kQ}{R^2}\left[\frac{1}{\phi} + \frac{1}{2\pi-\phi}\right]sen\frac{\phi}{2}(-\hat{y})$$

De modo que el campo resultante es:

$$\vec{E} = \frac{4\pi kQ}{R^2\phi(2\pi-\phi)}sen\frac{\phi}{2}(-\hat{y})$$

Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{4\pi kQ}{R^2\phi(2\pi-\phi)}sen\frac{\phi}{2}(-\hat{y})}$$

PR-2.22. *Anillo con carga no uniforme.*

Una barra aislante delgada se dobla para formar una circunferencia de radio a. La barra tiene una densidad de carga:

$$\lambda = \lambda_o sen\,\theta$$

Donde λ_o es una constante positiva y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo. Halle el vector campo eléctrico en el centro de la circunferencia.

Solución: Si se divide la barra en elementos de arco de carga dQ, el campo elemental es:

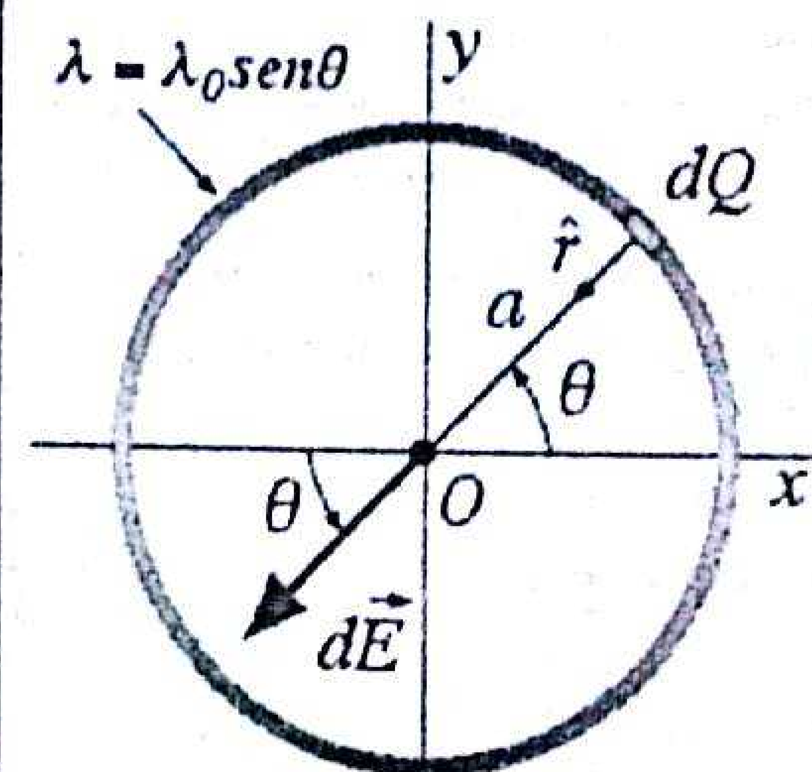
$$d\vec{E} = \frac{kdQ}{a^2}\hat{r} = \frac{k\lambda ds}{a^2}\hat{r} = \frac{k\lambda a d\theta}{a^2}\hat{r} = \frac{k\lambda_0 sen\theta d\theta}{a}\hat{r}$$

Según el sistema de coordenadas mostrado en la figura, la componente x del campo total es:

$$E_x = -\int dE\cos\theta = -\frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} sen\theta\cos\theta d\theta$$

$$E_x = -\frac{k\lambda_0}{a}\frac{sen^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

La anulación de la componente E_x es consecuencia de que la distribución de carga es simétrica respecto al eje y.



$$sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\theta)$$

Por otra parte, la componente y del campo total es:

$$E_y = -\int dE sen\theta = -\frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} sen^2\theta d\theta$$

Por lo tanto, el campo en el centro del anillo es:

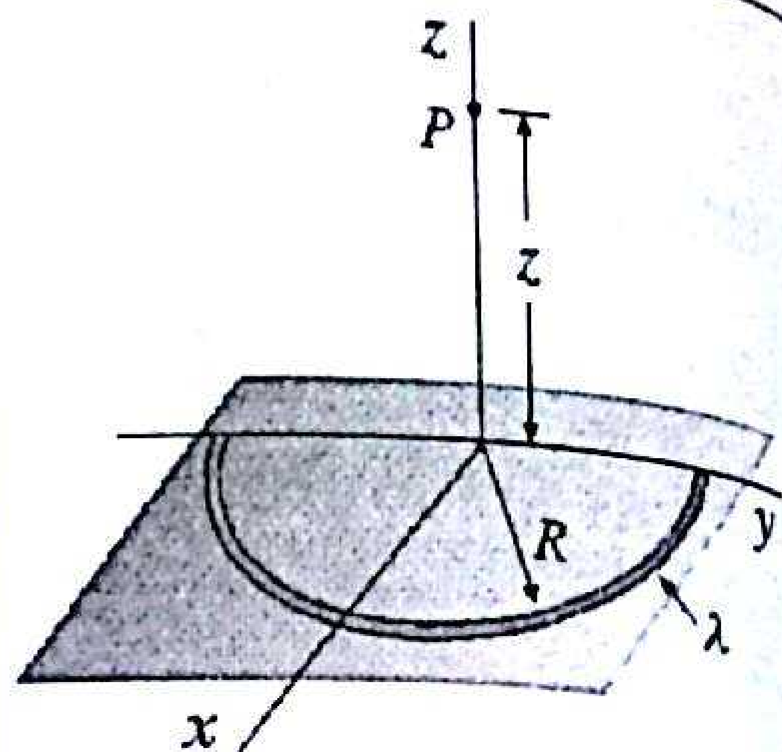
$$E_x = -\frac{k\lambda_0}{a}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{4}\right|_0^{2\pi} = -\frac{k\pi\lambda_0}{a}$$

Respuesta:

$$\bar{E} = \frac{k\pi\lambda_0}{a}(-\hat{y})$$

PR-2.23. *Campo enfrente de un semi aro cargado.*

Una distribución de carga con densidad lineal λ y radio R es una semi-circunferencia orientada en el plano xy, con su bisectriz coincidiendo con el eje x, y con su centro en el origen del sistema de coordenadas. Determine el vector campo eléctrico a una distancia z del origen a lo largo del eje z.



Solución: Consideremos en el semi aro un elemento diferencial de carga dQ con posición angular θ respecto al eje x. Su aporte al campo eléctrico en el punto P es:

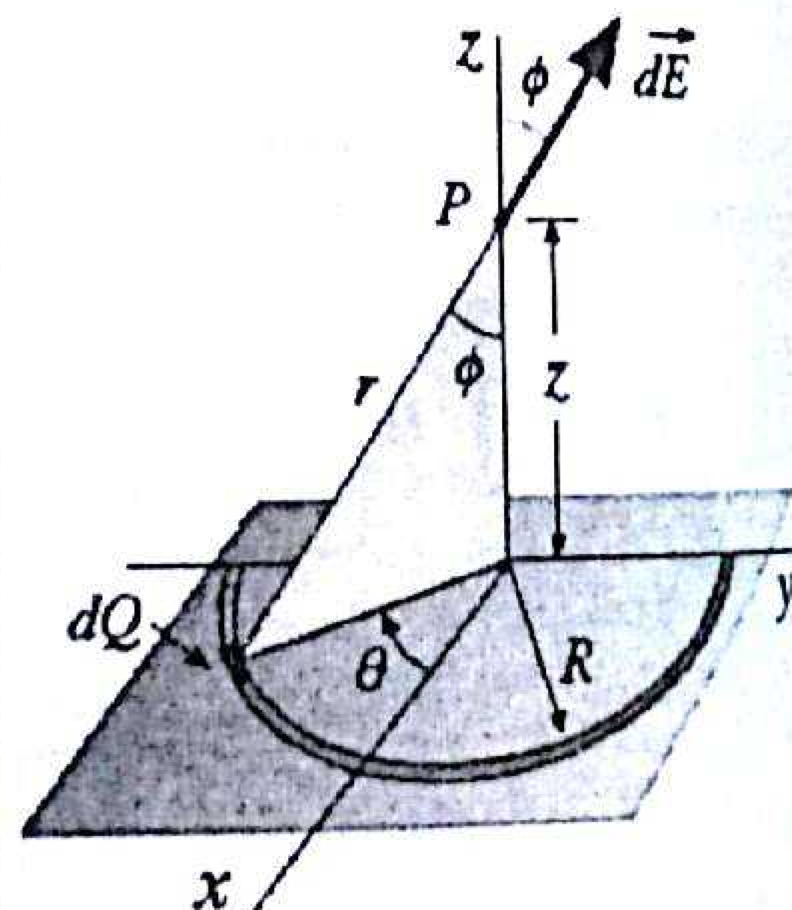
$$d\bar{E} = \frac{kdQ}{r^2}\hat{r} = \frac{k\lambda Rd\theta}{r^2}\hat{r}$$

Podemos descomponer este vector en dos componentes: Una, $dE_\perp = dE\cos\phi$ perpendicular al plano del semi aro y la otra, $dE_{||} = dEsen\phi$, paralela al mismo plano. Como todos los aportes $d\bar{E}_\perp$ quedan en el eje z, podemos integrar para hallar la componente z del campo total:

$$E_z = \int dE_\perp = \int dE\cos\phi = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{k\lambda Rd\theta}{r^2}\cos\phi$$

Tanto r como ϕ son constantes y además $r^2 = z^2 + R^2$, y $\cos\phi = z/r$. Por consiguiente:

$$E_z = \frac{k\lambda R\cos\phi}{r^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{k\lambda R(z/r)}{r^2}\pi = \frac{k\pi\lambda Rz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$



Por otra parte, la componente paralela $d\bar{E}_{||}$ tiene componentes ortogonales x e y. Cuando integramos la componente $d\bar{E}_y$, debido a la simetría, resulta nula ($\bar{E}_y = 0$). Calculemos la componente $\bar{E}_x$:

$$E_x = -\int dE_{||}\cos\theta = -\int dEsen\phi\cos\theta$$

$$E_x = -\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{k\lambda Rd\theta}{r^2} sen\phi\cos\theta = -\frac{k\lambda Rsen\phi}{r^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{k\lambda R(R/r)}{r^2} sen\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -\frac{2k\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Podemos escribir ahora la expresión para el vector campo eléctrico total en el punto P:

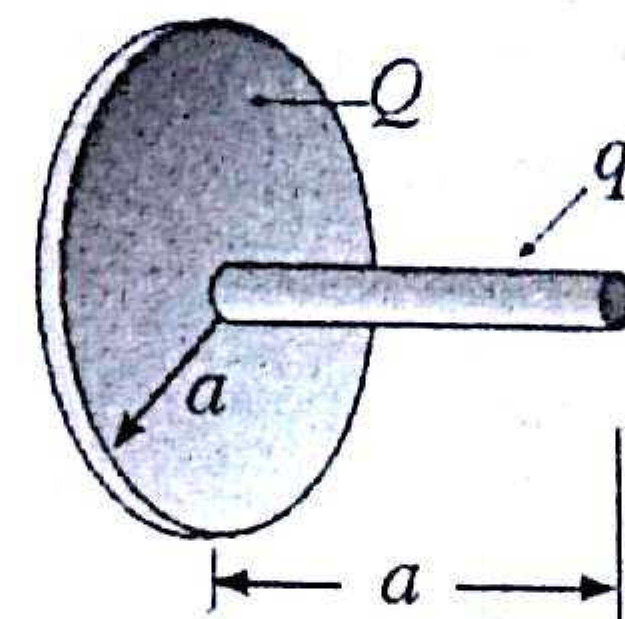
$$\bar{E} = \frac{k\lambda R}{(z^2+R^2)^{3/2}}[-2R\hat{x} + \pi z\hat{z}]$$

Respuesta:

$$\bar{E} = \frac{k\lambda R}{(z^2+R^2)^{3/2}}[-2R\hat{x} + \pi z\hat{z}]$$

PR-2.24. *Fuerza de repulsión entre un disco y una barra*

Sea una barra de longitud a, con carga total q uniformemente repartida. La barra se coloca en el eje de un disco circular aislante de radio a y también uniformemente cargado con carga Q, tal que un extremo de la barra queda casi tocando el centro del disco. Determine la fuerza de repulsión entre la barra y el disco.

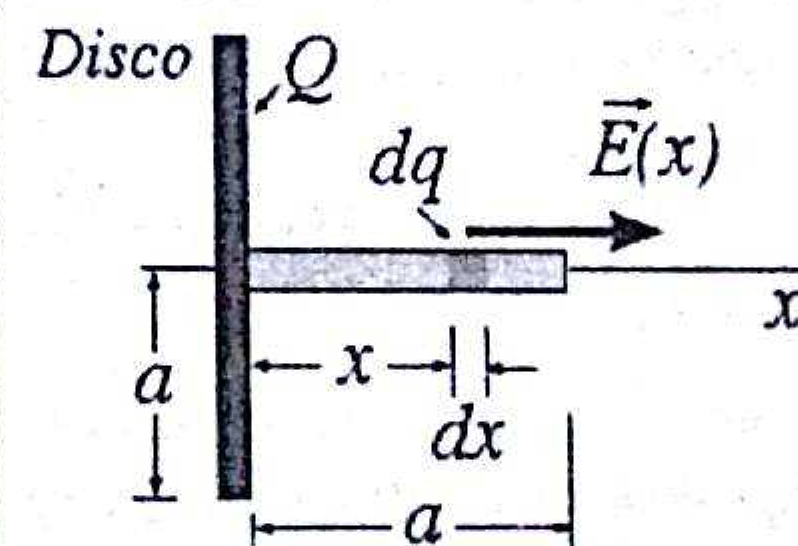


Solución: Consideremos en la barra, un segmento de longitud dx ubicado a distancia x del centro del disco. La carga contenida en este elemento infinitesimal es:

$$dq = \lambda dx = \left(\frac{q}{a}\right)dx$$

Por otra parte, el campo eléctrico producido por un disco de radio a en ese punto del eje, a distancia x de su centro es:

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]\hat{x}$$



Siendo σ la densidad superficial de carga del disco (en este caso $\sigma = Q/\pi a^2$). De modo que el elemento de carga dq de la barra será repelido a lo largo del eje del disco por una fuerza de módulo:

$$d\bar{F} = \bar{E}dq = 2\pi k\sigma[\,1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}](\frac{q}{a})dx\hat{x}$$

$$\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1}$$

Para obtener la fuerza total sobre la barra, se integra esta expresión con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = a$.

$$u = (x^2 + a^2)$$

$$du = 2xdx \qquad p = -1/2$$

$$\bar{F} = \hat{x}2\pi k(\frac{Q}{\pi a^2})(\frac{q}{a})\int_0^a [\,1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}]dx$$

$$\bar{F} = \hat{x}(\frac{kqQ}{a^3})[\,2\int_0^a dx - \int_0^a \frac{2xdx}{(x^2+a^2)^{1/2}}]$$

Después de integrar, se obtiene:

$$\bar{F} = \hat{x}(\frac{2kqQ}{a^3})[\,x - \sqrt{x^2+a^2}\,]\Big|_0^a = \hat{x}\frac{2kqQ}{a^2}(2-\sqrt{2})$$

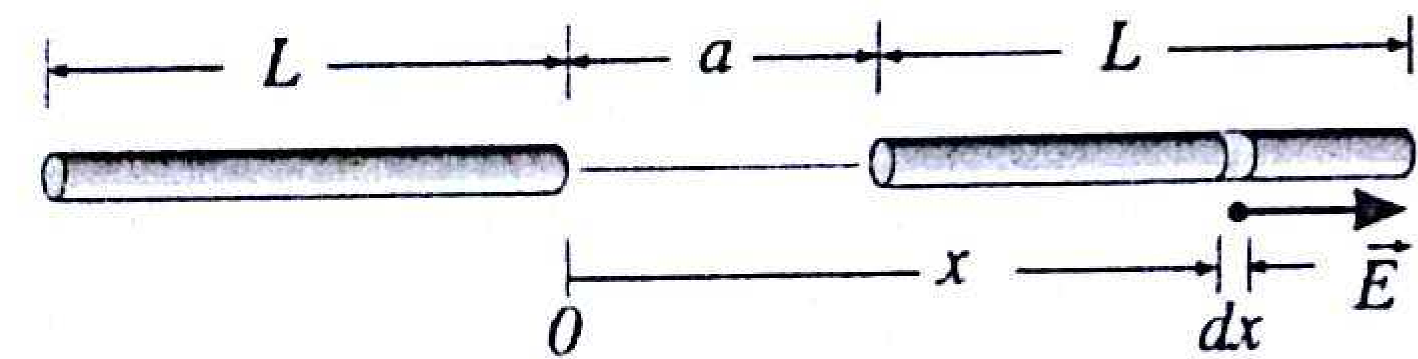
Respuesta:

$$\bar{F} = \frac{2kqQ}{a^2}(2-\sqrt{2})\hat{x}$$

PR-2.25. *Fuerza de repulsión entre dos barras*

Dos barras aislantes delgadas de longitud L llevan igual carga Q distribuidas uniformemente.

Las barras están alineadas y sus extremos cercanos separados por una distancia a. ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre las barras?



Solución: El campo eléctrico que genera la barra de la izquierda en un punto a distancia x de su extremo es:

$$\bar{E}(x) = \frac{kQ}{x(L+x)}\hat{x}$$

Si en la barra de la derecha consideramos un trozo elemental de longitud dx con carga $dQ = (Q/L)dx$, sobre éste se ejerce una fuerza:

$$d\bar{F} = \bar{E}(x)dQ = \frac{kQ}{x(x+L)}(\frac{Qdx}{L})\hat{x} = \frac{kQ^2}{L}\frac{dx}{x(x+L)}\hat{x}$$

La fuerza neta sobre toda la barra será:

$$\bar{F} = \frac{kQ^2}{L}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x(x+L)}\hat{x} = \frac{kQ^2}{L}\frac{1}{L}ln(\frac{x}{x+L})\Big|_a^{a+L}\hat{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+L)} = \frac{1}{L}ln(\frac{x}{x+L})$$

$$\bar{F} = \frac{kQ^2}{L^2}[\,ln(\frac{a+L}{a+2L}) - ln(\frac{a}{a+L})]\hat{x}$$

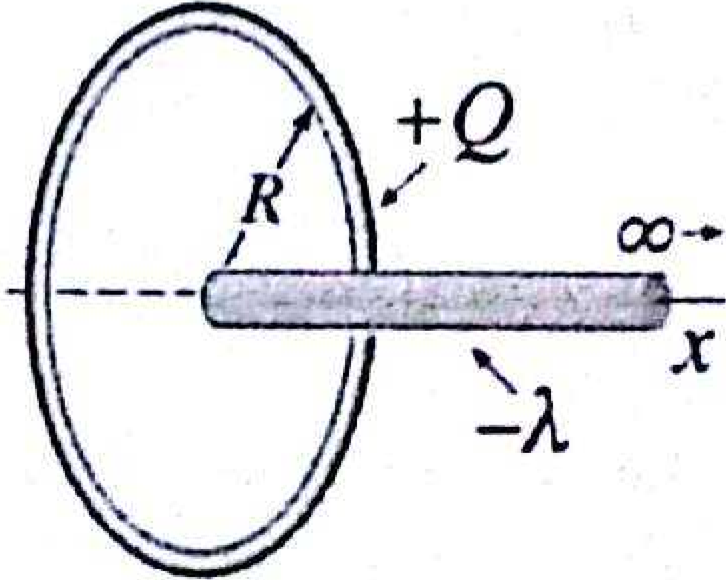
$$\bar{F} = \frac{kQ^2}{L^2}ln[\,\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}]\hat{x}$$

Respuesta:

$$F = \frac{kQ^2}{L^2}ln[\,\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}]$$

PR-2.26. *Atracción de un anillo y una barra infinita*

Un anillo metálico tiene una carga positiva uniforme $+Q$. Se coloca en el eje del anillo una barra aislante delgada y muy larga, con uno de sus extremos en el centro del anillo. Si la barra tiene una carga uniforme negativa con densidad lineal $-\lambda$ (C/m), determine la fuerza con que el anillo atrae a la barra en esa posición.



Solución: El campo eléctrico producido por el anillo de carga Q y radio R en un punto a una distancia x de su centro es:

$$\bar{E}(x) = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\hat{x}$$

Si consideramos un segmento de barra de longitud dx con carga dq, la fuerza que siente es: $\bar{F}(x) = dq\bar{E}(x)$. Por lo tanto, la fuerza ejercida sobre la barra entera será:

$$\bar{F} = \int d\bar{F} = -\hat{x}\int_{x=0}^{x=\infty}\frac{k\lambda Qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}dx = -\hat{x}k\lambda Q\frac{-1}{\sqrt{R^2+x^2}}\Big|_0^{\infty}$$

$$\bar{F} = -\frac{k\lambda Q}{R}\hat{x}$$

Respuesta:

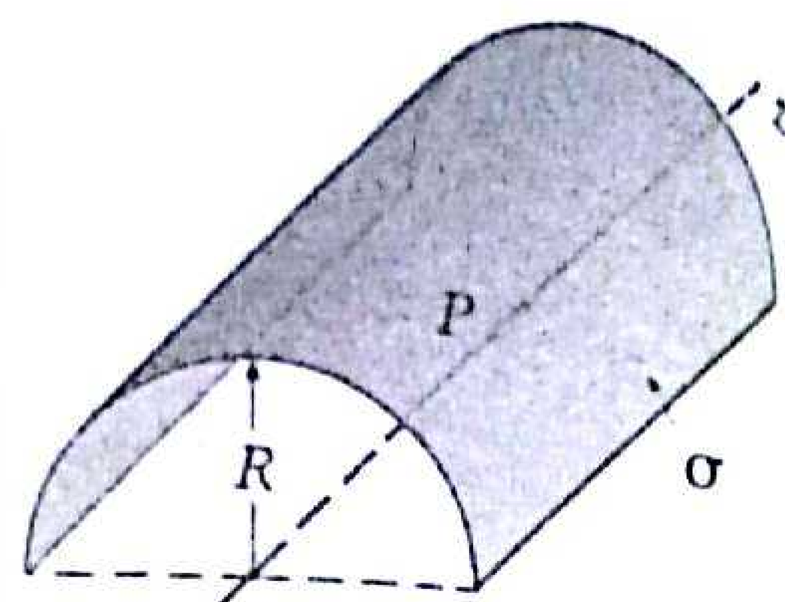
$$\bar{F} = -\frac{k\lambda Q}{R}\hat{x} \quad \text{(atractiva)}$$

PR-2.27. *Campo eléctrico de una concha cilíndrica*

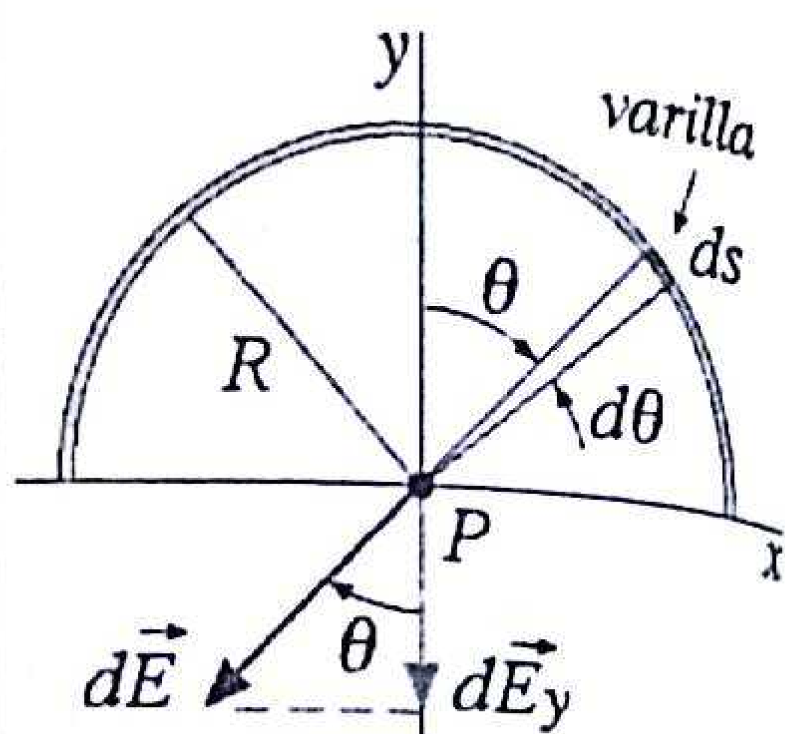
Sea una cinta muy larga, que está doblada de tal forma que constituye la mitad de un cilindro de radio R. Esta concha cilíndrica tiene una densidad superficial de carga uniforme σ (C/m^2).

a) Determine el campo eléctrico en un punto P en su eje z (lejos de sus extremos).

b) Si se coloca en el eje z de la concha, un trozo de barra recta de longitud a y densidad de carga lineal uniforme λ_0, ¿cuál será la fuerza de repulsión ejercida.



Solución: Se divide la concha cilíndrica en una sucesión de varillas paralelas de longitud infinita y espesor ds. Si consideramos un trozo de varilla de largo L y espesor ds, la carga que contiene es: $dQ = \sigma dA = \sigma(Lds)$, de modo que su carga por unidad de longitud es: $\lambda = dQ/L = \sigma ds$. Ya hemos visto que el campo de una varilla larga en un punto P a distancia R es:



$$d\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{r} = \frac{2k\sigma ds}{R}\hat{r}$$

Estos vectores apuntan en dirección radial y debido a la simetría respecto al eje y, cuando sumamos los aportes de todas las varillas, las componentes $d\vec{E}_x$ se anulan por pares y resulta $\vec{E}_x = 0$. Sólo tenemos que considerar las componentes $d\vec{E}_y$.

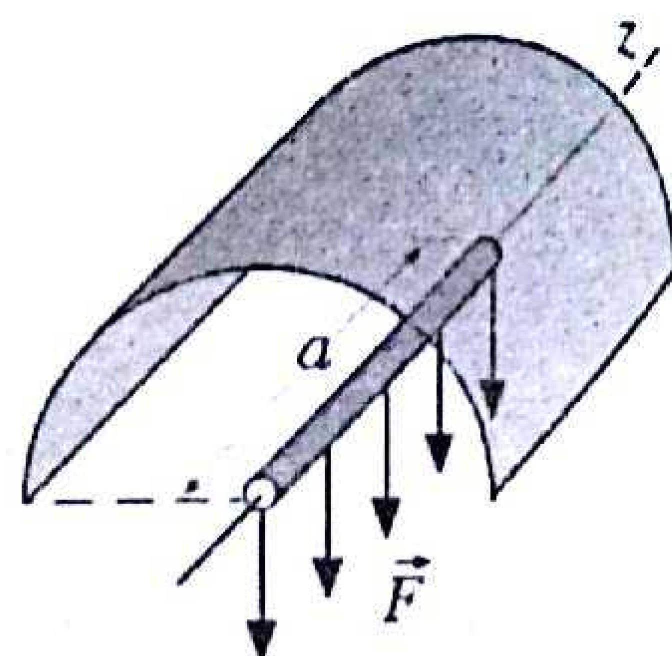
$$E = \int dE_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{2k\sigma(Rd\theta)}{R} cos\theta = 2k\sigma \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} cos\theta d\theta$$

$$\vec{E} = 2k\sigma \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} cos\theta d\theta = 2k\sigma sen\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2k\sigma[1-(-1)]$$

$$\vec{E} = 4k\sigma(-\hat{y})$$

b) La fuerza sobre un elemento de carga de la barra de longitud a es: $d\vec{F} = \vec{E}dq$. Como la barra queda en el eje del cilindro, el campo $\vec{E}$ tiene el mismo valor en cada uno de sus puntos y la fuerza total es:

$$\vec{F} = (\lambda_0 a)\vec{E} = 4k\sigma\lambda_0 a(-\hat{y})$$



Respuesta:

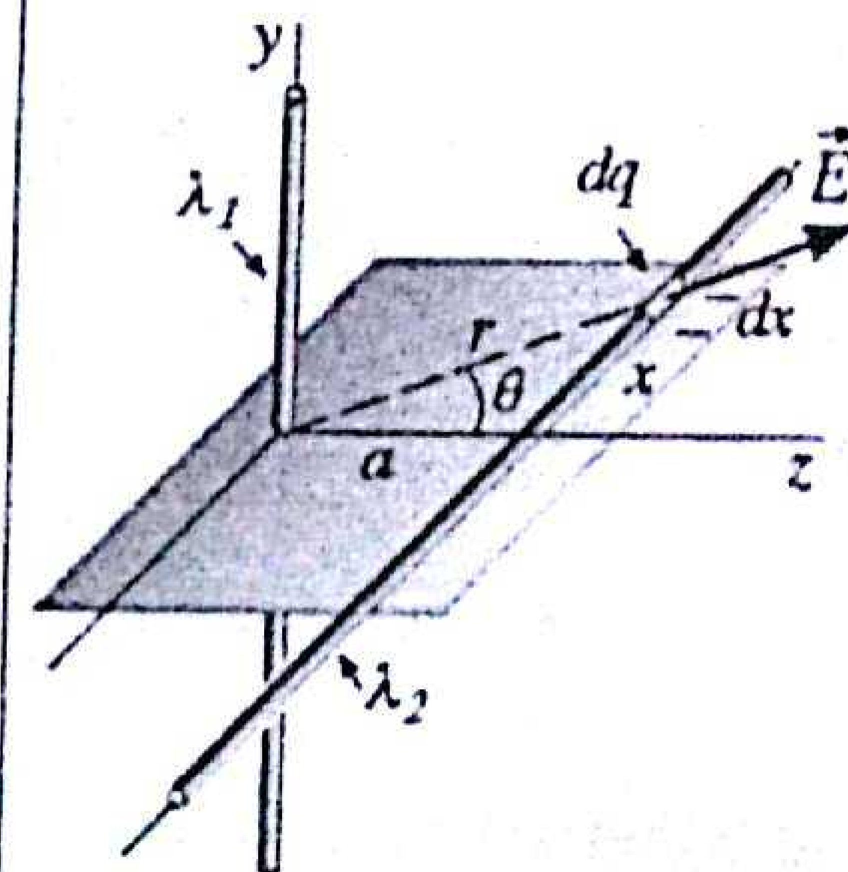
a) $\vec{E} = 4k\sigma(-\hat{y})$
b) $\vec{F} = 4k\sigma\lambda_0 a(-\hat{y})$

PR-2.28. *Fuerza que no depende de la distancia.*

Dos barras muy largas que tienen cargas uniformes con densidades lineales λ_1 y λ_2 respectivamente, están colocadas en forma ortogonal y separados por una distancia a. Determine la fuerza de interacción entre las barras.

Solución: Consideremos en la barra horizontal un segmento de longitud dx ubicado a distancia x del eje z. Ese segmento queda a una distancia r de la barra vertical infinita y el campo eléctrico producido allí es:

$$\vec{E}(r) = 2\frac{k\lambda_1}{r}\hat{r}$$



Como la carga contenida en el elemento infinitesimal es $dq = \lambda_2 dx$, la fuerza ejercida es:

$$d\vec{F} = \vec{E}(r)dq = (2\frac{k\lambda_1}{r}\hat{r})\lambda_2 dx = 2k\lambda_1\lambda_2\frac{dx}{r}$$

Debido a la simetría, las componentes paralelas a la barra λ_2 se cancelan y solo las componentes perpendiculares contribuyen a la fuerza total:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} cos\theta\hat{z} = 2k\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r} cos\theta\hat{z}$$

Tomando en cuenta que $r = a/cos\theta$ y que:

$$x = atg\theta \quad \Rightarrow \quad dx = a\,sec^2\theta d\theta$$

el integrando queda simplificado:

$$\frac{dx\,cos\theta}{r} = \frac{(a\,sec^2\theta d\theta)}{a/cos\theta} cos\theta = d\theta$$

Integrando la expresión anterior, se obtiene la fuerza total:

$$\vec{F} = 2k\lambda_1\lambda_2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta\ \hat{z} = 2k\lambda_1\lambda_2\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}\hat{z} = 2k\pi\lambda_1\lambda_2\hat{z}$$

Respuesta:

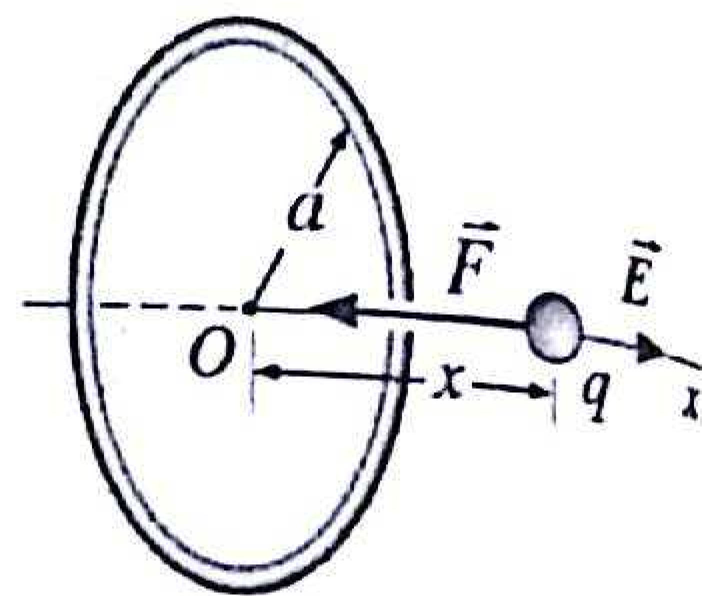
$\vec{F} = 2k\pi\lambda_1\lambda_2\hat{z}$
Independiente de la distancia a

PR-2.29. *Partícula oscilante en el eje de un anillo.*

Una partícula de masa m con carga negativa $-q$ se coloca en el centro de un anillo de radio a y carga positiva uniforme, Q. La partícula que está confinada a moverse en el eje x, se desplaza una pequeña distancia ($x << a$) y se suelta. Demuestre que oscilará con un movimiento armónico simple y determine la frecuencia de oscilación.

Solución: Hemos visto que un anillo de radio a con carga uniforme Q produce un campo eléctrico en su eje y a distancia x de su centro, que está dado por:

$$\vec{E}(x)=\frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$$



La fuerza ejercida sobre la carga negativa ubicada en el eje del anillo es:

$$\vec{F}(x)=-q\vec{E}(x)=-\frac{kQqx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$$

En el límite ($x << a$) el valor de la fuerza tiende a:

$$F(x)=-\left(\frac{kQq}{a^3}\right)x$$

Si se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de la partícula cargada de masa m, se obtiene:

$$F=-bx=ma \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{b}{m}x$$

Donde la constante elástica es: $b = kqQ/a^3$. La aceleración a es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y está dirigida en la dirección opuesta. Es decir, la carga realiza *oscilaciones armónicas simples* de la misma manera que lo hace una masa m en el extremo de un resorte. La frecuencia angular es:

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = (b/m)$$

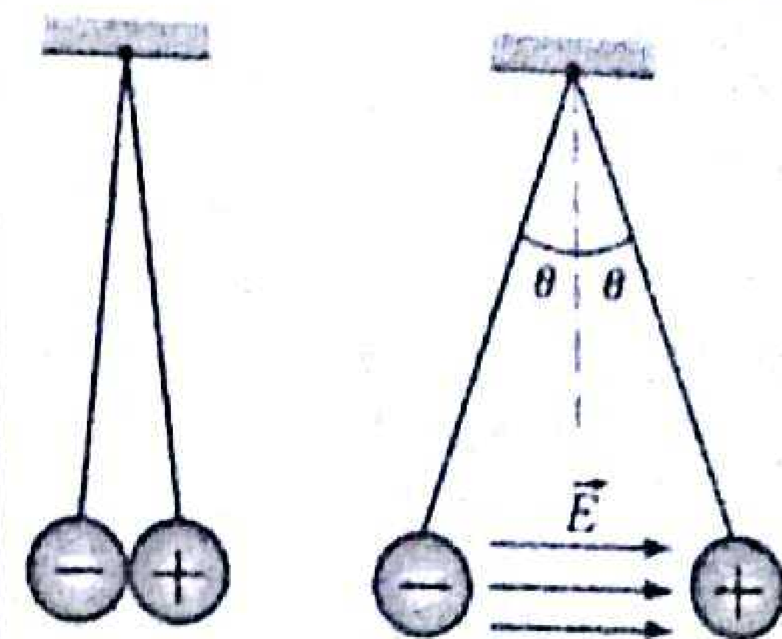
$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kQq}{ma^3}}$$

Respuesta:

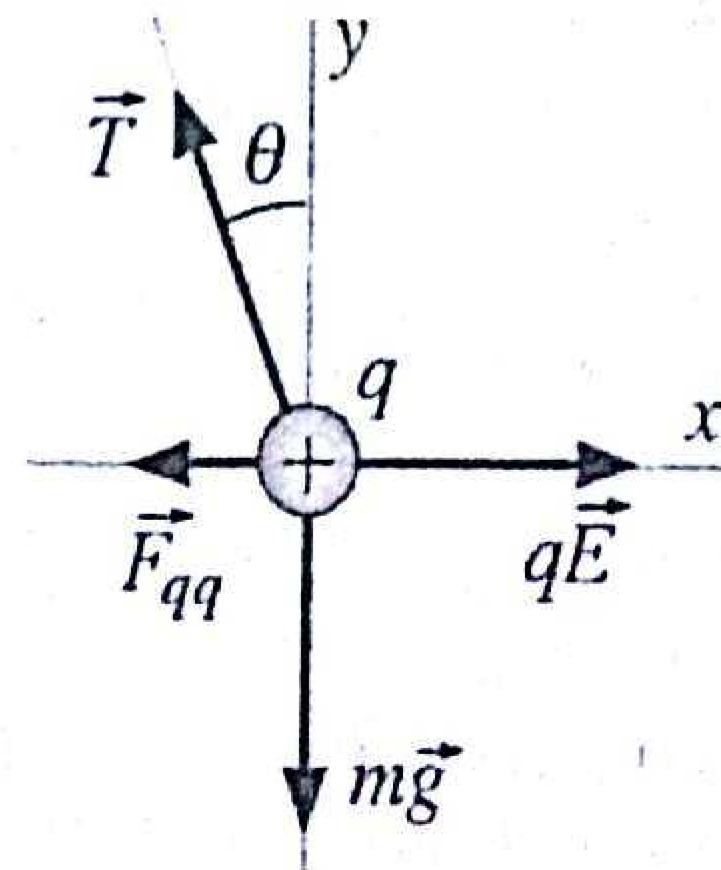
$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kQq}{ma^3}}$$

PR-2.30. *Campo eléctrico para separar las cargas*

Dos esferitas de igual masa m están suspendidas de hilos ligeros de longitud L y tienen cargas iguales a $+q$ y $-q$. Si se aplica un campo eléctrico uniforme en dirección horizontal, determine el valor de E que permite a las esferitas estar en equilibrio a un ángulo 2θ.



Solución: Consideremos el diagrama de cuerpo libre para la esferita positiva en equilibrio a distancia d de la carga negativa. Las condiciones de equilibrio son:



$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg/\cos\theta$$

$$\sum F_x = -T sen\theta - F_{qq} + qE = 0$$

Sustituyendo la tensión T en esta ultima ecuación, se obtiene:

$$qE = T sen\theta + F_{qq} = \frac{mg}{\cos\theta}sen\theta + \frac{kq^2}{d^2}$$

La distancia entre las esferitas es: $d = 2L sen\theta$, por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$E=\frac{mg}{q}tg\theta+\frac{kq}{4L^2sen^2\theta}$$

Respuesta:

$$E=\frac{mg}{q}tg\theta+\frac{kq}{4L^2sen^2\theta}$$

PR-2.31. *Mientras el protón va, el electrón viene.*

Entre dos grandes placas metálicas paralelas separadas por una distancia d existe un campo eléctrico uniforme. Simultáneamente de la placa negativa se suelta un electrón y de la placa positiva se suelta un protón. Si se pudiese ignorar la fuerza de interacción entre las dos partículas y la fuerza de gravedad, ¿en qué posición horizontal se cruzarían?

Solución: Escogemos las coordenadas con origen en la placa positiva. El protón de masa m_p y carga $+e$ tendrá una aceleración hacia la derecha:

$$a_p = + eE/m_p$$

El electrón de masa m_e y carga $-e$ tendrá una aceleración hacia la izquierda:

$$a_e = -eE/m_e$$

Al cabo de un tiempo t, las posiciones del protón y el electrón son respectivamente:

$$x_p = \frac{1}{2}a_p t^2 \qquad x_e = d + \frac{1}{2}a_e t^2$$

Las dos partículas se cruzan cuando sus coordenadas coinciden:

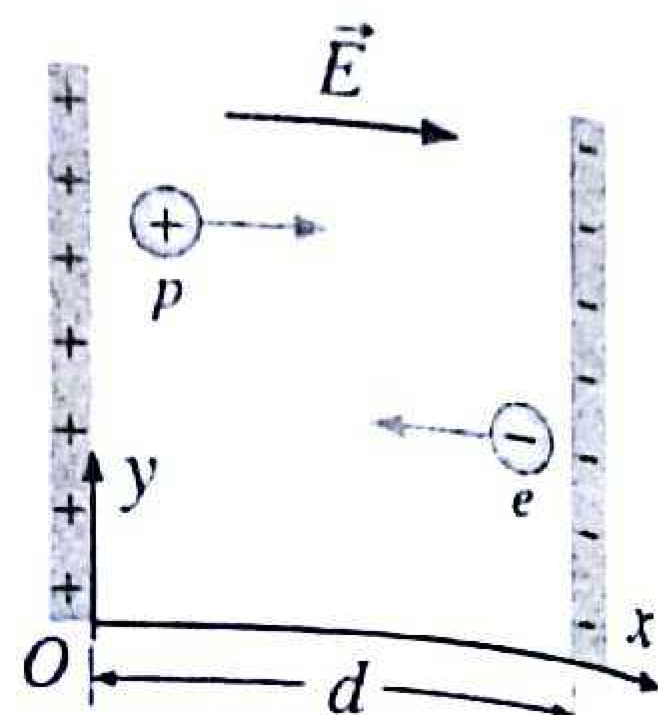
$$\frac{1}{2}a_p t^2 = d + \frac{1}{2}a_e t^2$$

Esto significa que el tiempo transcurrido para que se encuentren está dado por:

$$t^2 = \frac{2d}{a_p - a_e}$$

Sustituyendo t^2 en la expresión de x_p y las aceleraciones a_p y a_e, se obtiene:

$$x = (\frac{a_p}{a_p - a_e})d = (\frac{eE/m_p}{eE/m_p + eE/m_e})d = (\frac{m_e}{m_e + m_p})d$$

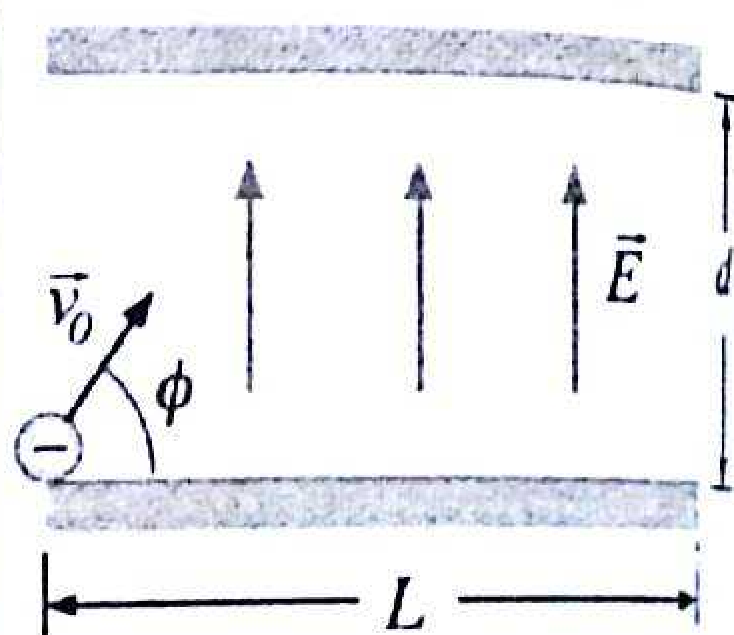


Respuesta:

$$x = (\frac{m_e}{m_e + m_p})d$$
Desde la placa positiva

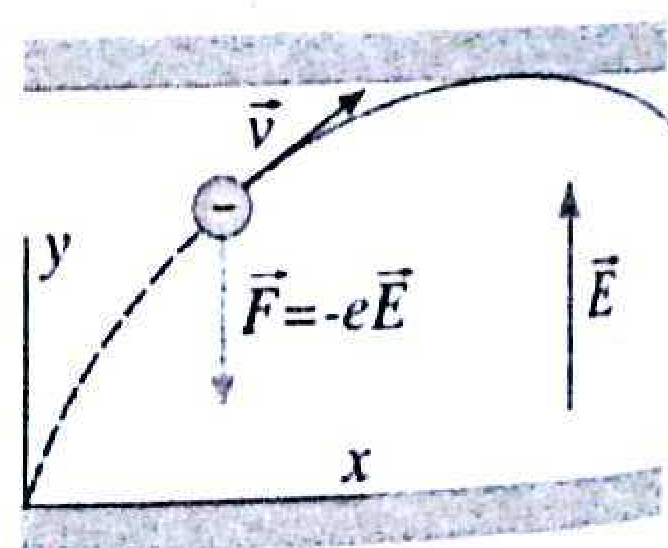
PR 2.32. *El electrón no choca con ninguna placa*

En la región entre dos placas metálicas paralelas de longitud L y separación d se establece un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$. Un electrón entra por el borde de la placa inferior con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ formando un ángulo ϕ con la placa. ¿Para cuáles valores de E el electrón no chocará con ninguna de las dos placas?



Solución: El electrón se mueve en la dirección horizontal con una velocidad constante $(v_0 \cos\phi)$. En la dirección vertical la velocidad inicial es $v_{0y} = v_0 sen\phi$ y la fuerza eléctrica, $F_y = -eE$, le imparte al electrón una aceleración negativa constante:

$$\bar{a}_y = \frac{\bar{F}}{m} = -\frac{eE}{m}\hat{y}$$



La velocidad vertical v_y debe anularse justo al llegar a la máxima altura vertical permitida y_m.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y y_m = 0$$

Teniendo en cuenta que $y_m < d$, tenemos:

$$|a_y| = \frac{v_{0y}^2}{2y_m} > \frac{v_0^2 sen^2\phi}{2d}$$

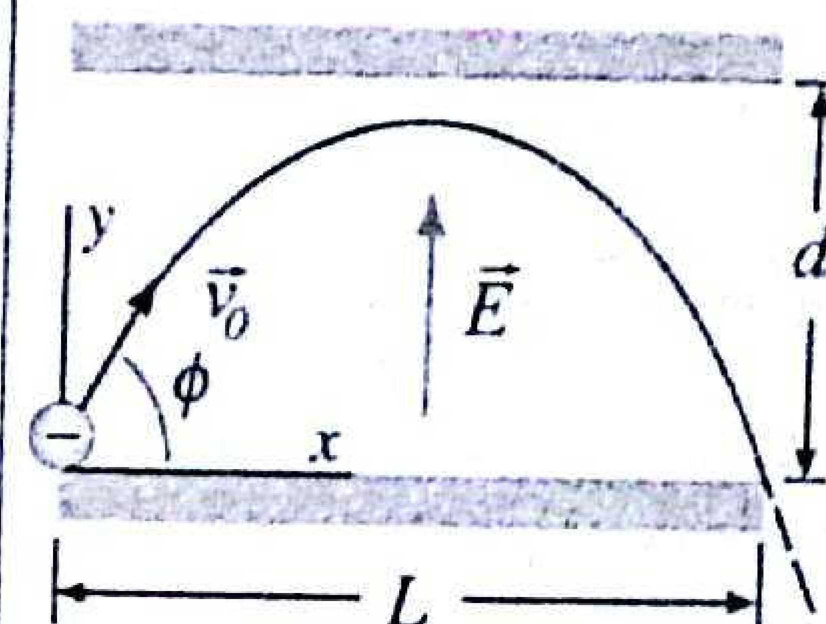
Por lo tanto, para que el electrón *no choque con la placa superior*, el campo E debe cumplir la condición:

$$\frac{eE}{m} > \frac{v_0^2 sen^2\phi}{2d} \quad \Rightarrow \quad E > \frac{mv_0^2 sen^2\phi}{2ed}$$

Si: $E > \frac{mv_0^2 sen^2\phi}{2ed}$
No hay choque con la placa superior.

Analicemos la segunda condición de que el electrón no choque con la placa inferior. El tiempo en que alcanzaría de nuevo la placa horizontal inferior se obtiene de la ecuación cuadrática:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$



Poniendo $y(t) = y_0 = 0$, y despejando t se tiene:

$$t_f = -\frac{2v_{0y}}{a_y} = \frac{2mv_0 sen\phi}{eE}$$

Para evitar que el electrón choque con la placa inferior, en este tiempo debe recorrer una distancia horizontal mayor que L:

$$x = v_x t_0 = (v_0 \cos\phi)t_f > L$$

Reemplazando el valor de t_f se obtiene:

$$\frac{2mv_0^2 sen\phi\cos\phi}{eE} = \frac{mv_0^2 sen2\phi}{eE} > L$$

Si: $E < \frac{mv_0^2 sen2\phi}{eL}$
No hay choque con la placa inferior.

Por lo tanto, la condición que debe cumplir el campo E para que el electrón *no choque con la placa inferior* es:

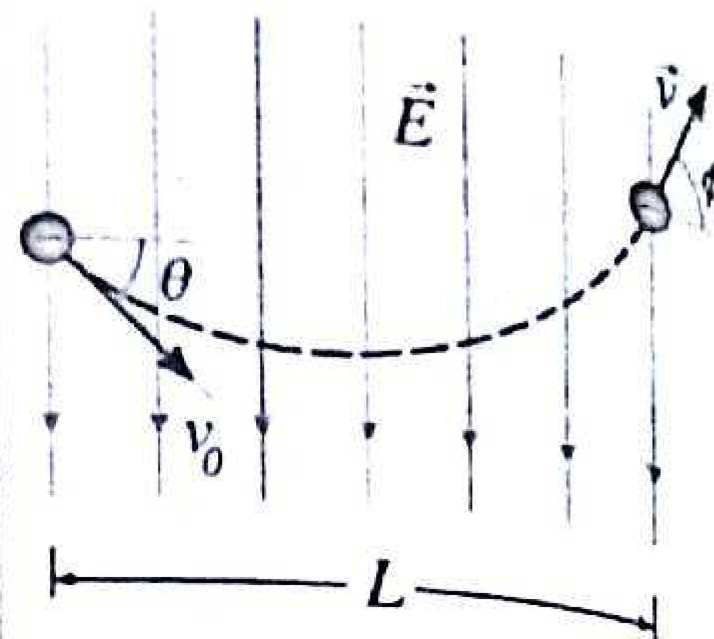
$$E < \frac{mv_0^2 sen2\phi}{eL}$$

Respuesta

$$\frac{mv_0^2 sen^2\phi}{2ed} < E < \frac{mv_0^2 sen2\phi}{eL}$$

PR-2.33. *¿Con qué velocidad entran los electrones?*

Un haz de electrones entra en una región entre dos placas paralelas de longitud L donde existe un campo eléctrico uniforme vertical $\vec{E}$. Los electrones inciden en una dirección que forma un ángulo θcon la horizontal y abandonan la región formando un ángulo ϕ, como se ilustra la figura. ¿Cuál es la rapidez inicial v_0 de los electrones?



Solución: Como no hay fuerzas en la dirección horizontal, la componente de la velocidad del electrón en esta dirección es constante, $v_x = v_o cos\theta$ y el tiempo de tránsito en esa región es:

$$t = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_o cos\theta}$$

En la dirección vertical, sobre el electrón actúa la fuerza $F_y = -eE$ y el movimiento es uniformemente retardado. La componente vertical de la velocidad en función del tiempo es: $v_y = v_{0y} + a_y t$ y al abandonar la región de $\vec{E}$ viene dada:

$$v sen\phi = v_0 sen\theta - \frac{eE}{m}\left(\frac{L}{v_o cos\theta}\right)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad horizontal no varía: $v_0 cos\theta = v cos\phi$, podemos reemplazar en la expresión anterior el módulo de la velocidad final, v:

$$\left(\frac{v_0 cos\theta}{cos\phi}\right) sen\phi = v_0 sen\theta - \frac{eE}{m}\left(\frac{L}{v_o cos\theta}\right)$$

$$sen(\theta \pm \phi) = sen\theta cos\phi \pm cos\theta sen\phi$$

$$m v_0^2 cos\theta [\, sen\theta cos\phi - cos\theta sen\phi] = eEL cos\phi$$

Despejando, encontramos la velocidad inicial en términos de los ángulo de entrada y de salida en el campo eléctrico:

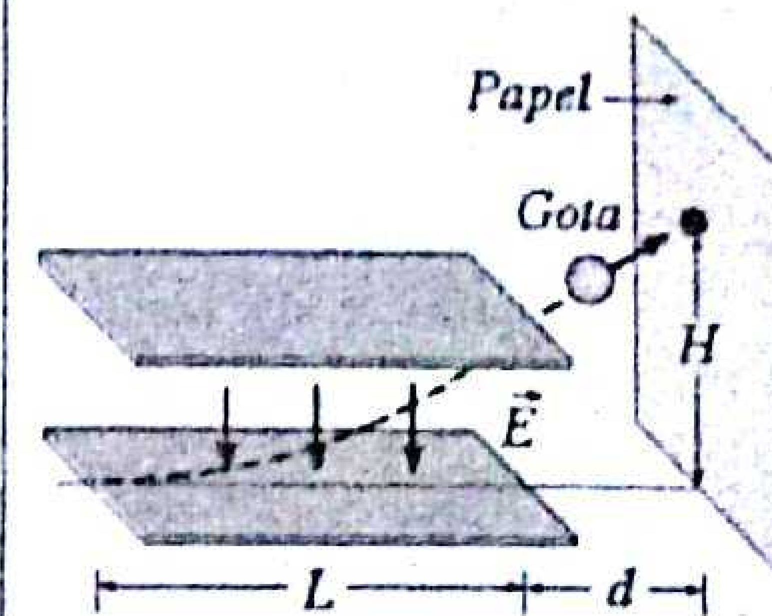
$$v_0 = \sqrt{\frac{eEL cos\phi}{m cos\theta sen(\theta - \phi)}}$$

Respuesta

$$v_0 = \sqrt{\frac{eEL cos\phi}{m cos\theta sen(\theta - \phi)}}$$

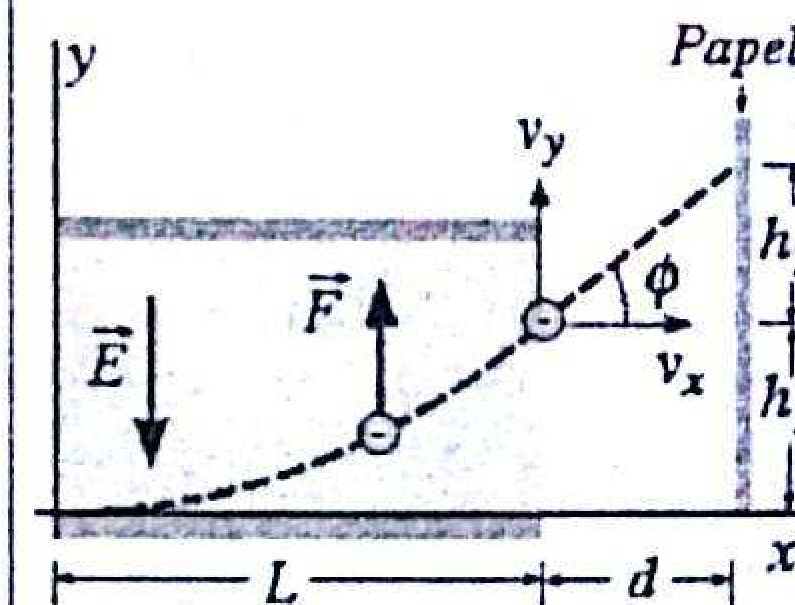
PR-2.34. *Gotas en la impresora de inyección de tinta.*

En el cabezal de una impresora de inyección de tinta se le suministran cantidades controladas de carga eléctrica a diminutas gotas de tinta, antes de pasar a través de un campo eléctrico uniforme generado entre dos placas paralelas. A medida que el papel avanza, las gotas son desviadas por el campo para que golpeen el papel en una posición que depende de la cantidad de carga que poseen. Supongamos que una gota de tinta de masa $m = 6x10^{-10}$kg y carga negativa $Q = -3x10^{-13}$C, entra con velocidad $v_o = 20$ m/s en el campo eléctrico $E = 2x10^6$ N/C. La longitud de las placas es $L = 2$ cm y la distancia del extremo de las placas al papel es $d = 6$ mm.¿Cuál será la desviación H de la gota en el papel?



Solución: En este problema no se toma en cuenta ni la fuerza de gravedad ni el rozamiento del aire, y se considera que el campo eléctrico cae bruscamente a cero en la orilla de las placas. Como no hay fuerzas en la dirección horizontal, la componente de la velocidad de la gota en esta dirección es constante, $v_x = v_0$. El tiempo que emplea en recorrer la región entre las placas es: $t = L/v_0$. En la dirección vertical, sobre la gota actúa la fuerza hacia arriba $F_y = -eE$ y el movimiento resultante es del tipo parabólico. El desplazamiento vertical cuando la gota atraviesa la región entre las placas es:

$$y = h_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 = \frac{eEL^2}{2mv_0^2}$$



En el instante en que la gota abandona esa región la componente vertical de su velocidad es:

$$v_y = a_y t = \left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_o}\right) = \frac{eEL}{mv_o}$$

La gota abandona la región entre las placas bajo un ángulo ϕ determinado por la condición:

$$t\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eEL}{mv_0^2}$$

El movimiento subsiguiente de la gota está libre de fuerzas y su trayectoria es una línea recta. La distancia vertical recorrida desde que abandona las placas hasta que golpea la hoja de papel es:

$$h_2 = dt\phi = \frac{eELd}{mv_0^2}$$

Por lo tanto, el desplazamiento vertical neto de la gota es:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{eEL^2}{2mv_0^2} + \frac{eELd}{mv_0^2} = \frac{eEL}{mv_0^2}(d + \frac{L}{2})$$

Reemplazando los valores numéricos se obtiene:

$$H = \frac{(3x10^{-13})(2x10^{6})(2x10^{-2})}{(6x10^{-10})(20)^2}(6x10^{-3} + \frac{2x10^{-2}}{2}) = 0.8\text{mm}$$

Respuesta:

$$H = \frac{eEL}{mv_0^2}(d + \frac{L}{2}) = 0.80\ \text{mm}$$

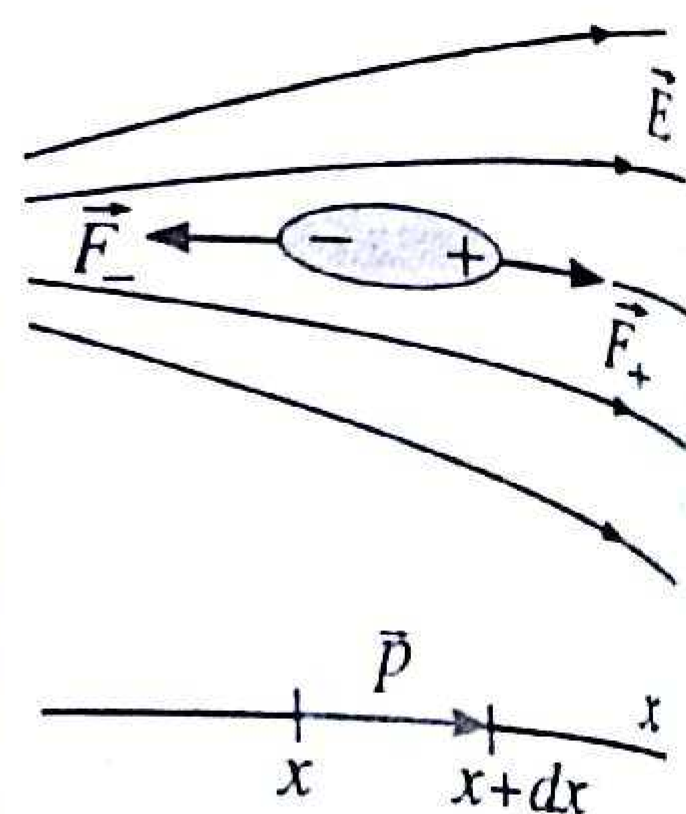
PR-2.35. *Fuerza sobre dipolo en campo no-uniforme.*

Un objeto aislador neutral que contenga dipolos o susceptible de que le sean inducidos, puede experimentar una fuerza neta en un campo eléctrico no uniforme.

a) Sea un pequeño dipolo $\bar{p} = q d\bar{x}$ en un campo $\bar{E}$ no uniforme que depende sólo de x, ¿cuál es la fuerza neta sobre el dipolo?

b) Use la expresión hallada en (a) para calcular la fuerza que ejerce una carga puntual Q sobre un dipolo $\bar{p}$ que está a una distancia radial r.

c) Explique cómo un objeto cargado puede atraer un objeto neutral tal como pedacitos de papel.



Solución: a) Considere que, en el campo $\bar{E}$ representado por las líneas divergentes, la carga negativa del dipolo está en un punto con coordenada x y la positiva está desplazada respecto a ésta en una cantidad infinitesimal dx. Las fuerzas sobre las cargas son:

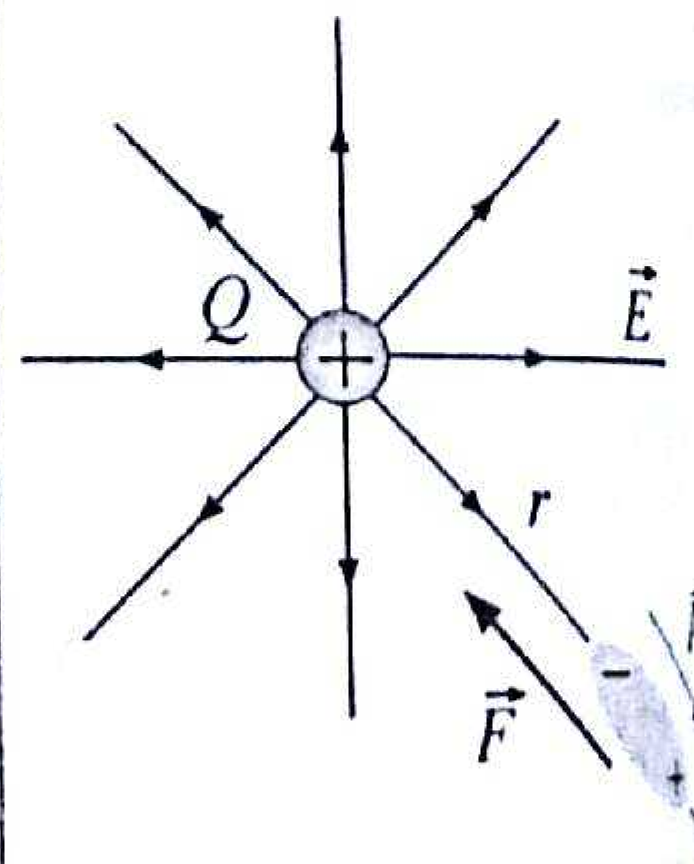
$$\bar{F}_- = -qE(x)\hat{x}$$

$$\bar{F}_+ = +qE(x + dx)\hat{x} = +q(E_x + \frac{dE}{dx}dx)\hat{x}$$

La fuerza neta sobre el dipolo es:

$$\bar{F} = \bar{F}_+ + \bar{F}_- = [q(E_x + \frac{dE}{dx}dx) - qE_x]\hat{x}$$

$$\bar{F} = qdx(\frac{dE}{dx})\hat{x} = p(\frac{dE}{dx})\hat{x}$$



Es decir, la fuerza es proporcional al momento dipolar p y al gradiente del campo eléctrico en la dirección x, dE/dx.

b) El campo eléctrico de una carga puntual Q es radial:

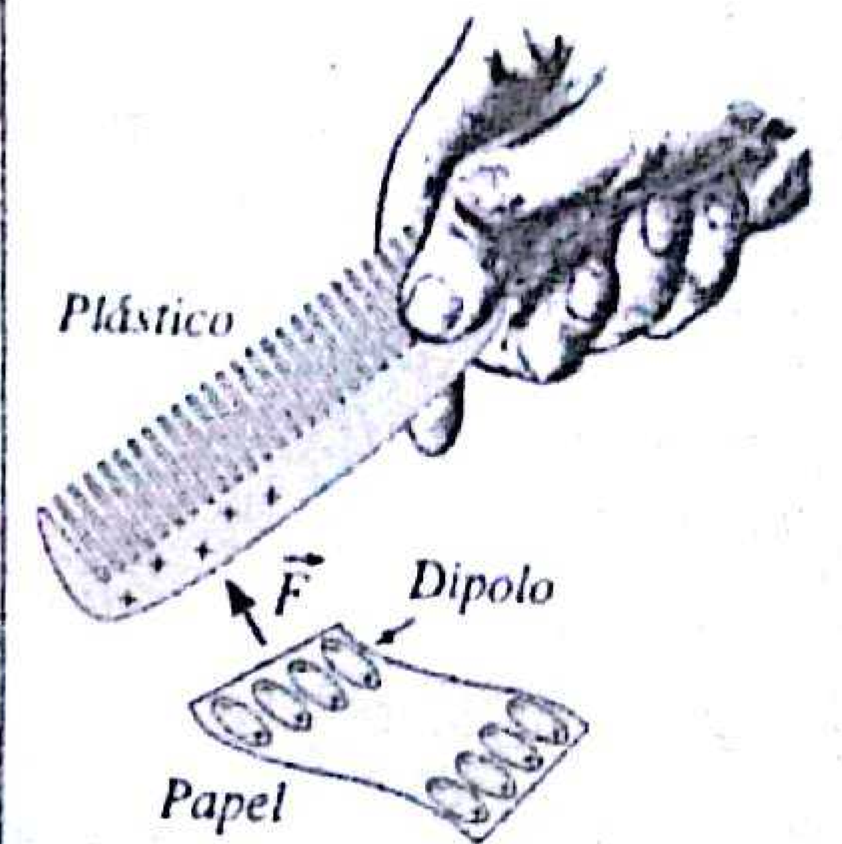
$$\bar{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

Aplicando la expresión anterior, encontramos la fuerza que ejerce la carga puntual sobre el dipolo:

$$\bar{F} = p(\frac{dE}{dr})\hat{r} = -(\frac{2kQ}{r^3})p\hat{r}$$

La fuerza está dirigida hacia la carga puntual (atractiva).

c) El campo eléctrico del objeto cargado, tal como un peine que ha sido frotado con el cabello, induce una separación de cargas en el papel (dipolos). Como el campo eléctrico del peine es no uniforme, sobre las cargas positivas y negativas de los dipolos se ejercen fuerzas diferentes. La fuerza neta sobre el papel será siempre hacia el peine sin importar cual es el signo de las cargas de éste.



Respuesta:

a) $\bar{F} = p(\frac{dE}{dx})\hat{x}$

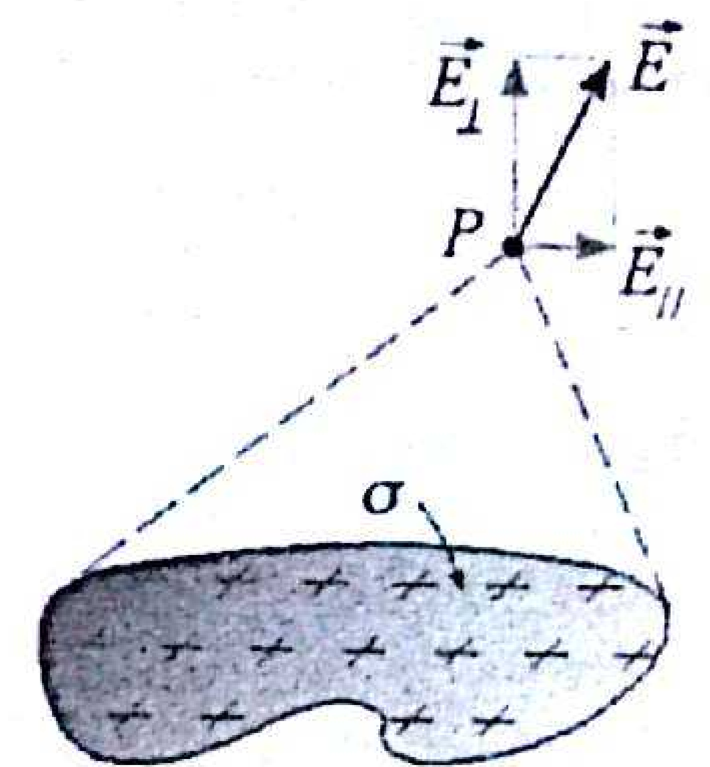
b) $\bar{F} = -(\frac{2kQ}{r^3})p\hat{r}$

PR-2.36. *La componente perpendicular del campo eléctrico solo depende del ángulo sólido.*

Sea una superficie plana de forma arbitraria que contiene una carga uniforme con densidad σ (C/m^2).

a) Demuestre que la componente del campo eléctrico $\bar{E}$ que es perpendicular al plano en un punto P es: $E_\perp = k\sigma\Omega$. Es decir, $E_\perp$ depende únicamente del ángulo sólido Ω subtendido por la superficie en ese punto.

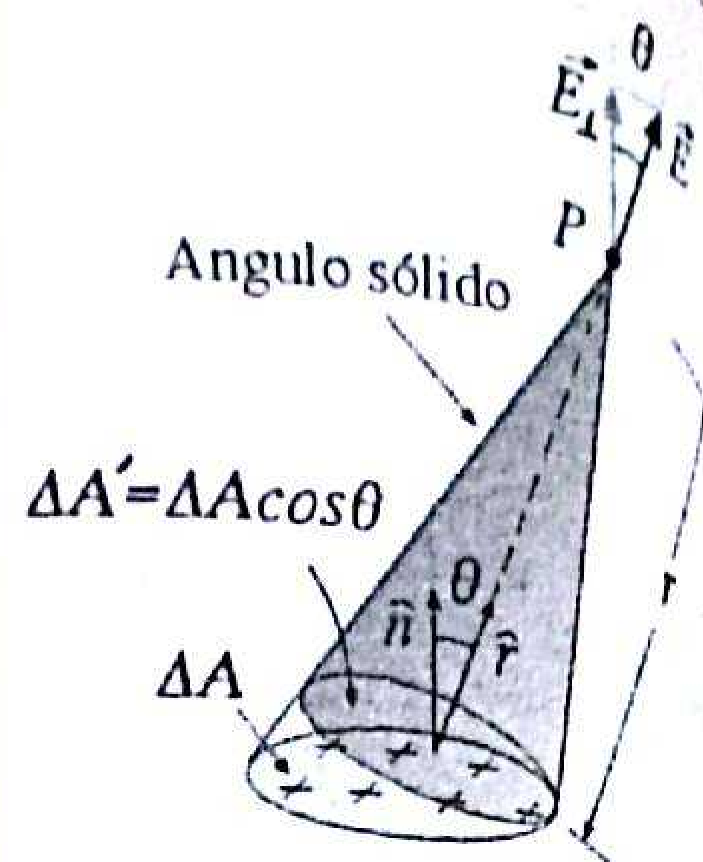
b) Haciendo uso de este resultado, determine el campo eléctrico en un punto exterior a un plano infinito cargado uniformemente.



Solución: a) Recordemos que un ángulo plano ordinario se expresa en radianes como el cociente de un elemento de longitud de arco de circunferencia Δs, dividido por el radio r de la misma: $\Delta\theta = \Delta s / r$ (rad). Si se trata de un círculo completo, el ángulo total subtendido será $2\pi/r$ = 2π radianes. En forma análoga, un ángulo sólido, $\Delta\Omega$, es el espacio que se encuentra dentro de una superficie cónica (o piramidal) y se define por la relación entre el área elemental $\Delta A'$ perpendicular a la línea radial que sale del punto P y el radio r de la esfera con centro en P.

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A'}{r^2} \quad \text{(estereorradianes)}$$

Así, el ángulo sólido total subtendido por una esfera es: $\Omega = 4\pi r^2 / r^2 = 4\pi$ estereorradianes. Consideremos en el plano cargado un elemento de área, ΔA, que subtiende un ángulo sólido $\Delta\Omega$. La proyección de ΔA que es perpendicular a la línea radial es $\Delta A' = \Delta A(\hat{n} \bullet \hat{r})$ y el ángulo sólido:



$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A'}{r^2} = \frac{\Delta A(\hat{n} \bullet \hat{r})}{r^2} = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2}$$

Podemos ahora calcular la componente normal del campo eléctrico en el punto P:

$$\Delta E_\perp = \left(\frac{k\Delta Q}{r^2}\right)\cos\theta = \left(\frac{k\sigma\Delta A}{r^2}\right)\cos\theta = k\sigma\Delta\Omega$$

Si sumamos los aportes de todos los elementos de carga del plano, encontramos la componente perpendicular del campo eléctrico total: $E_\perp = k\sigma\Omega$.

b) En el caso de un plano infinito, el ángulo sólido subtendido por sus bordes en el punto P es $\Omega = 2\pi$ estereorradianes y si aplicamos la relación anterior, se obtiene el resultado ya conocido:

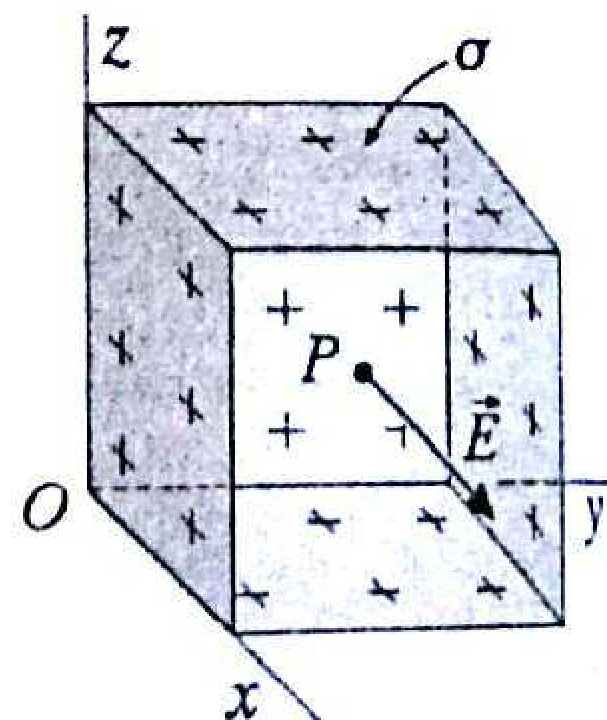
$$E = E_\perp = 2\pi k\sigma$$

Respuesta:

a) $E_\perp = k\sigma\Omega$
b) $E = 2\pi k\sigma$

PR-2.37. *Campo E en el centro de un cubo cargado*

Un cubo tiene cinco caras que están cargadas con una densidad superficial uniforme $\sigma(\text{C/m}^2)$. La sexta cara no tiene carga. Determine el campo eléctrico en el centro del cubo.



Solución: El campo generado por cada cara del cubo en el punto P de simetría es perpendicular a dicha cara y su valor se determina aplicando el resultado del problema anterior. Sabemos que el ángulo sólido intersecado en el punto P por cada una de las seis caras del cubo es un sexto del ángulo sólido total, es decir, $\Omega = 4\pi/6$.

Por lo tanto, la componente perpendicular del campo producido por cada cara del cubo es:

$$\vec{E} = k\sigma\Omega\hat{n} = k\sigma\frac{4\pi}{6}\hat{n}$$

Como los campos de las caras que están frente a frente en el cubo son iguales y opuestos, se cancelan. Por lo tanto, solo queda el campo que produce la cara que está en el plano zy. El campo neto en el punto P es:

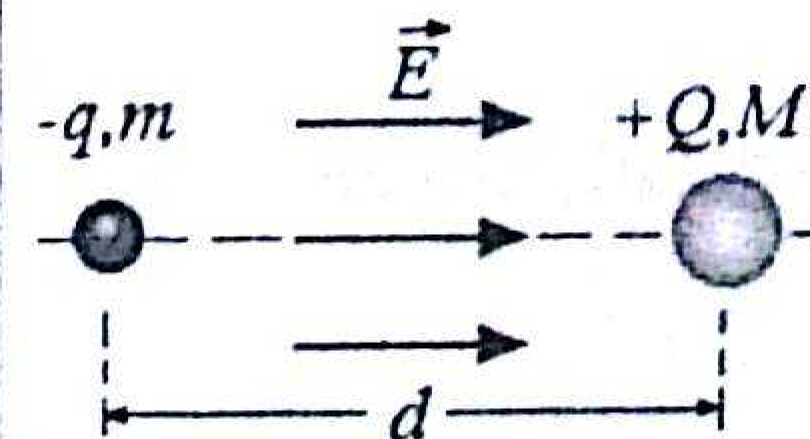
$$\vec{E} = \frac{2}{3}k\sigma\hat{x}$$

Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{2}{3}k\sigma\hat{x}$$

PR-2.38. *Campo E para mantener cargas separadas*

Dos partículas de cargas y masas respectivas (*-q, m*) y (*+Q, M*) se colocan en un campo eléctrico uniforme *E* separadas por una distancia *d*. ¿Cuál debe ser el valor de *E* para que las dos partículas se muevan juntas con la misma separación *d*?



Solución: Las partículas deben moverse con la misma aceleración. Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula de masa *M* y carga *Q*:

$$QE - \frac{kqQ}{d^2} = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton al *sistema* de las dos partícula con masa total *(M+m)*:

$$a = \frac{F}{(M+m)} = \frac{QE - qE}{(M+m)}$$

Sustituyendo esta expresión de *a* en la primera ecuación:

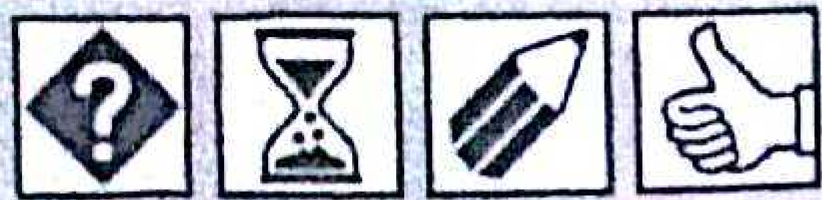
$$QE - \frac{kqQ}{d^2} = M\frac{QE - qE}{(M+m)}$$

Finalmente, despejamos el campo eléctrico requerido:

$$E = \frac{kqQ(M+m)}{d^2(mQ + Mq)}$$

Respuesta:

$$E = \frac{kqQ(M+m)}{d^2(mQ + Mq)}$$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-2.01. ***El campo eléctrico ......***

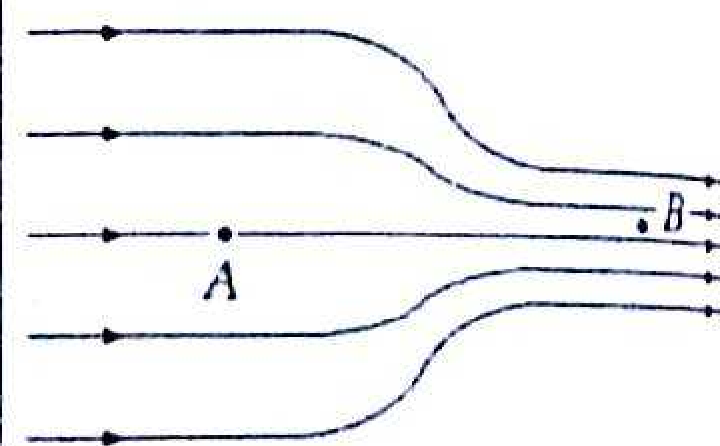
a) Es la fuerza que se ejerce sobre una carga testigo.
b) Es el número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie dada.
c) Se mide en Newton x Coulomb.
d) En un punto tiene la dirección y sentido de la fuerza que se ejerce sobre cualquier carga colocada en ese punto.
e) Es la fuerza por unidad de carga que actuaría sobre una carga testigo colocada en ese punto.

PE-2.02. ***Las líneas de campo eléctrico.....***

a) Son líneas a lo largo de las cuales el campo eléctrico tiene magnitud constante.
b) Son las trayectorias que siguen las partículas cargadas.
c) Salen de las cargas negativas y entran a las positivas.
d) Mientras mas cercanas entre sí estén, mas intenso será el campo.
e) Pueden cruzarse solo si hay varias cargas presentes.

PE-2.03. ***¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?***

La figura muestra las líneas de campo eléctrico en una cierta región del espacio. Si la magnitud del campo eléctrico en el punto A es 3 N/C, en el punto B tendrá un valor próximo a:



a) 12 N/C b) 9 N/C c) 6 N/C d) 3 N/C e) 0

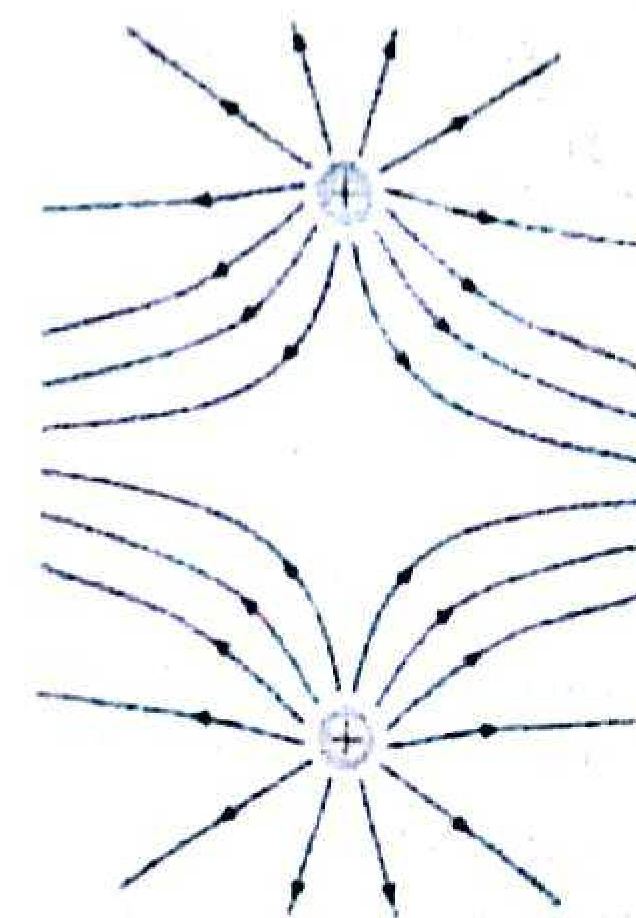
PE-2.04. ***¿Cuál será la trayectoria del electrón?***

Un electrón que se lanza en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$ uniforme seguirá una trayectoria...

a) parabólica, b) circular, c) rectilínea.
d) rectilínea si su velocidad inicial es paralela a $\vec{E}$

PE-2.05. ***¿Qué es lo que está malo en este diagrama?***

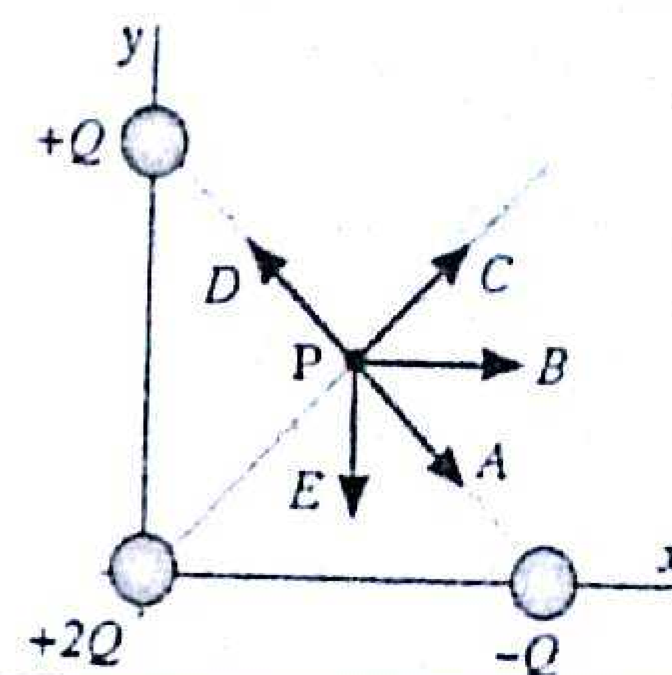
En un libro de física aparece un dibujo de las líneas de campo eléctrico que deberían existir en la cercanía de dos cargas puntuales idénticas y un alumno dice que el diagrama es incorrecto. El alumno tiene razón ya que...



a) No hay ninguna línea en el centro del diagrama.
b) Las líneas deben salir de una carga y entrar a la otra.
c) No tiene simetría respecto al eje que une las dos cargas.
d) Hay regiones donde la densidad de líneas aumenta con la distancia a las cargas.
e) Las líneas no deben extenderse hacia el infinito.

PE-2.06. ***¿Cuál será la dirección del campo eléctrico?***

Tres cargas puntuales $+Q$, $-Q$ y $+2Q$ están colocadas en las esquinas de un triángulo rectángulo isósceles, como se muestra en la figura. ¿Cuál de las direcciones mostradas es la del campo eléctrico resultante en el punto P?

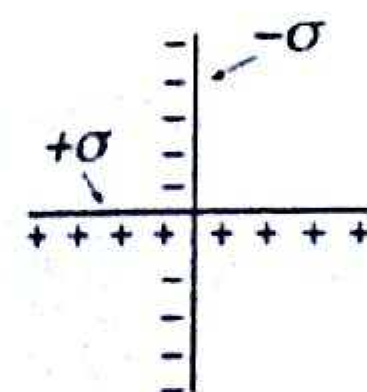


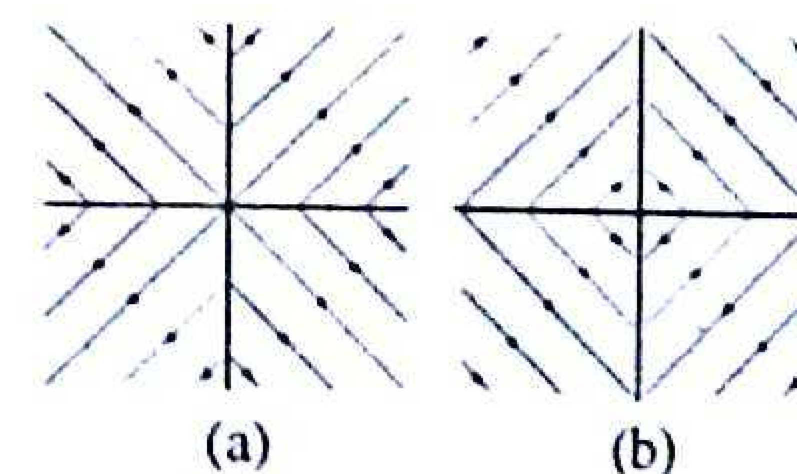
a) A, b) B, c) C, d) D, e) E.

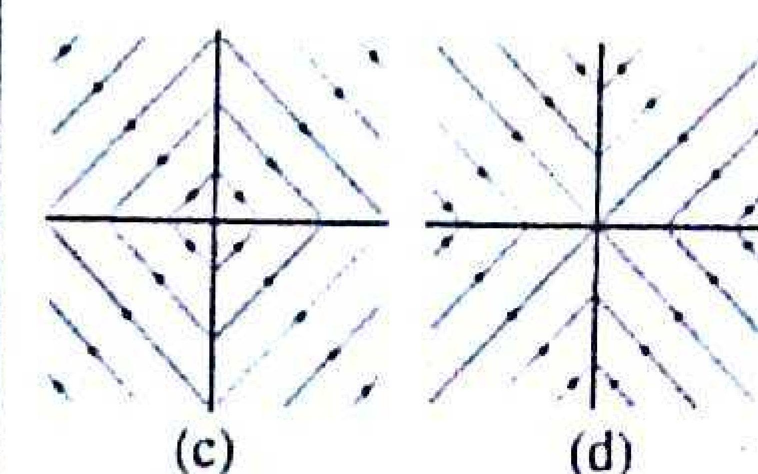
PE-2.07. ***Líneas de campo para dos hojas ortogonales***

Dos hojas infinitas con cargas uniformes opuestas se colocan en forma ortogonal. La hoja horizontal tiene una densidad positiva $+\sigma$ y la vertical densidad negativa $-\sigma$.

¿Cuál de los diagramas mostrados para las líneas de campo eléctrico es el correcto?



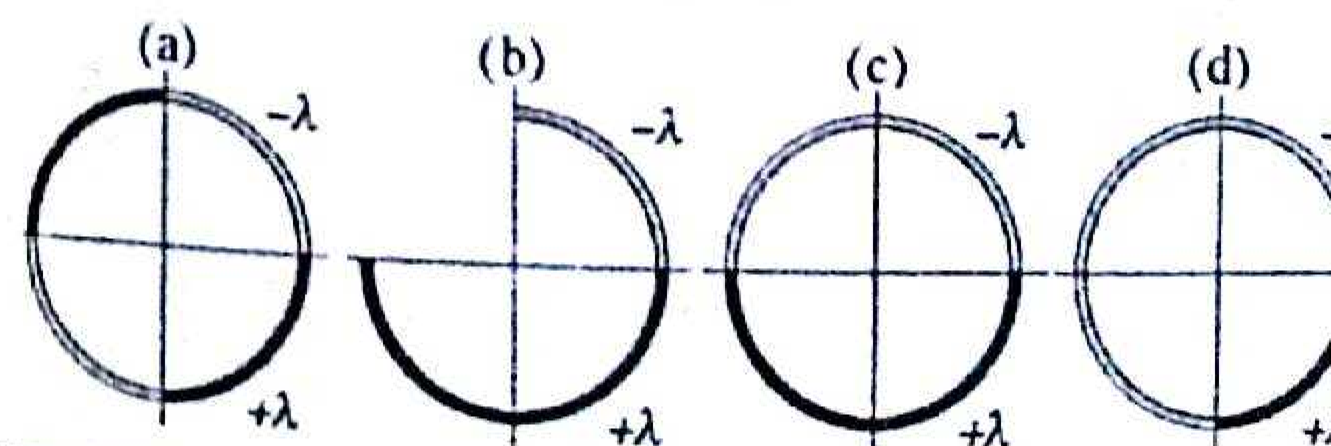




PE-2.08. ***Configuración de barras circulares***

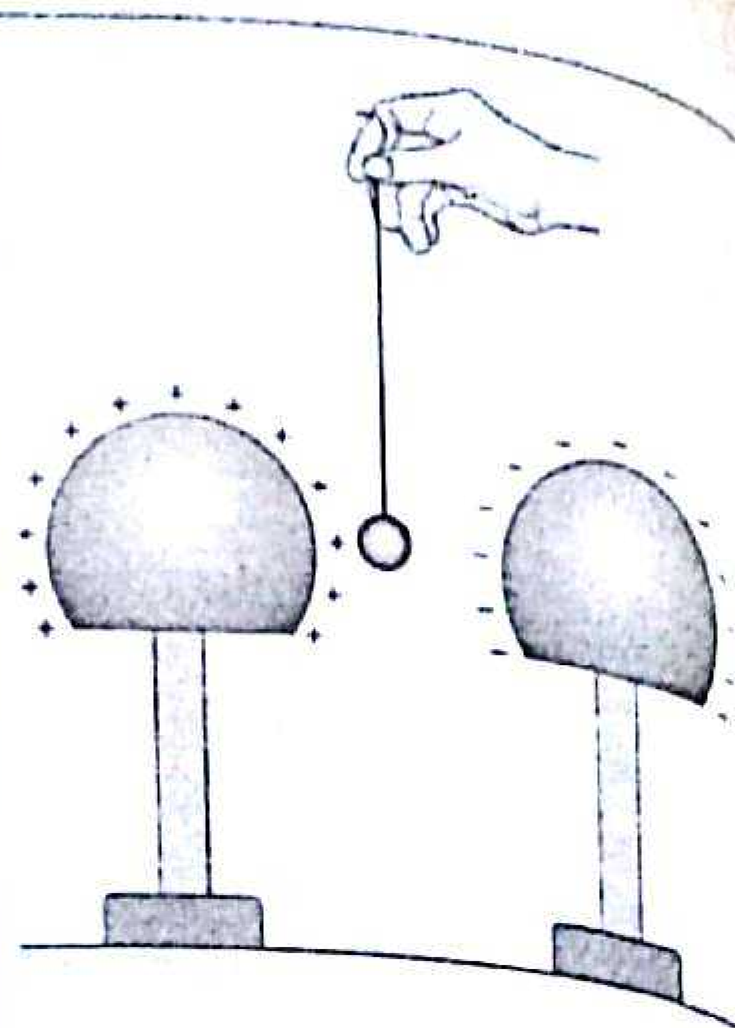
Se construyen varios arreglos con barras circulares de igual densidad lineal de carga uniforme.

Unas secciones tienen carga negativa y otras positiva. ¿En cuál caso resulta *mayor* el campo eléctrico en el centro de los anillos?



PE-2.09. *Juego de ping pong con Van de Graaff*

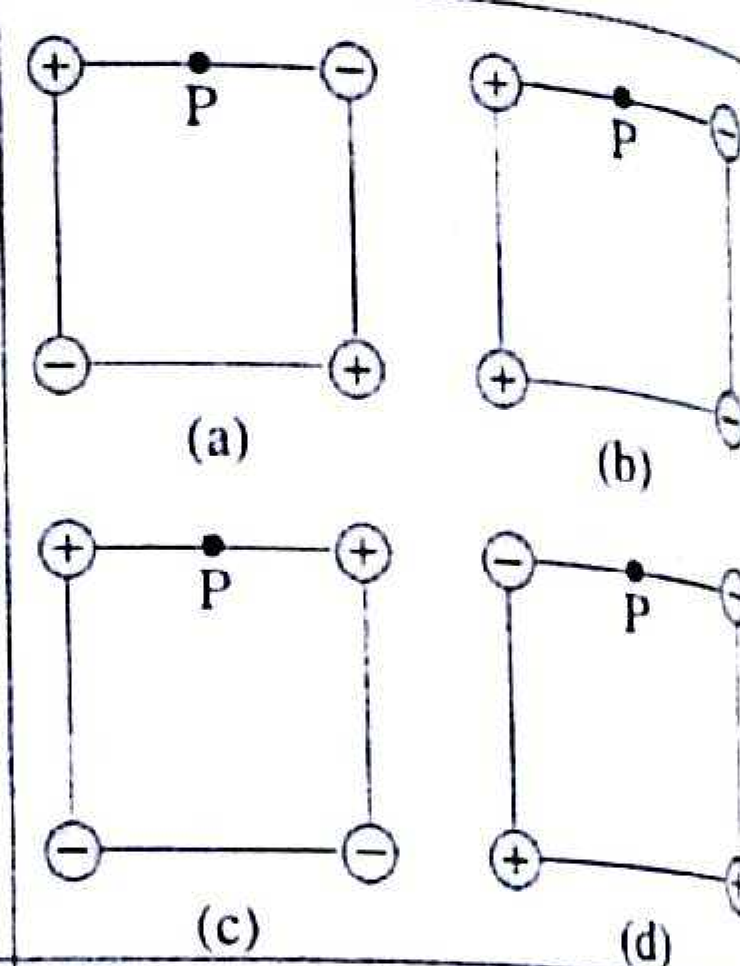
En una demo de física, dos generadores de Van de Graaff con cargas de signos opuestos, se colocan próximos entre sí. Se suspende mediante un hilo aislante, una lata de refresco de aluminio y se coloca entre las dos cúpulas esféricas. ¿Qué hará la lata de refresco?



a) Se quedará en la misma posición inicial.
b) Será atraída por la esfera positiva y se unirá a ésta.
c) Será atraída por la esfera negativa y se unirá a ésta.
d) No se mueve.
e) Oscila mediante choques sucesivos con las dos esferas.

PE-2.10. *¿Dónde será mayor el campo eléctrico?*

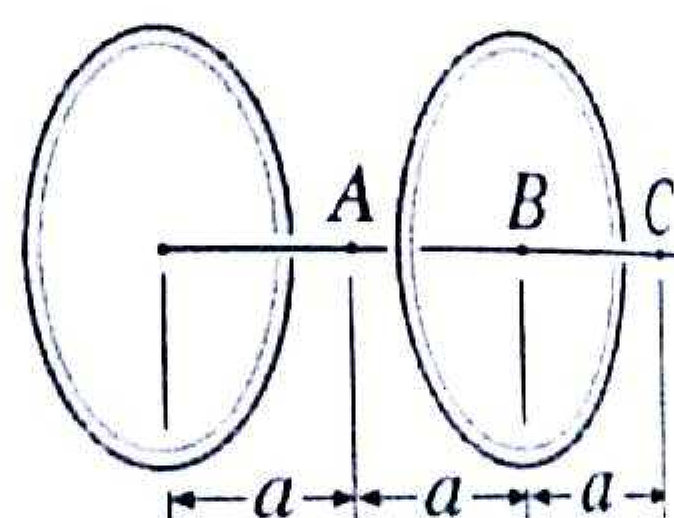
Cuatro cargas puntuales de igual magnitud, dos positivas y dos negativas se colocan en las esquinas de un cuadrado. ¿Con cuál de los arreglos mostrados será máxima la magnitud del campo eléctrico en el punto P?



a) es mayor en (a)
b) es mayor en (b)
c) es mayor en (c)
d) es mayor en (d)
e) es igual es todos los arreglos.

PE-2.11. *Campo eléctrico en el eje de dos anillos*

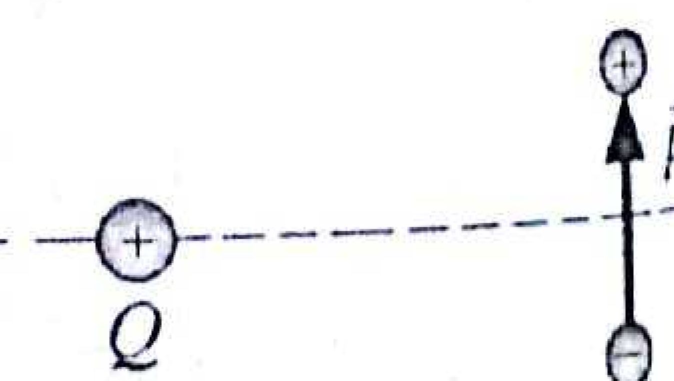
Dos anillos idénticos con cargas uniformes de igual magnitud y signo, están paralelos y el misma eje. Si comparamos los campos eléctricos resultantes en los puntos: A, B y C ubicados sobre el eje, estos guardan la relación:



a) $E_A > E_B > E_C$
b) $E_B > E_C > E_A$
c) $E_C > E_A > E_B$
d) $E_C > E_B > E_A$
e) $E_A > E_C > E_B$

PE-2.12. *¿Hacia dónde se moverá el dipolo?*

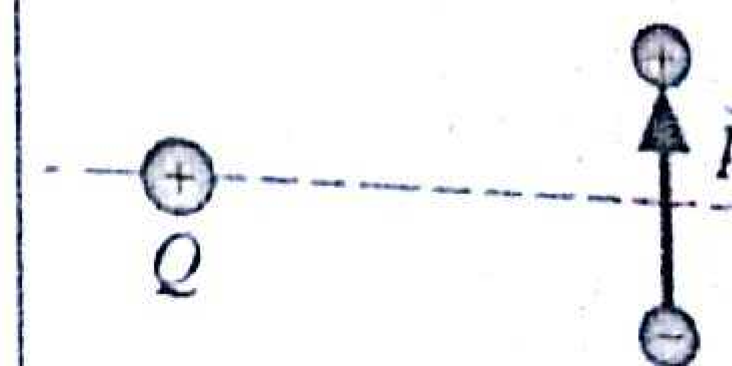
Una carga puntual $+Q$ está fija y a cierta distancia se coloca un dipolo $\vec{p}$ en forma simétrica como en la figura: El dipolo tiende a moverse en dirección hacia…



a) arriba, b) abajo, c) la derecha, d) la izquierda

PE-2.13. *¿En qué sentido tiende a girar el dipolo?*

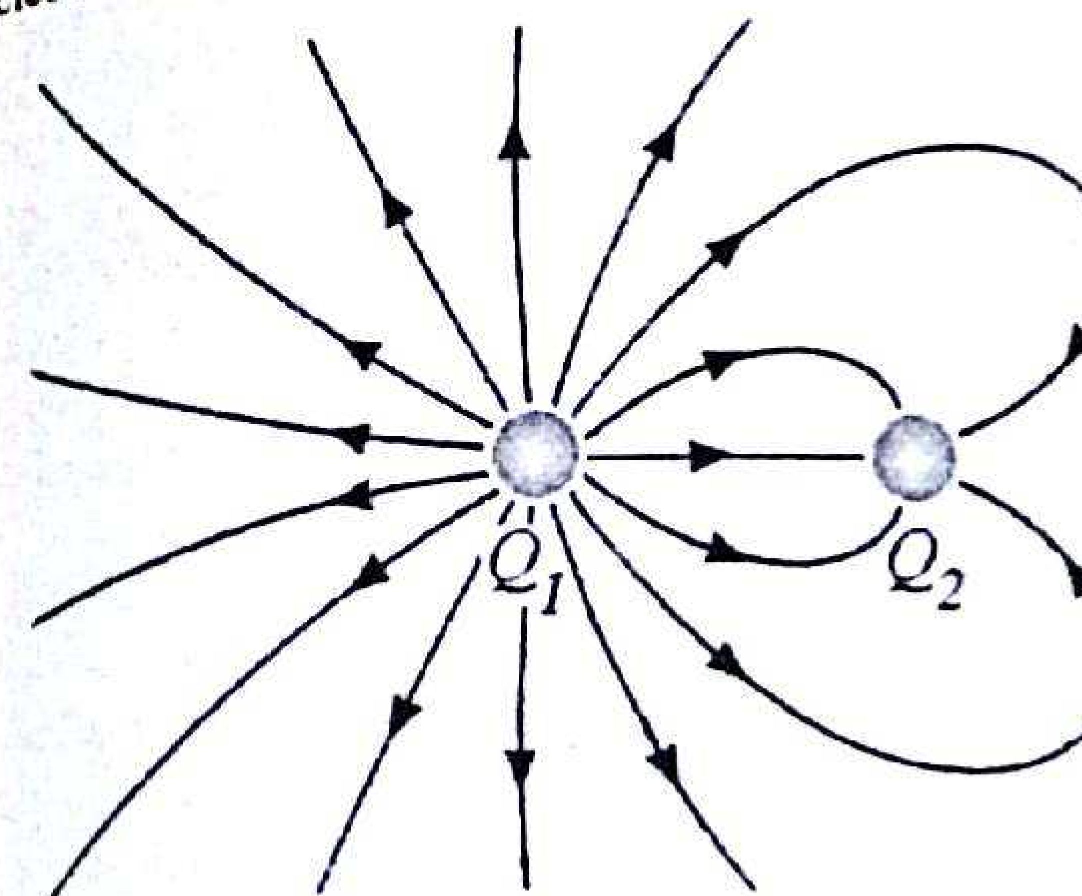
Una carga puntual $+Q$ está fija y a cierta distancia se coloca un dipolo $\vec{p}$ en forma simétrica como en la figura. En qué sentido tiende a girar el dipolo…



a) *Sentido Horario.* b) *Sentido Anti-horario.* c) *No gira.*

PE-2.14. *¿Cuáles cargas generan este campo?*

En la figura se muestra una configuración del campo eléctrico generado por dos partículas cargadas.

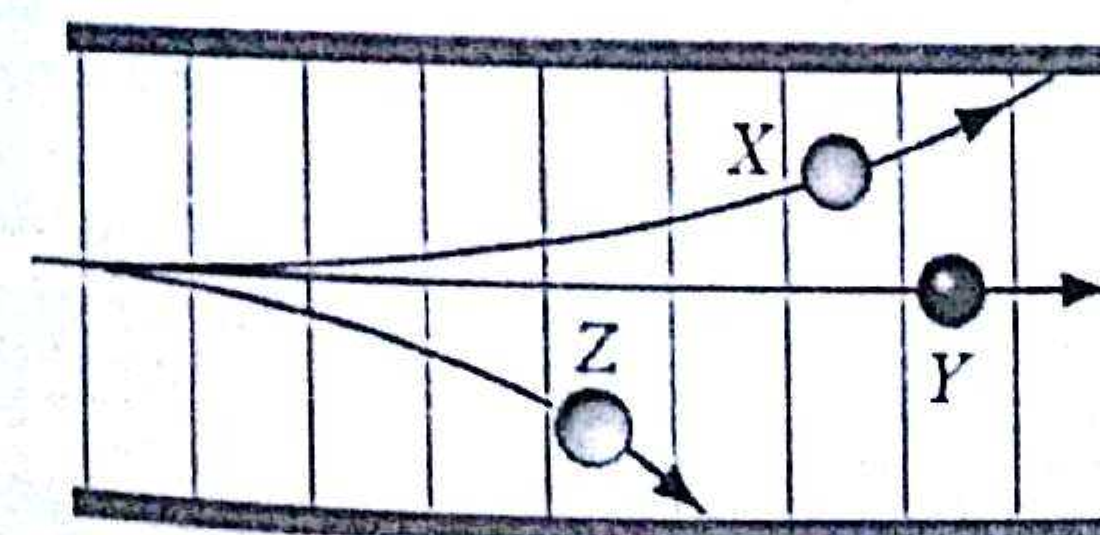


La relación entre las magnitudes de estas cargas es:

a) $Q_1 / Q_2 = 1/3$
b) $Q_1 / Q_2 = 2/3$
c) $Q_1 / Q_2 = 3/2$
d) $Q_1 / Q_2 = 4$
e) $Q_1 / Q_2 = 3$

PE-2.15. *Identifica estas partículas por sus trayectorias*

Un haz de partículas, constituido por protones, neutrones y electrones, todos con igual velocidad, penetra en el campo uniforme vertical formado entre dos placas electrizadas y se observa que el haz se divide en otros tres: *X*, *Y* y *Z*, como indica la figura.



Si se desprecia el efecto de la gravedad, se puede decir que las partículas son respectivamente…

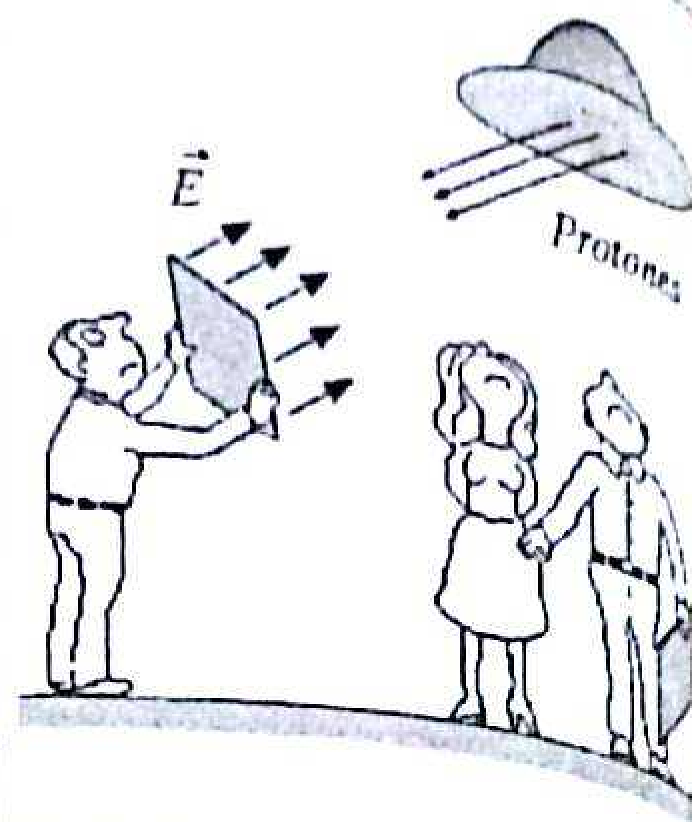
a) *X* electrón, *Y* neutrón, *Z* protón.
b) *X* protón, *Y* electrón, *Z* neutrón.
c) *X* protón, *Y* neutrón, *Z* electrón.
d) *X* electrón, *Y* protón, *Z* neutrón.
e) Falta información.

PE-2.16. ***Prepárate que vienen los extraterrestres***

En una comiquita de la guerra de las galaxias, desde un platillo volador, los invasores disparan protones con una energía cinética de $1{,}60\text{x}10^{-17}$ J. Para repeler los protones, un terrícola inventó una pantalla protectora que produce un campo eléctrico E = 100 N/C. ¿Cuál será la distancia que recorren los protones antes de detenerse?

a) x = 16 cm b) x = 10 cm c) x = 1 m

d) x = 1,6 m e) x = 16 m



CAP. 2: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
2.01					✓
2.03			✓		
2.05				✓	
2.07		✓			
2.09					✓
2.11				✓	
2.13	✓				
2.15			✓		

	a	b	c	d	e
2.02				✓	
2.04				✓	
2.06		✓			
2.08			✓		
2.10		✓			
2.12	✓				
2.14					✓
2.16			✓		

Charles de Coulomb

1736 - 1806



Estampilla de correos en honor a Coulomb

Nació en Angulema, Francia. Ingeniero militar, desde muy joven trabajó en el cuerpo de ingenieros del ejército, distinguiéndose como constructor de varias fortalezas francesas, una de ellas en Martinica. Al mismo tiempo dedicaba sus ratos de ocio a estudios sobre brújula, experimentaba con agujas suspendidas por hilos, pudo medir fuerzas de torsión y determinar sus coeficientes para varias sustancias. Esto ocurría en la época de la Revolución Francesa. Se retiró a la edad de 53 años de su cargo de superintendente de aguas y fuentes de Francia para dedicarse por entero a sus investigaciones científicas. Coulomb construyó la llamada balanza de torsión para medir la fuerza de atracción y repulsión entre cuerpos electrizados. Esta consiste de una varilla ligera suspendida horizontalmente de un filamento largo, una pequeña esfera cargada está en un extremo de la barra y un contrapeso sin carga en el otro extremo. Cuando se acerca a la primera esfera una segunda esfera cargada, la atracción o repulsión hace rotar la varilla y se tuerce el filamento vertical provocando que gire en torno del punto de suspensión hasta que la torsión del hilo equilibre la fuerza actuante. Con tal sencillo instrumento verificó la ley enunciada en 1785 que lleva su nombre de que la atracción y repulsión entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas y lo es inversamente al cuadrado de la distancia. La ley de Coulomb se asemeja a la ley de gravitación universal enunciada por Newton unos 100 años antes de los experimentos de Coulomb. Ambas predicen la variación inversa del cuadrado con la distancia del mismo modo. La ley coulombiana constituye un descubrimiento de gran importancia que aun medio siglo después las investigaciones de Faraday lo dejan intacto y sólo agregan una constante (la constante dieléctrica) propia del material sin cambiar su esencia. La ley de Coulomb fue la primera ley fundamental establecida en el campo de la electricidad. Los estudios de Coulomb sobre la repartición de carga en los conductores llevaron a la conclusión de que esta sólo se encuentra situada en la superficie. Teoría que sostenían otros físicos de la época entre ellos Franklin, mas la experiencia de Coulomb la confirma mostrando que una esfera hueca cargada y aislada no ejerce ninguna acción eléctrica sobre esferitas de prueba colocadas en su interior. La ausencia de fuerza interna suministraba un apoyo más a la ley del inverso del cuadrado, ya que Newton había demostrado matemáticamente que una concha esférica uniforme de materia gravitatoria no podría ejercer ninguna acción sobre un cuerpo situado en su interior y que ninguna otra fuerza salvo la del inverso del cuadrado, podría dar cuenta de este hecho. Coulomb también publicó varios trabajos en otros campos: como la fricción de las máquinas, la elasticidad de los metales, análisis estructural y fracturas en vigas y columnas. La ciencia ha perpetuado su memoria designando en su honor con la palabra coulomb la unidad de carga eléctrica del Sistema Internacional de unidades.

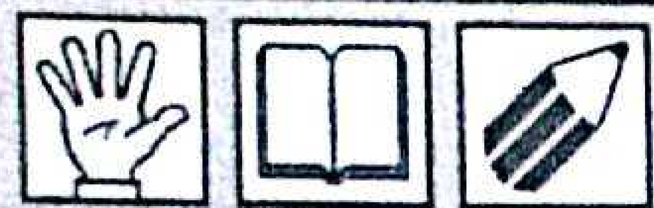
3

LA LEY DE GAUSS

En principio, mediante la ley de Coulomb podemos calcular el campo eléctrico generado por cualquier distribución de cargas en reposo, sin embargo, en muchas situaciones el cálculo podría resultar muy tedioso y las integrales tan complicadas que se requiere el uso de computadoras para evaluarlas numéricamente. Existen configuraciones de cargas que presentan altas simetrías, tales como un cascarón esférico o una línea infinita, para las cuales se puede calcular el campo eléctrico con extraordinaria facilidad usando un recurso alternativo mas ingenioso, conocido como la ley de Gauss. En realidad, la ley de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb, ya que se basa en el hecho de que la fuerza electrostática entre cargas puntuales depende del cuadrado de la distancia. La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada con la suma algebraica de las cargas incluidas dentro de dicha superficie. Aunque es muy pequeño el número de situaciones que se pueden abordar directamente mediante la ley de Gauss, esta ley es mas fundamental que la ley de Coulomb ya que permite profundizar sobre la naturaleza de los campos eléctricos y comprender problemas mas complicados como ciertas propiedades del campo eléctrico en conductores, y cómo se distribuyen las cargas en estos materiales.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Flujo del campo eléctrico
- La ley de Gauss
- Aplicaciones de la ley de Gauss
- Conductores en equilibrio electrostático



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

FLUJO DE UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

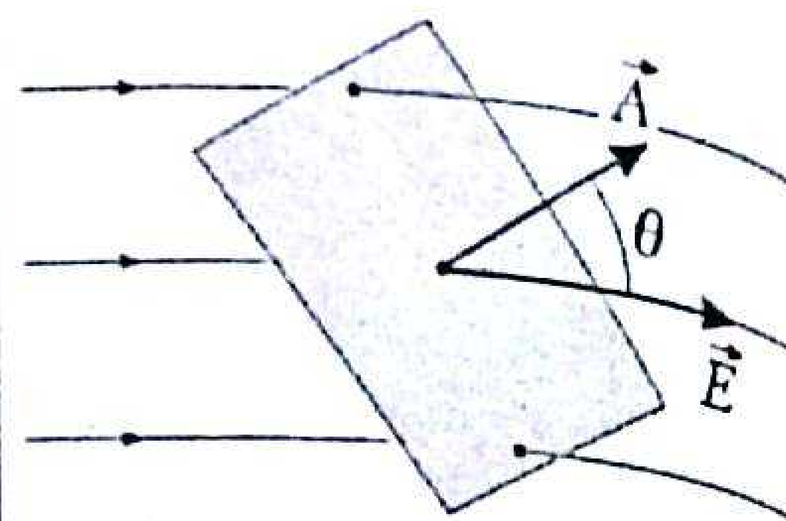
El flujo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana se define como el producto de la componente de $\vec{E}$ normal a dicha superficie, multiplicada por su área:

$$\Phi_E = E_{\perp}A = EA\cos\theta$$

En términos del producto escalar, el flujo es $\Phi_E = \vec{E} \bullet \vec{A}$, donde el vector área $\vec{A}$ tiene módulo igual al área de la superficie y dirección normal a dicha superficie.

El flujo del campo eléctrico es una medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie.

La unidad Si del flujo del campo eléctrico es $N.m^2/C$.



Flujo

$$\Phi_E = \vec{E} \bullet \vec{A}$$

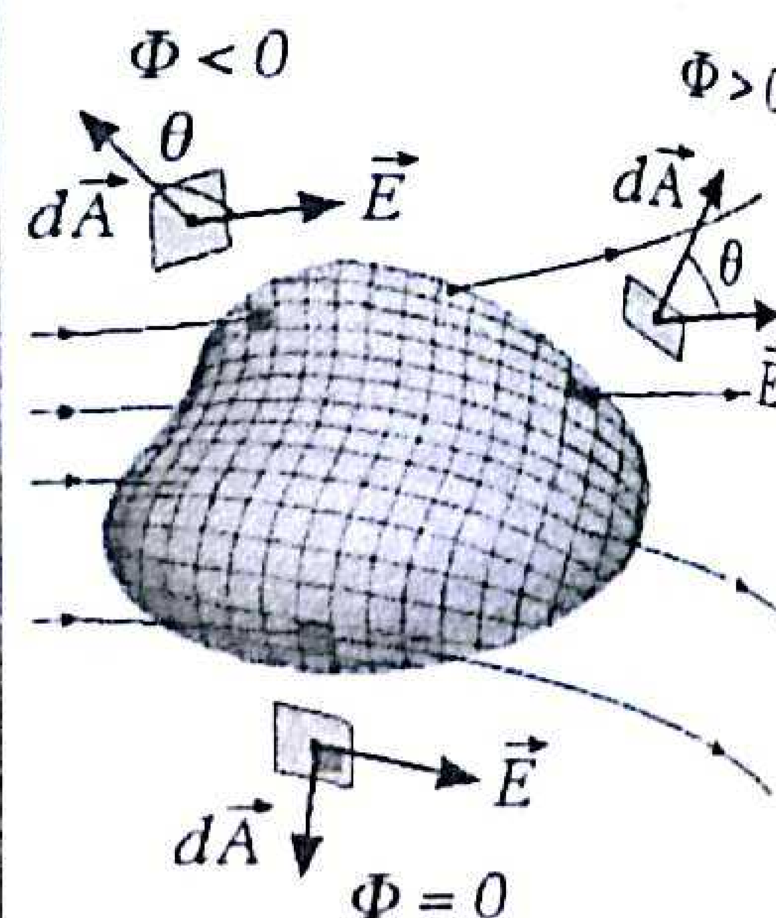
FLUJO DE UN CAMPO NO UNIFORME

En general, el campo eléctrico puede variar de un punto a otro en una superficie. En este caso, se puede considerar que la superficie está dividida en un gran número de elementos tan pequeños que, sobre estos se puede despreciar la variación del campo eléctrico. El diferencial de flujo sobre un elemento de área $d\vec{A}$ es:

$$d\Phi_E = \vec{E} \bullet d\vec{A}$$

El flujo eléctrico total sobre una superficie, S, será la suma (integral) sobre todos los elementos de superficie:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{A}$$



El flujo sobre un elemento de superficie puede ser positivo, negativo o cero. Si el flujo es saliente, se considera positivo y si es entrante, se considera negativo.

El flujo total sobre una superficie cerrada podría ser nulo, como se ilustra en la figura anterior. En este caso el número de líneas de campo que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen.

Si $\theta < \pi/2$, Φ es positivo

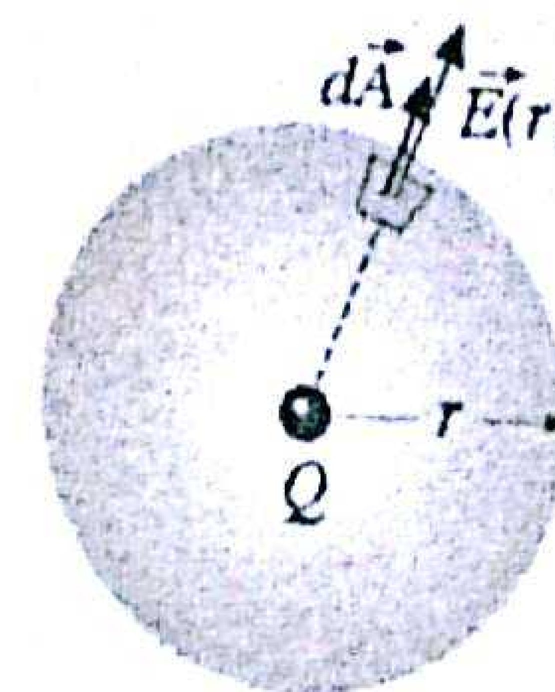
Si $\theta = \pi/2$, Φ es nulo

Si $\theta > \pi/2$, Φ es negativo

FLUJO EN ESFERA CENTRADA EN UNA CARGA

Consideramos el campo eléctrico generado por una carga puntual Q, el cual sabemos que es radial y vale $E = kQ/r^2$. Calculemos el flujo de $\vec{E}$ a través de una esfera imaginaria de radio r y concéntrica con Q. Si $\hat{r}$ es un vector unitario radial, el elemento de área se representa por $\hat{r}dA$ y el flujo es:

$$\Phi_E = \oint_{esfera} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int \frac{kQ\hat{r}}{r^2} \bullet \hat{r}dA = \frac{kQ}{r^2}\int dA = \frac{kQ}{r^2}4\pi r^2$$



Como $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, se obtiene:

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi(9x10^9)} = 8{,}85x10^{-12}\,\frac{C^2}{N.m^2}$$

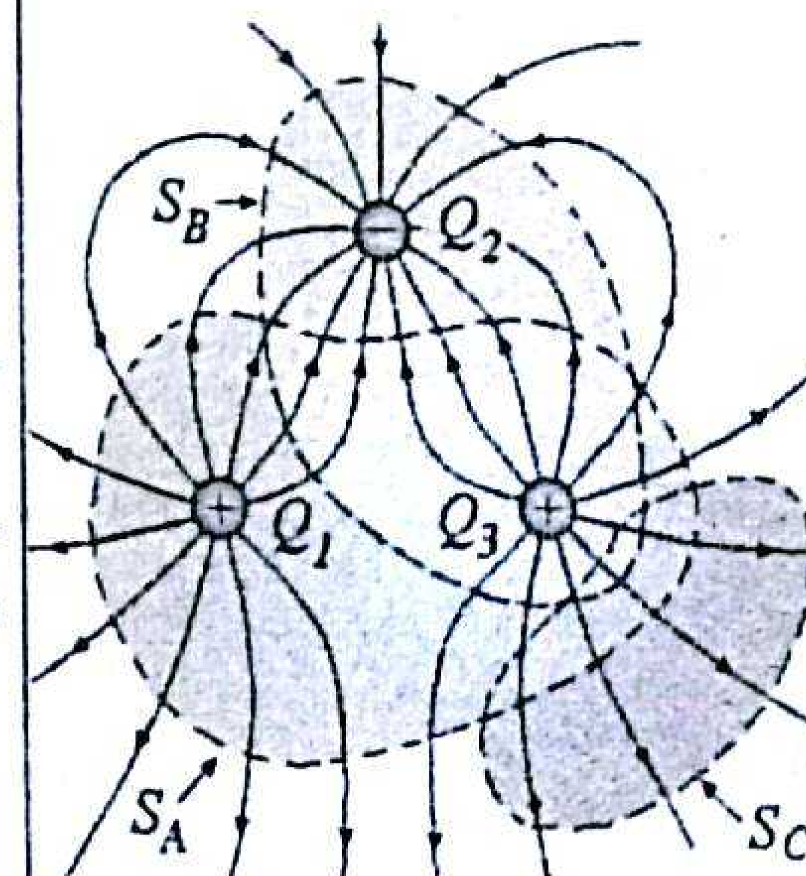
Es decir, el flujo que atraviesa la superficie esférica resulta ser la carga encerrada por dicha superficie dividida por ε_0 y el resultado no depende del radio r de la esfera.

LA LEY DE GAUSS

Se puede generalizar el resultado anterior a cualquier superficie, y mostrar que el flujo sobre una superficie cerrada que rodea a una carga es proporcional al valor de esta pero no depende de la forma de la superficie ni de la posición de la carga. La ley de Gauss establece que:

El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie hipotética cerrada es igual a la carga neta encerrada por esta superficie dividida por ε_0

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$



En la figura se muestran tres superficies cerradas, S_A, S_B, S_C, que rodean distintas cantidades de carga y el flujo neto a través de cada una de ellas estará determinado por la carga neta (suma algebraica) de las cargas que están encerradas.

Flujo en S_A: $(Q_1 + Q_3)/\varepsilon_0$

Flujo en S_B: $(Q_3 - Q_2)/\varepsilon_0$

Flujo en S_C: cero

Observe que, aunque el campo total en cada punto de la superficie gaussiana es debido a todas las cargas, tanto las internas como las externas, el flujo eléctrico neto a través de esa superficie depende solo de las cargas internas.

Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

PRUEBA DE LA LEY DE GAUSS

Sea una carga puntual Q rodeada por una superficie cerrada de forma arbitraria. El elemento de área indicado, $\hat{n}\Delta A$, forma un ángulo θ con la línea radial que sale de Q. El flujo de $\vec{E}$ a través de este elemento de área es:

$$\Delta\Phi = \vec{E} \bullet \hat{n}\Delta A = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \bullet \hat{n}\Delta A = kQ\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

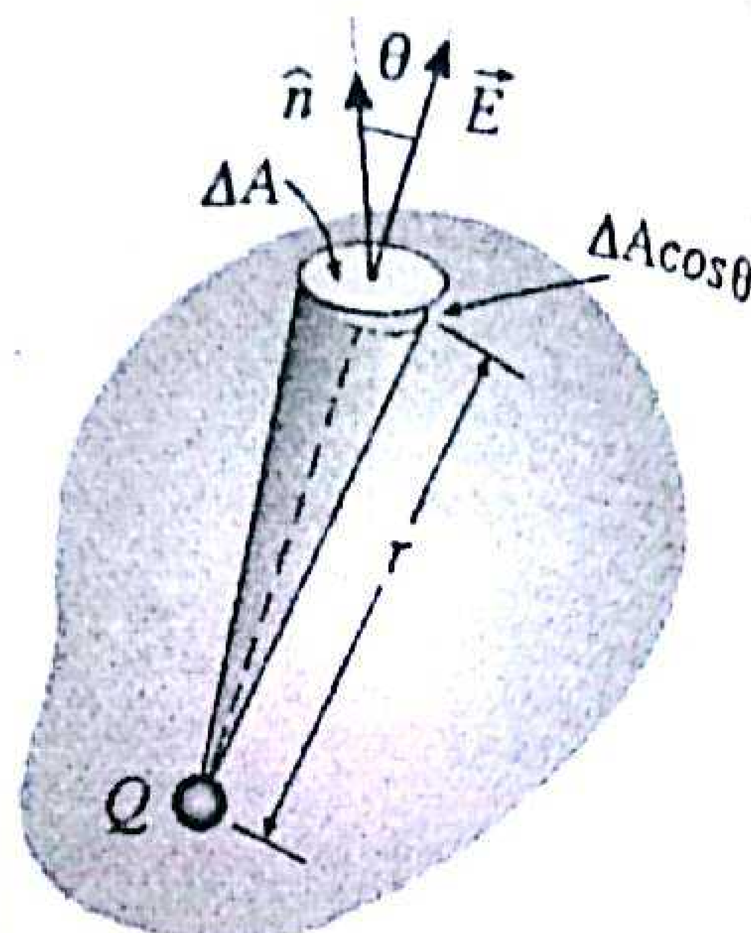
La cantidad $\Delta A\cos\theta / r^2$ es justamente el *ángulo sólido* $\Delta\Omega$ subtendido en la carga Q por el elemento de área ΔA, que es el mismo ángulo sólido subtendido por el elemento de área en una superficie esférica de cualquier radio:

$$\Delta\Phi = kQ\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2} = kQ\Delta\Omega$$

El flujo total en toda la superficie cerrada será la suma de los flujos $\Delta\Phi$, es decir, kQ veces el ángulo sólido total subtendido por la superficie cerrada en Q, que es 4π estereorradianes.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \bullet \hat{n}dA = kQ\oint_S d\Omega = 4\pi kQ = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Que es la ley de Gauss. El resultado es independiente de la forma de la superficie cerrada, así como de la posición de la carga dentro de la superficie.



Angulo sólido

La ley de Gauss relaciona el campo en los puntos de una superficie cerrada, con la carga neta encerrada por esa superficie

COMO CALCULAR $\vec{E}$ CON LA LEY DE GAUSS...

Supongamos que la distribución de cargas está dada y se desea calcular el campo eléctrico en un punto dado. Para facilitar el cálculo se procede de la siguiente manera:

1. Identifique la simetría espacial de la distribución de carga y la del campo que ésta genera.
2. Elija cuidadosamente una superficie imaginaria que pase por el punto dado y además, sea apropiada a la simetría. Esta se denomina superficie gaussiana.
3. Divida la superficie en pedazos (planos, cilindros,..) de modo que en cada integral, el vector $\vec{E}$ esté orientado para que sea posible una de estas dos condiciones:
   a) Si $\vec{E}\perp d\vec{A}$, entonces: $\vec{E} \bullet d\vec{A} = 0$
   b) Si $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ y $|\vec{E}|$ = Cte, entonces: $\vec{E} \bullet d\vec{A} = \pm EA$
4. Finalmente, evalúe la carga neta encerrada por la superficie completa y aplique la ley de Gauss.

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{neta} = \int_V \rho dV \text{ (carga continua)}$$

$$Q_{neta} = \sum_{i=i}^{N} Q_i \text{ (carga discreta)}$$

SIMETRÍA ESFÉRICA

Una distribución de carga tiene simetría esférica si depende únicamente de la distancia a un punto dado. El campo $\vec{E}$ es radial y la superficie gaussiana apropiada es una esfera de radio r, concéntrica con la distribución. La superficie es perpendicular al campo $\vec{E}$ y como éste es de módulo constante en todos los puntos de la esfera, el flujo es:

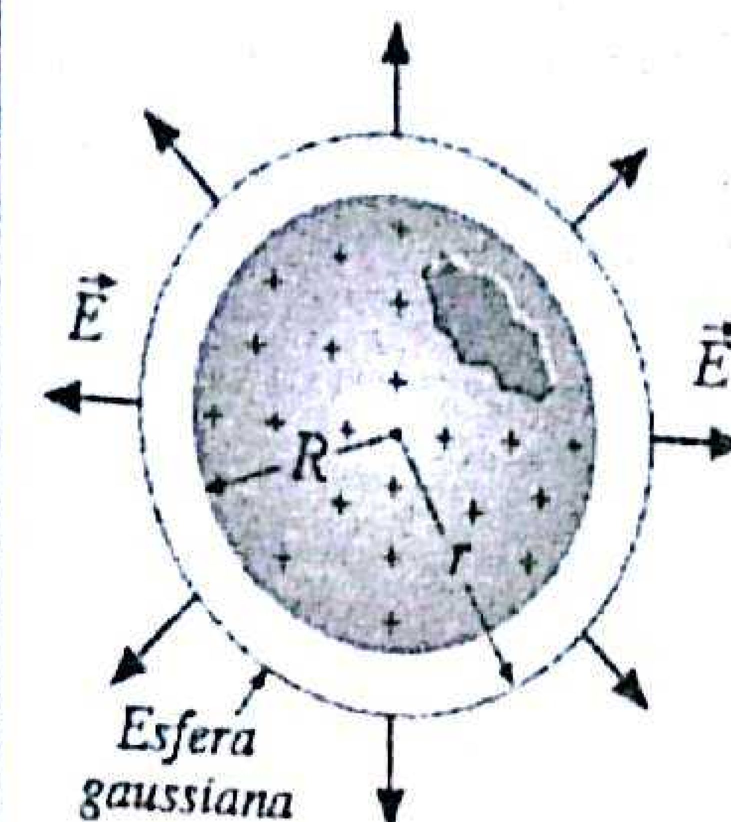
$$\Phi_E = E(Area) = E(4\pi r^2)$$

La carga neta encerrada puede ser calculada para cada distribución de carga esférica específica y esto permite determinar el campo eléctrico en cada caso particular.

<u>*Cascarón esférico*</u>: Para calcular el campo dentro y fuera de un cascarón esférico de radio R y carga uniforme Q, las superficies gaussianas son esferas concéntricas:

En el interior ($r<R$): $Q_{enc} = 0 = E(4\pi r^2) \Rightarrow E = 0$

En el exterior ($r>R$): $Q_{enc} = Q \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$



Campo de un cascarón esférico

Dentro ($r < R$): $\vec{E} = 0$

Fuera ($r > R$): $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$

SIMETRÍA CILÍNDRICA

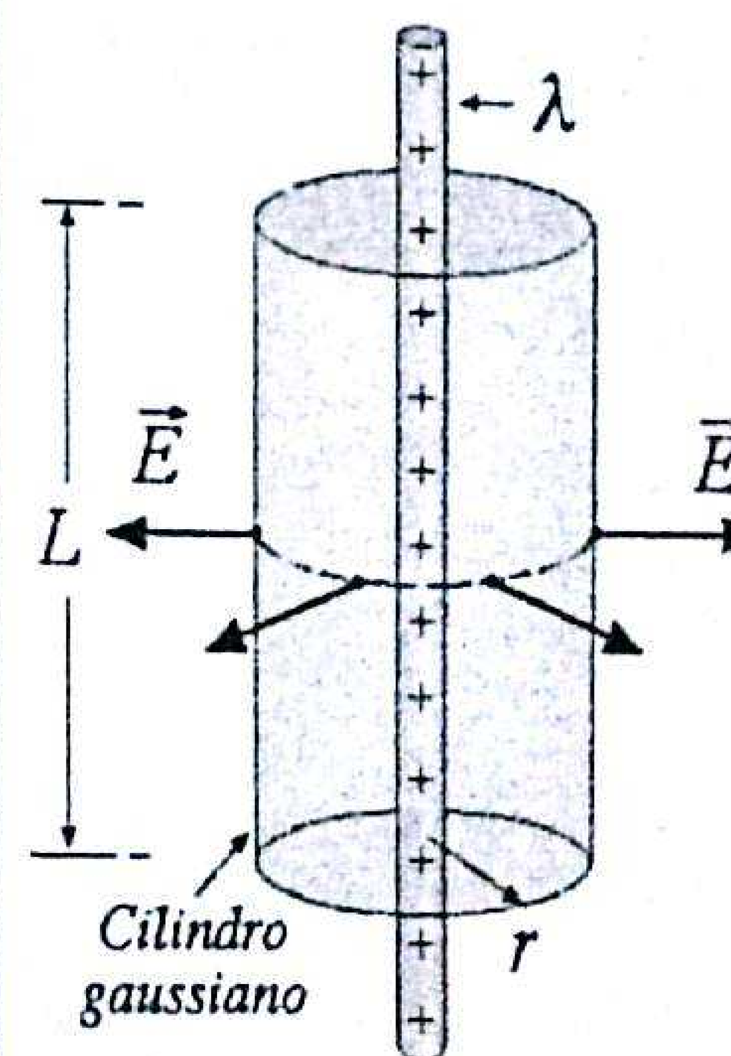
Una distribución de carga tiene simetría cilíndrica si *depende sólo de la distancia a una línea recta*. Para calcular el campo a una distancia radial r, la superficie gaussiana apropiada es un cilindro de largo L y radio r. En las dos tapas planas del cilindro el flujo es cero, por ser el vector $\vec{E}$ tangente a las mismas. En la parte cilíndrica el campo es perpendicular y de módulo constante, el flujo neto es:

$$\Phi_E = E(Area) = E(2\pi rL)$$

La carga neta encerrada por este cilindro imaginario depende de la situación particular.

<u>*Línea de carga:*</u> Para calcular el campo fuera de una recta de carga muy larga, con densidad lineal λ(C/m), escogemos un cilindro gaussiano de radio r y largo finito, L. La carga encerrada es: $Q_{enc} = \lambda L$ y aplicando la ley de Gauss, se obtiene:

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



Campo de una línea de carga

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

SIMETRÍA PLANA

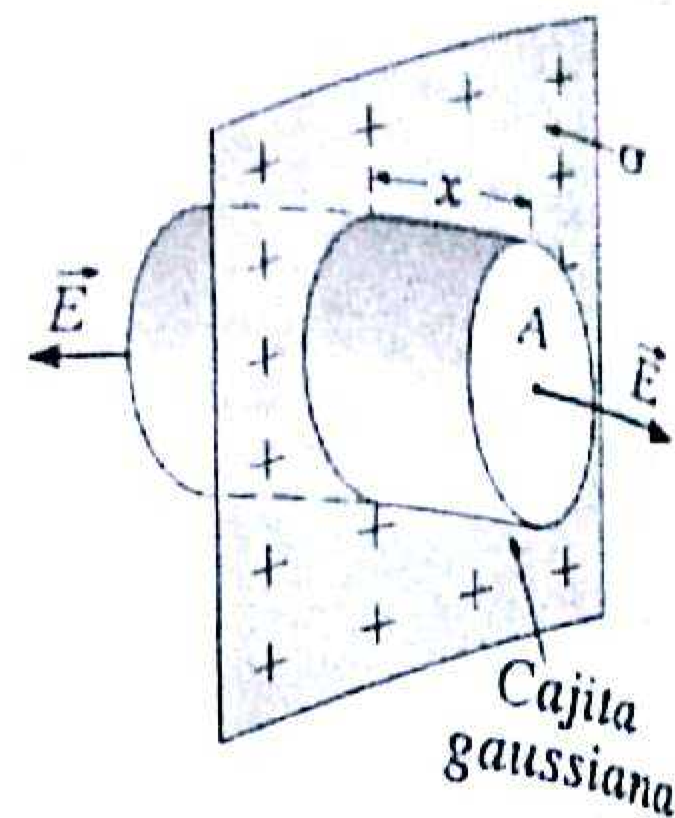
Para una distribución de carga con simetría plana el campo eléctrico resulta uniforme a una distancia fija de un plano dado.

<u>Hoja infinita de carga:</u> Para calcular el campo eléctrico a una distancia x de un plano infinito no conductor con carga uniforme por unidad de área σ (C/m²), elegimos como superficie gaussiana una cajita cilíndrica con sus tapas planas paralelas y a igual distancia x del plano. En los laterales de la caja, por ser el vector $\vec{E}$ tangente a la superficie, el flujo es cero. En las tapas planas a cada lado, por simetría, los campos son de sentidos opuestos y de igual módulo. El flujo neto es dos veces el valor del flujo en cada tapa:

$$\Phi_E = 2EA$$

Siendo A el área de cada tapa. Igualando el flujo con la carga neta encerrada, $Q_{enc} = \sigma A$, y dividida por ε_0, se obtiene el campo eléctrico:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Campo a cada lado de una hoja infinita con carga uniforme

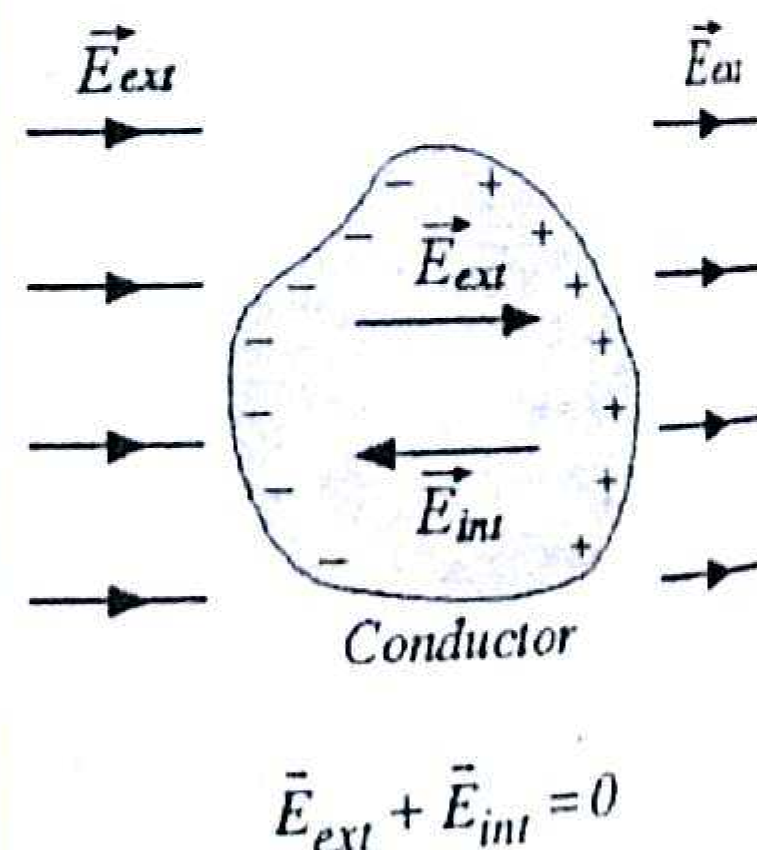
$$\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

LA LEY DE GAUSS Y LOS CONDUCTORES

Los materiales conductores tales como los metales contienen partículas cargadas (electrones) que no están unidos a ningún átomo y pueden moverse con entera libertad dentro del material. A partir de la ley de Gauss, se puede inferir información interesante sobre las cargas y campos asociados a un conductor cuando está en equilibrio electrostático.

1) *En equilibrio electrostático, $\vec{E} = 0$ en cualquier punto del interior de un conductor*

<u>Demostración:</u> Si éste no fuera el caso, las cargas libres se acelerarían bajo la acción del campo eléctrico, violando así la suposición de que estaban en equilibrio.
Si colocamos un conductor en un campo, $\vec{E}_{ext}$, originado por cargas externas, las cargas libres del conductor se distribuirán en su superficie de tal manera que cuando se alcanza el equilibrio, el campo interno propio $\vec{E}_{int}$, que ellas generan anula al campo externo dando un campo resultante nulo dentro del conductor.

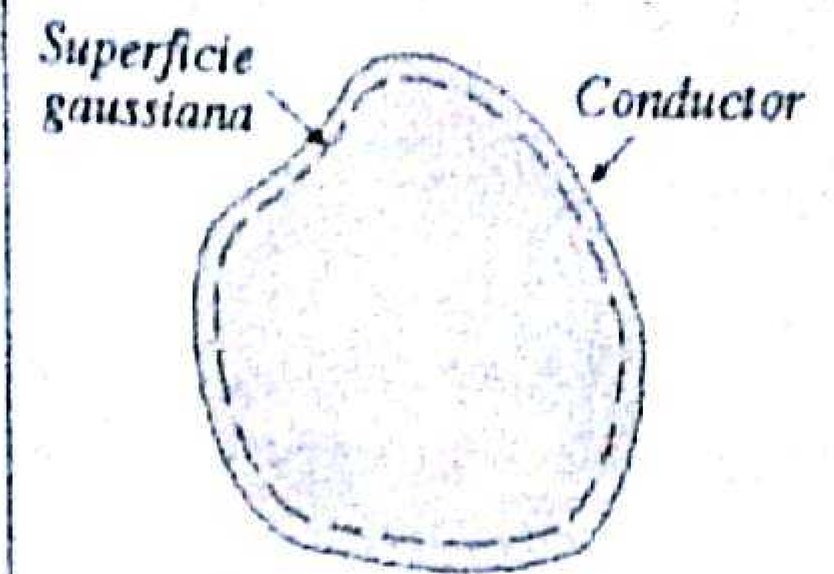


$$\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = 0$$

2) *Cualquier carga neta en un conductor aislado debe residir enteramente sobre su superficie*

<u>Demostración:</u> Consideremos una superficie gaussiana arbitraria que esté en el interior del conductor, y tan cerca de la superficie como queramos. Como en equilibrio el campo es nulo en todos los puntos de esta superficie gaussiana, el flujo neto a través de dicha superficie también debe ser nulo.

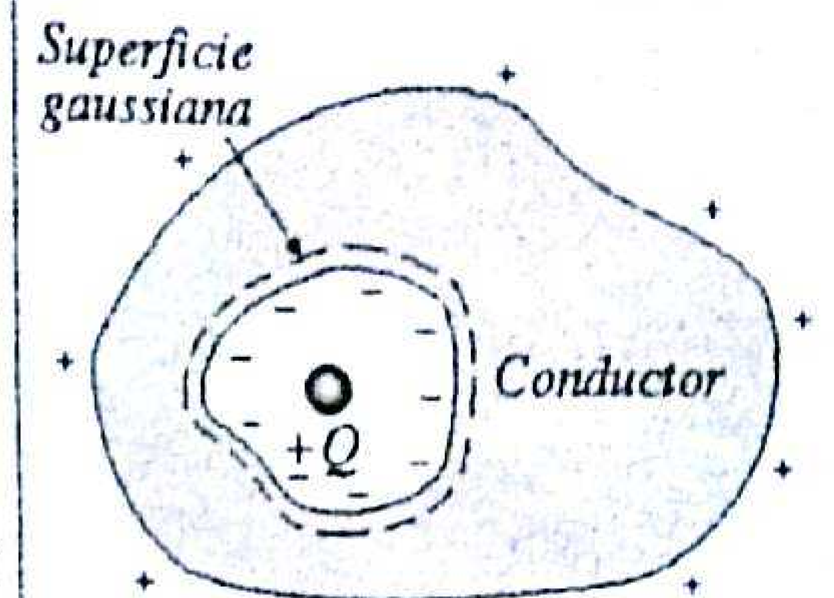
La ley de Gauss implica que el volumen definido por dicha superficie no debe contener ninguna carga neta. Por consiguiente, si existe algún exceso de carga en el conductor, éste debe residir enteramente en su superficie.



La carga neta debe residir en la superficie

Una situación interesante se presenta cuando el conductor tiene una *cavidad* interna. Suponga que colocamos una carga puntual $+Q$ dentro de la cavidad. Si rodeamos la cavidad con una superficie gaussiana cerca de sus paredes pero adentro del cuerpo conductor, el flujo será cero en esa superficie, por ser $E = 0$ en el interior.

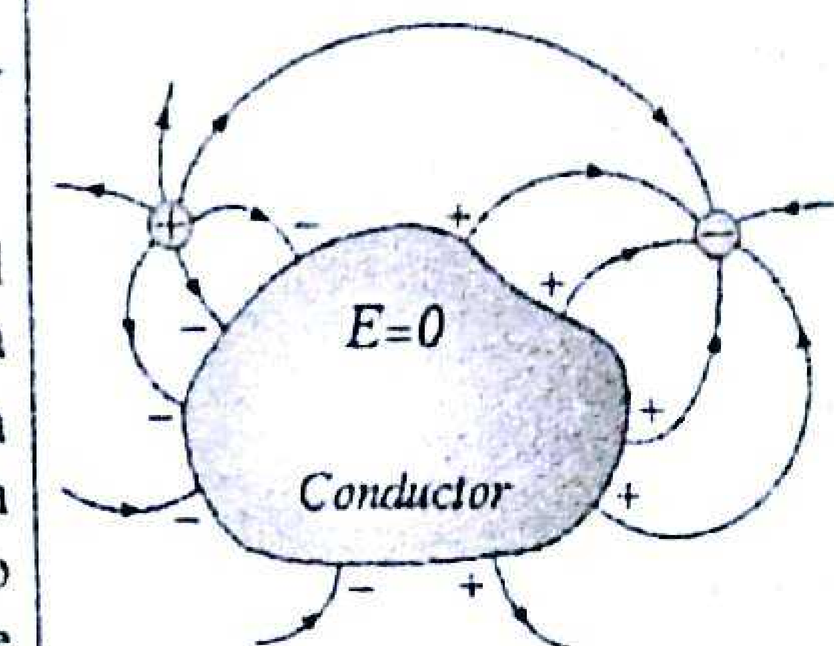
De acuerdo a la ley de Gauss la carga neta encerrada por la superficie debe ser cero. Esto implica que debe haber una carga inducida $-Q$ en la superficie de la cavidad. Como el conductor es neutro, su superficie externa debe adquirir una carga igual y opuesta, $+Q$.



Una carga $+Q$ dentro de la cavidad de un conductor induce cargas en su superficie

3) *En la superficie de un conductor, $\vec{E}$ es perpendicular a dicha superficie.*

<u>Demostración</u>: El campo justo en la superficie del conductor debe ser perpendicular a dicha superficie, ya que si hubiese una componente tangencial de $\vec{E}$, ésta provocaría un movimiento de las cargas libres en la superficie, lo cual contradice la suposición de equilibrio electrostático. Las líneas de campo eléctrico siempre intersecan la superficie de un conductor a un ángulo recto.



$\vec{E}$ es perpendicular a la superficie de un conductor

4) *El campo $\vec{E}$ en la superficie de un conductor tiene un valor σ/ε_0, donde σ es la densidad de carga local.*

Para hallar el módulo del campo eléctrico, se selecciona un pequeño cilindro gaussiano que tenga una tapa plana afuera y la otra tapa adentro del conductor. No hay flujo en la pared cilíndrica, por ser el vector $\vec{E}$ tangente a ella, ni tampoco dentro del conductor donde el campo es nulo.

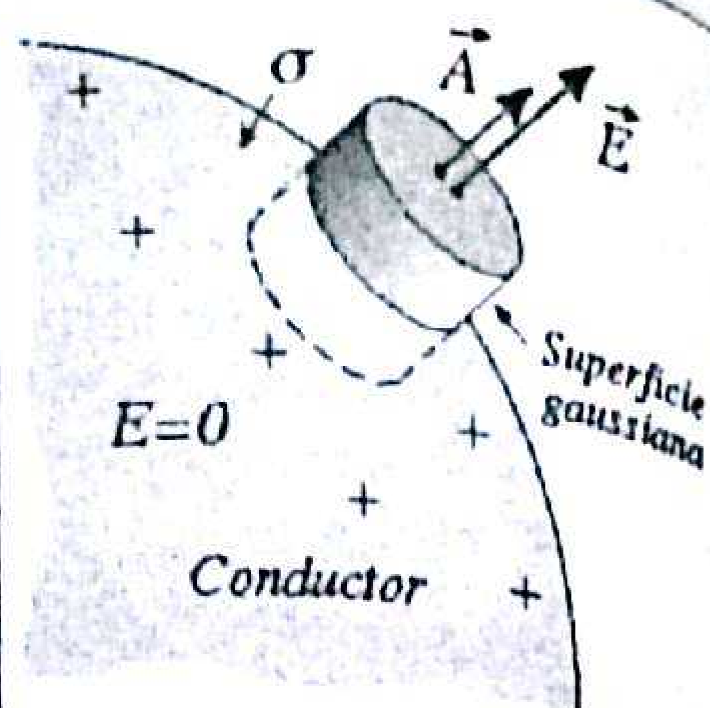
El flujo neto que sale de la caja es: $\Phi = EA$, siendo A el área de la tapa plana. Aplicando la Ley de Gauss:

$$\Phi = EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

De modo que el campo eléctrico justo en la superficie del conductor es perpendicular a ésta y tiene un valor:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Observe que el campo en la superficie del conductor, (σ/ε_0) es justamente el doble del campo producido por una hoja infinita de carga, $(\sigma/2\varepsilon_0)$.



Campo en la superficie de un conductor

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

DISCONTINUIDAD DE E_n

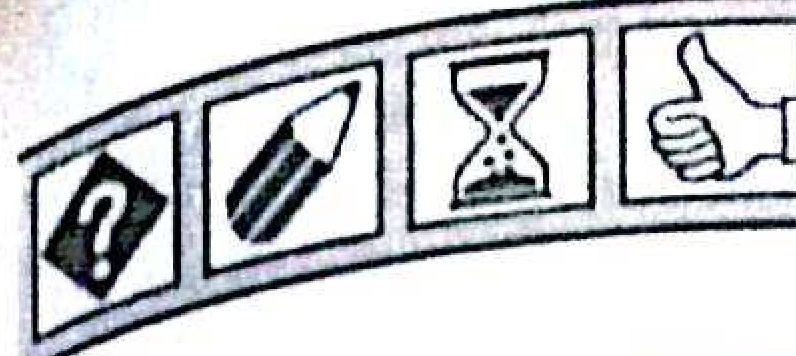
Ya hemos visto que el campo eléctrico correspondiente a un plano infinito con densidad de carga σ pasa de tener un valor $E = -\sigma/2\varepsilon_0$ en un lado del plano a un valor $E = +\sigma/2\varepsilon_0$ al otro lado, es decir, es discontinuo en una cantidad $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$. Similarmente para una superficie metálica portadora de una densidad de carga σ, el campo eléctrico es cero dentro del metal y vale σ/ε_0 afuera.

Este es un resultado general en la superficie portadora de una densidad de carga σ, es decir, *la componente normal de $\vec{E}$ es discontinua en el valor σ/ε_0.*

Sin embargo, esto no sucede en la superficie de una distribución volumétrica de carga, donde el valor de $\vec{E}$ si es continuo, como se verá en algunos de los problemas resueltos de la siguiente sección.

En una superficie con densidad de carga σ la componente normal de $\vec{E}$ es discontinuo en el valor:

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-3.01. *Averigüe lo que hay dentro de esa caja*

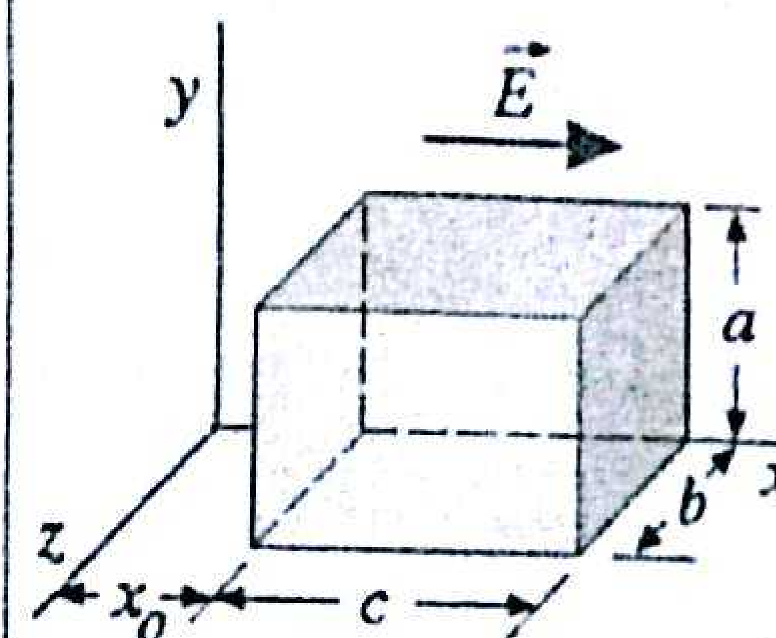
Una superficie cerrada con forma de caja rectangular, y con dimensiones a, b y c, está localizada a una distancia x_o del origen de coordenadas. En la región existe un campo eléctrico que está dado por la expresión:

$$\vec{E} = (m + nx^2)\hat{x} \text{ N/C}$$

Donde las constantes son: $m = 3$ N/C, $n = 2$ N/C·m² y la distancia x está en metros.

a) Calcule el flujo eléctrico a través de cada tapa.

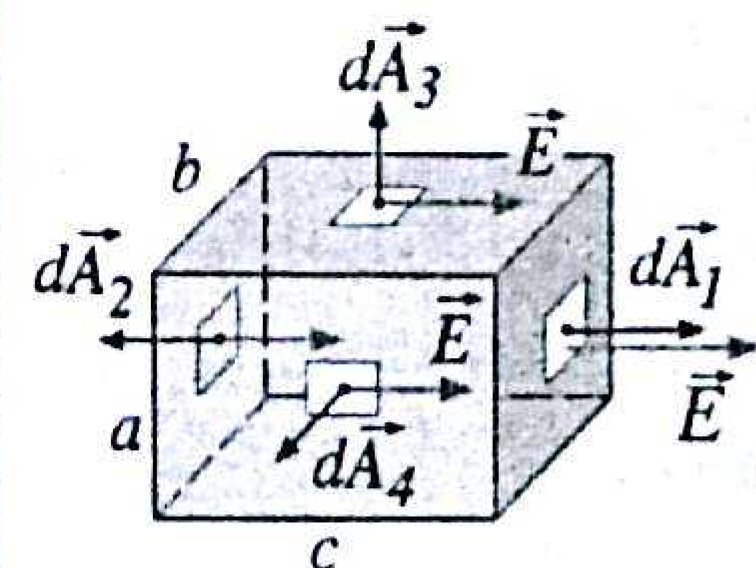
b) Determine la carga neta que hay en la caja, suponiendo que $x_o = 0,1$ m; $a = 0,2$ m; $b = 0,3$ m y $c = 0,4$ m.



Solución: En las cuatro caras que son paralelas al eje x, el vector $\vec{E}$ es perpendicular a los respectivos vectores de área $\vec{A}$, por lo tanto $\vec{E} \bullet \vec{A} = 0$, y el flujo resulta nulo en cada una de ellas:

$$\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$$

Por otra parte, en las dos caras que son paralelas al eje x, el flujo será no nulo. En ambas caras el vector $\vec{E}$ es paralelo al vector área, $\vec{A}$ y su magnitud tiene un valor constante en toda la superficie.



En la cara ubicada en $x = x_o$, el flujo es:

$$\Phi_2 = \vec{E}_2 \bullet \vec{A}_2 = [(m + nx_0^2)\hat{x}] \bullet (-ab\hat{x}) = -(m + nx_0^2)ab$$

En la cara ubicada en $x = x_0 + c$, el flujo es:

$$\Phi_1 = \vec{E}_1 \bullet \vec{A}_1 = [m + n(x_0 + c)^2]\hat{x} \bullet (+ab\hat{x})$$

$$\Phi_1 = [m + n(x_0 + c)^2]ab$$

Por lo tanto, el flujo total que sale del cubo será la suma de los flujos en sus seis caras:

$$\Phi_{total} = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i = [m + n(x_0 + c)^2 - (m + nx_0^2)]ab$$

$$\Phi_{total} = nabc(2x_0 + c)$$

b) Aplicando la ley de Gauss encontramos la carga neta dentro de la caja:

$$\Phi_{total} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \varepsilon_0 nabc(2x_0 + c)$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos:

$$Q = (8{,}85\text{x}10^{-12})2(0{,}2)(0{,}3)(0{,}4)[2(0{,}1) + 0{,}4]$$

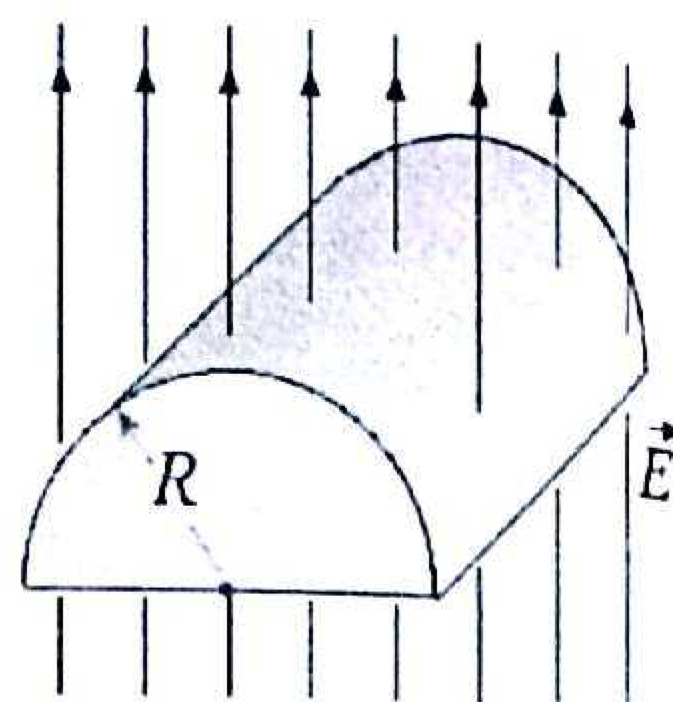
$$Q = 2{,}55\text{x}10^{-13}C$$

Respuesta

a) $\Phi_{total} = nabc(2x_0 + c)$
b) $Q = 2{,}55\text{x}10^{-13}C$

PR-3.02. ***Flujo eléctrico en superficie semicilíndrica.***

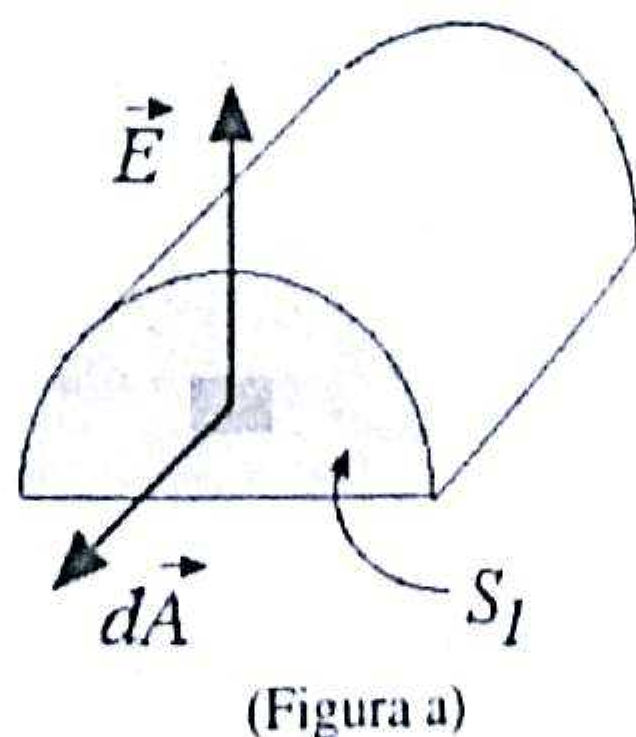
Un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, penetra una superficie que tiene la forma de un cilindro de radio R cortado por la mitad. Las líneas de campo entran perpendicularmente por la base que tiene forma rectangular plana, de longitud L y ancho $2R$.
a) Calcule explícitamente el flujo del campo eléctrico a través de las superficies planas y curva del semicilindro.
b) Demuestre que la carga encerrada por la superficie entera es cero.



Solución: a) Consideremos primero las dos tapas laterales planas de forma semicircular S_1 (Fig. a). Como $\vec{E}$ es perpendicular al vector $d\vec{A}$ en ambas superficies, $\vec{E} \bullet d\vec{A} = 0$ y el flujo a través de ellas será cero:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0$$

Para hallar el flujo en la cara cilíndrica (superficie S_2), escogemos un elemento diferencial de superficie en forma de tira rectangular delgada de longitud L y espesor $Rd\phi$.

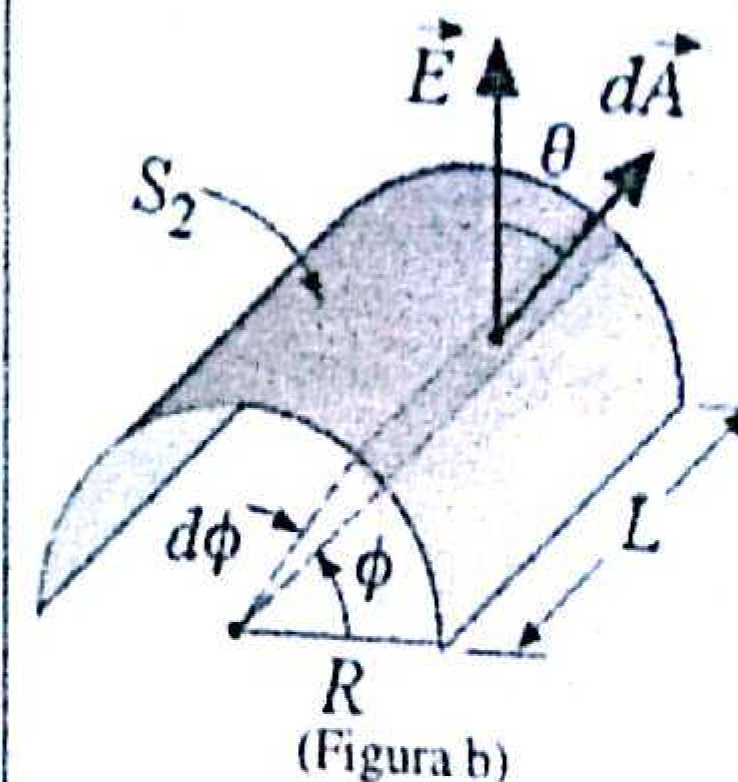


(Figura a)

El área de la tira es: $dS = LRd\phi$, y por lo tanto el flujo es:

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{S_2} E\cos\theta(LRd\phi) = ELR \int_{S_2} sen\phi d\phi$$

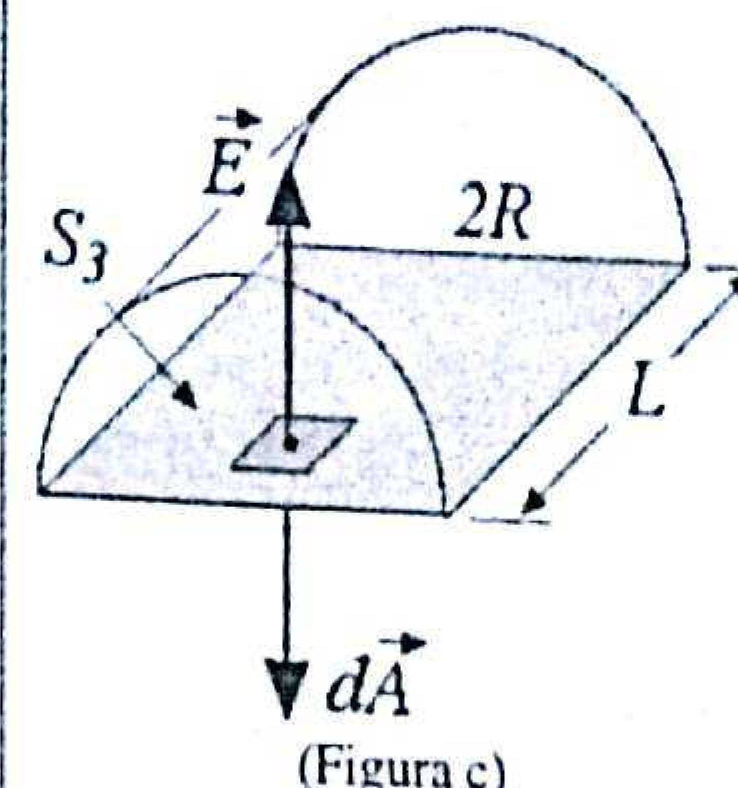
$$\Phi_2 = ELR(-\cos\phi)|_0^{\pi} = ELR[-1-(1)] = +2ELR$$



(Figura b)

Por el último, en la tapa rectangular (Fig. c), los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ son antiparalelos y el flujo es:

$$\Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\cos\pi \int_{S_3} dA = -2ELR$$



(Figura c)

El flujo total sobre la superficie entera es la suma de los flujos:

$$\Phi_{total} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 + 2ELR - 2ELR = 0$$

b) Como el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es cero, de acuerdo a la ley de Gauss, también será nula la carga neta encerrada por dicha superficie:

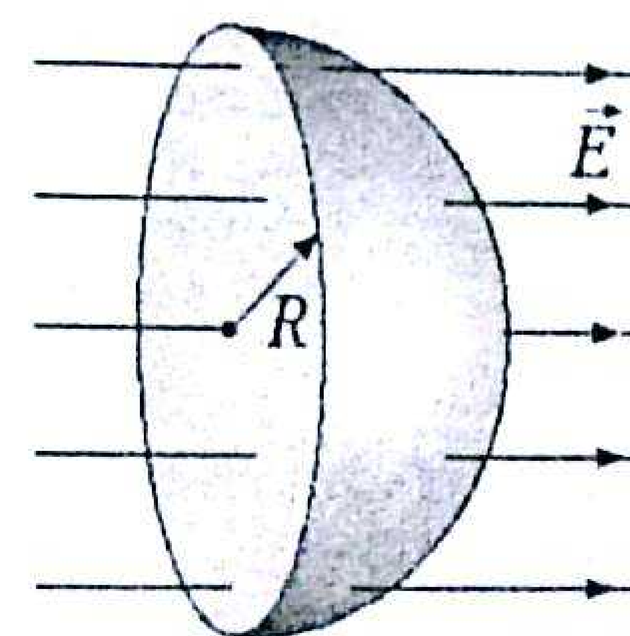
$$\Phi_{total} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{neta} = 0$$

Respuesta:

a) $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = -\Phi_3 = 2ELR$
b) $Q_{neta} = 0$

PR-3.03. ***Flujo eléctrico a través de un hemisferio.***

Un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, penetra en un hemisferio de radio R, normal a su cara plana.
a) Calcule explícitamente el flujo Φ que emerge de la superficie curva del hemisferio.
b) Demuestre que el flujo que emerge de la superficie curva es justamente el negativo del flujo que entra en la superficie plana.



Solución: En la superficie hemisférica la simetría es apropiada para escoger un elemento de área en la forma de una tira circular delgada de radio: $r = R sen\theta$. El área de esta tira es el producto de su longitud ($2\pi r = 2\pi R sen\theta$) por su ancho ($Rd\theta$):

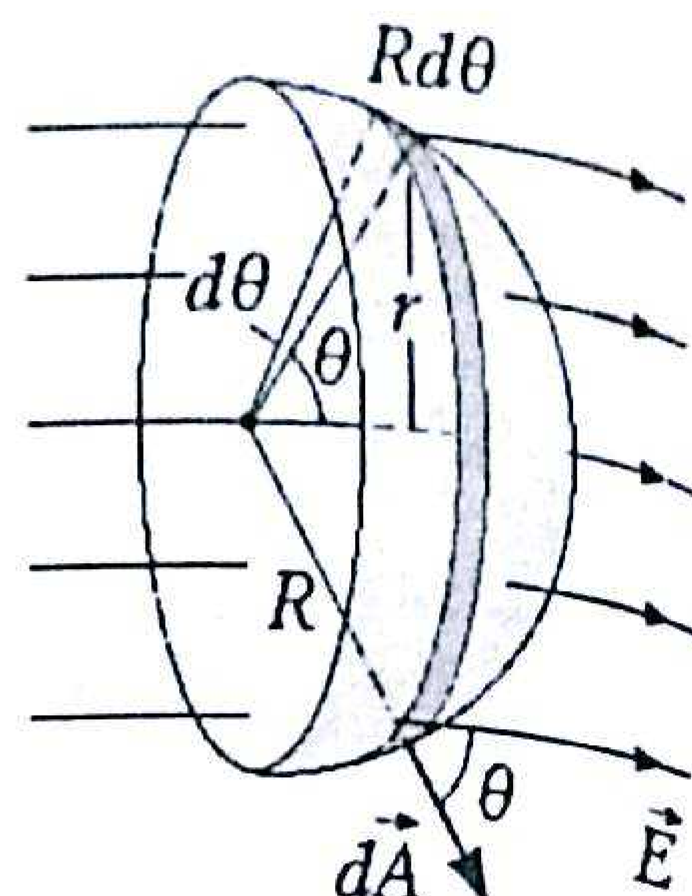
$$dA = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$$

Se observa que el ángulo θ entre los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ permanece igual sobre toda la tira. Además, para barrer toda la superficie hemisférica, el ángulo θ varía entre 0 y $\pi/2$. Integrando, obtenemos el flujo total:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_0^{\pi/2} (E\cos\theta)(2\pi R^2 sen\theta d\theta)$$

$$\Phi = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} sen\theta d(sen\theta) = 2\pi R^2 E \frac{sen^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2 E$$

El resultado es, justamente el negativo del flujo que entra por la tapa plana ($EA\cos 180° = -\pi R^2 E$). Esto significa que si el hemisferio se cubriera con una tapa plana, entonces tendríamos una superficie cerrada y el flujo neto a través de ésta sería cero. Esto es lo que predice la ley de Gauss, en virtud de no haber carga neta encerrada.



Respuesta:

$\Phi = \pi R^2 E$

PR-3.04. *Flujo eléctrico a través de un disco circular*

Una carga puntual Q se localiza en el eje de un disco circular de radio R a una distancia a del plano del disco. Determine el flujo eléctrico a través del disco.

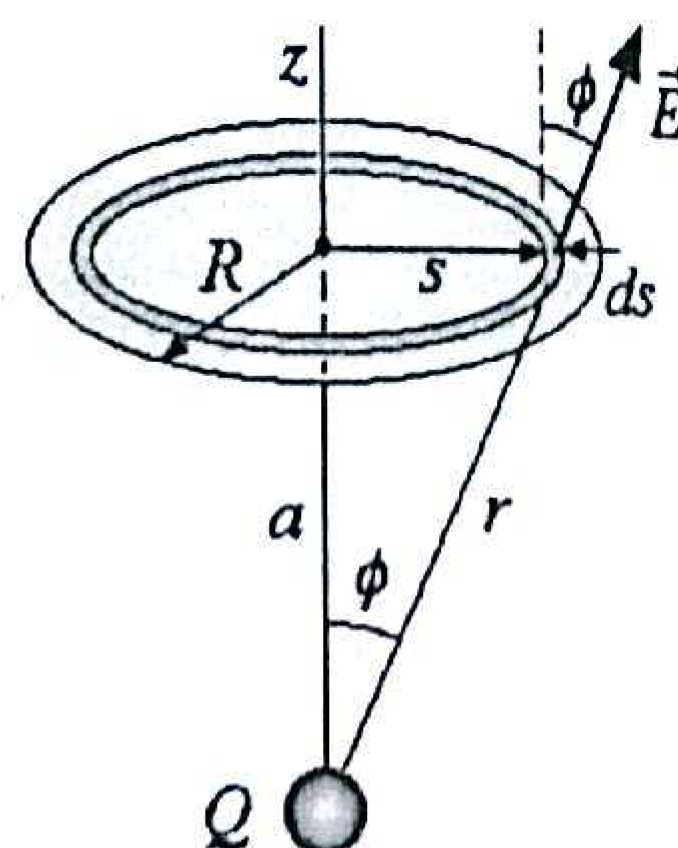
Solución: En el disco escogemos un anillo diferencial de radio s y espesor ds. El área de este elemento es: $dA = 2\pi s ds$ y el flujo que lo atraviesa:

$$d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \bullet 2\pi s ds \hat{z} = \frac{kQ}{r^2} 2\pi s ds \cos\phi$$

Siendo: $\cos\phi = a/r = a/\sqrt{R^2+s^2}$. El flujo sobre el disco entero es:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_0^R \frac{kQ}{r^2}\frac{a}{r} 2\pi s ds = 2\pi kQa \int_0^R \frac{s ds}{(a^2+s^2)^{3/2}}$$

$$\Phi = 2\pi kQa\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}\right)\Big|_0^R = 2\pi kQ\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]$$



Respuesta:

$\Phi = 2\pi kQ\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]$

PR-3.05. *Superficie cilíndrica encerrando carga puntual*

Una carga puntual Q se encuentra en el centro de una superficie cilíndrica de radio R y altura $2a$.
a) Calcule por integración directa el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie cilíndrica.
b) Utilice el resultado del problema anterior para verificar que el flujo total sobre la superficie cerrada coincide con lo que predice la ley de Gauss.

Solución: Si escogemos una cinta cilíndrica a una altura z, el ángulo subtendido es tal que: $z = R\mathrm{tg}\theta$. El área de esta cinta es el producto de su longitud $2\pi R$ por su altura $dz = R\sec^2\theta d\theta$, de modo que su área es:

$$dA = 2\pi R dz = 2\pi R^2 \sec^2\theta d\theta$$

Para todos los elementos de área en la superficie de la cinta, los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ forman el mismo ángulo, θ, por lo tanto el flujo total es la integral:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{kQ}{(R/\cos\theta)^2}(2\pi R^2 \sec^2\theta d\theta)\cos\theta$$

El ángulo límite varía entre $-\theta_0$ y $+\theta_0$, siendo $sen\theta_0 = a/\sqrt{R^2+a^2}$:

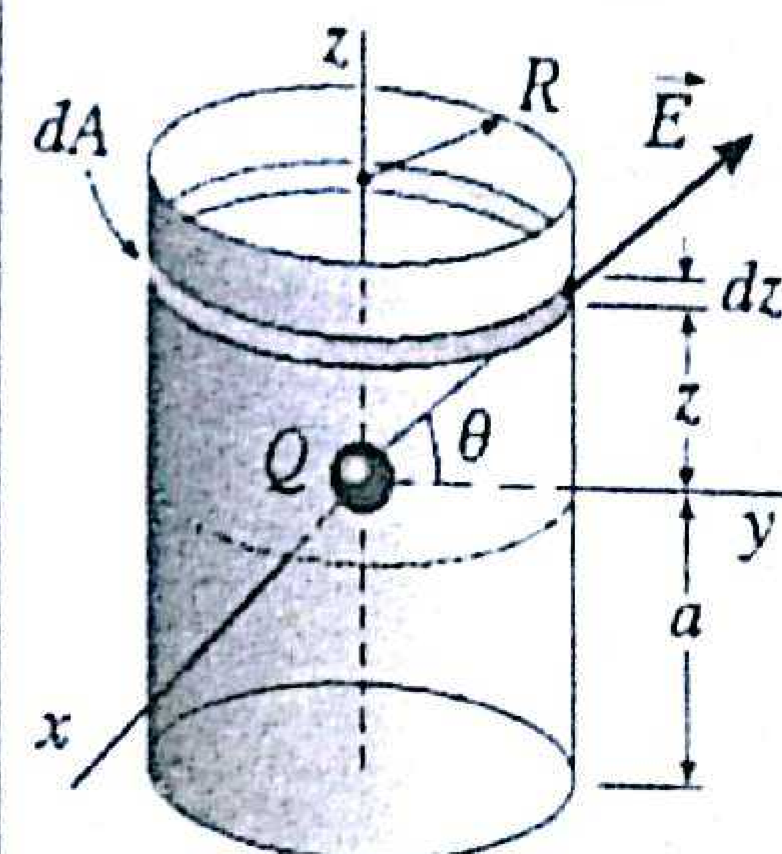
$$\Phi = 2\pi kQ \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta d\theta = 2\pi kQ sen\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0} = 4\pi kQ sen\theta_0$$

$$\Phi = \frac{4\pi kQa}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

b) El flujo total sobre la superficie cerrada es la suma del flujo que atraviesa la superficie cilíndrica, mas el flujo en las dos tapas circulares. Este último fue calculado en el problema anterior, por lo tanto:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{cil} + 2\Phi_{tap} = \frac{4\pi kQa}{\sqrt{R^2+a^2}} + 4\pi kQ\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]$$

$$\Phi_{tot} = 4\pi kQ = 4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Respuesta:

a) $\Phi = \frac{4\pi kQa}{\sqrt{R^2+a^2}}$

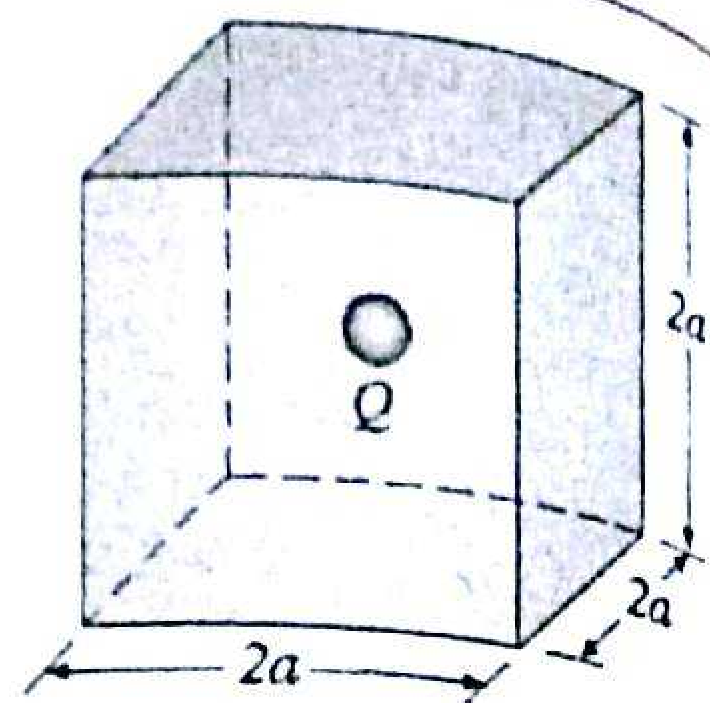
b) $\Phi_{tot} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

PR-3.06. *Aplicando Gauss resulta mucho mas fácil*

Una carga puntual Q se encuentra en el centro de un cubo de lado $2a$, como indica la figura. Determine el flujo del campo eléctrico en una de sus caras. Use dos procedimientos diferentes:

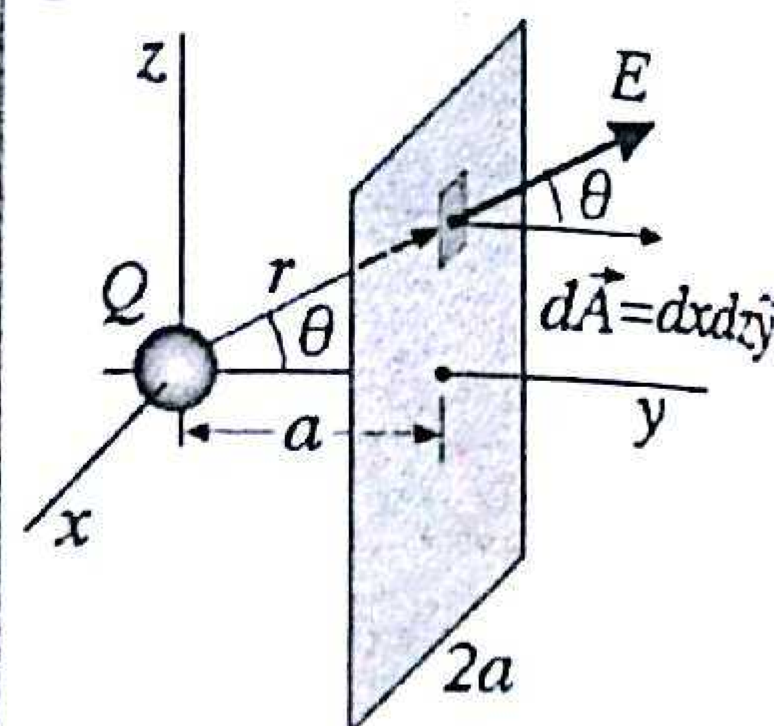
a) Calculando explícitamente la integral del flujo.

b) Aplicando la Ley de Gauss.



Solución: a) Cálculo directo: Consideremos un sistema de coordenadas centrado en la carga. En la cara del cubo mostrada en la figura, un elemento de área será: $d\vec{A} = dxdz\hat{y}$. El campo eléctrico en este elemento de área ubicado a distancia r de la carga puntual es:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^3}\vec{r} = \frac{kQ}{r^3}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$



Donde: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, es el vector posición en términos de los vectores unitarios ortogonales: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. Tomando en cuenta que: $\hat{x}\bullet\hat{y} = \hat{z}\bullet\hat{y} = 0$, y que $\hat{y}\bullet\hat{y} = 1$, El diferencial del flujo eléctrico sobre el elemento $d\vec{A}$ ubicado en $y = a$ es:

$$d\Phi = \vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{kQ}{r^3}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})\bullet dxdz\hat{y} = \frac{kQa}{r^3}dxdz$$

El flujo total sobre todo el cuadrado es la integral de superficie:

$$\Phi = 4\int_0^{+a}\int_0^{+a}\frac{kQadxdz}{(x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para evaluar esta integral doble, primero procedemos a integrar sobre la variable x. Si ponemos $z^2 + a^2 = b^2$ la integral es del tipo (Véase: *Handbook of Mathematical Functions* por Abramowitz & Stegun, p.13, Dover 1965):

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2 + b^2}}\Bigg|_0^a = \frac{a}{b^2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Por lo tanto:

$$\Phi = 4kQa\int_0^a \frac{adz}{(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}}$$

La evaluación de la integral sobre la variable z es más complicada y su resultado es:

$$\int_0^a \frac{dz}{(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + c^2}} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - a^2}}Arctg\frac{z\sqrt{c^2 - a^2}}{a\sqrt{c^2 + z^2}}\Bigg|_0^a$$

con la condición: $c^2 > a^2$. En este caso particular tenemos $c^2 = 2a^2$, por lo tanto, el flujo en la cara de lado $2a$ es:

$$\Phi = 4kQa^2\frac{1}{a^2}Arctg\frac{z}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}\Bigg|_0^a = 4kQArctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{6}$$

$$\Phi = \frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

b) Usando la ley de Gauss y simetría: La carga Q está ubicada en el centro del cubo, que es un punto simétrico respecto a cada una de las seis caras del cubo. De acuerdo a la Ley de Gauss el flujo neto a través de la superficie gaussiana del cubo es justamente: $\Phi = Q/\varepsilon_0$. Debido a la simetría, este flujo se reparte por igual entre las 6 caras idénticas del cubo. Por lo tanto, el flujo a través de cualquiera de las caras es un sexto de este valor:

$$\Phi = \frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Resultado que coincide con el hallado anteriormente por el más laborioso método directo.

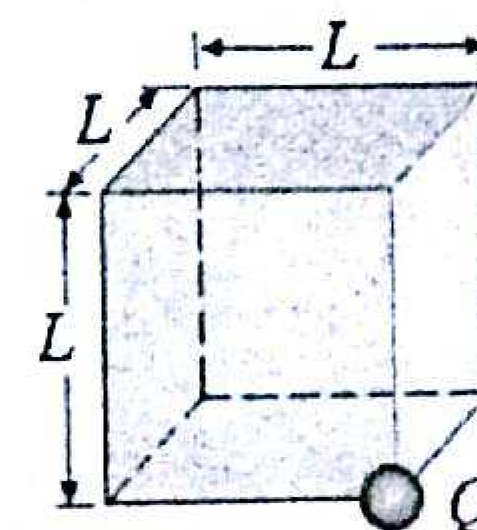
Respuesta:

Por ambos métodos:

$$\Phi = \frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

PR-3.07. *Flujo de una carga en la esquina del cubo.*

Una carga puntual Q está localizada en una esquina de un cubo de lado L, como indica la figura. Determine el flujo del campo eléctrico que atraviesa cada una de las seis caras del cubo.

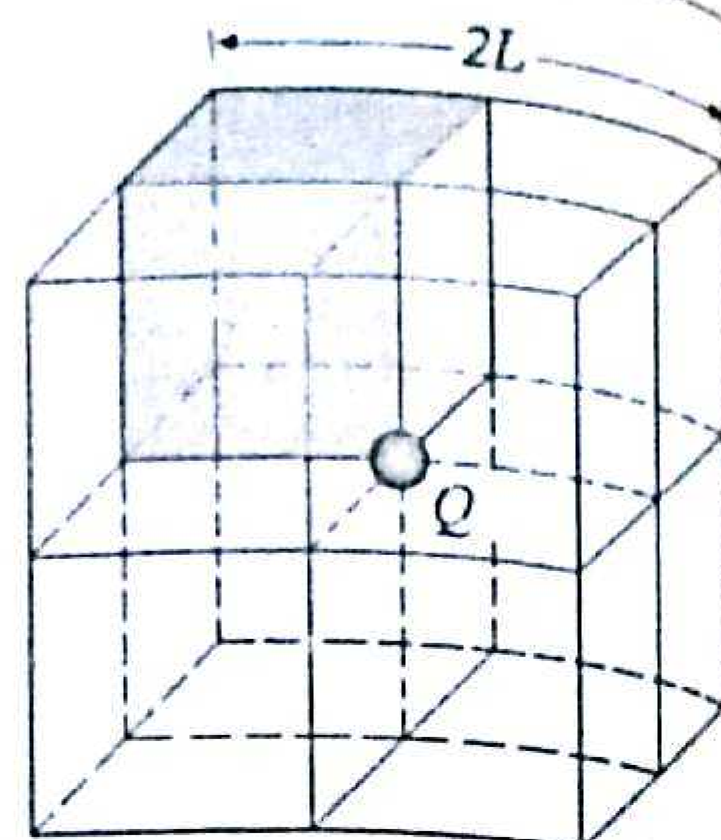


Solución: Según hemos visto en el problema anterior, para calcular el flujo no es necesario el procedimiento complicado de integración, basta con usar la ley de Gauss y argumentos de simetría.

Como el campo producido por una carga puntual tiene dirección radial en las tres caras adyacentes al vértice donde está la carga Q, el campo $\vec{E}$ será tangencial a dichas superficies y por lo tanto el flujo en esas caras será nulo.

Para hallar el flujo en las tres caras restantes, podemos apilar 8 cubos idénticos de forma tal que la carga Q quede en una esquina común a todos ellos. Se forma de esta manera una superficie gaussiana cúbica (de lado $2L$) alrededor de la carga puntual.

De acuerdo a la ley de Gauss el flujo total a través de la superficie así formada será Q/ε_0. Este flujo es la suma de los flujos de cada una de las 24 caras idénticas de cubos pequeños, correspondiéndole a cada cara, partes iguales de flujo por un valor de $(Q/24\varepsilon_0)$.

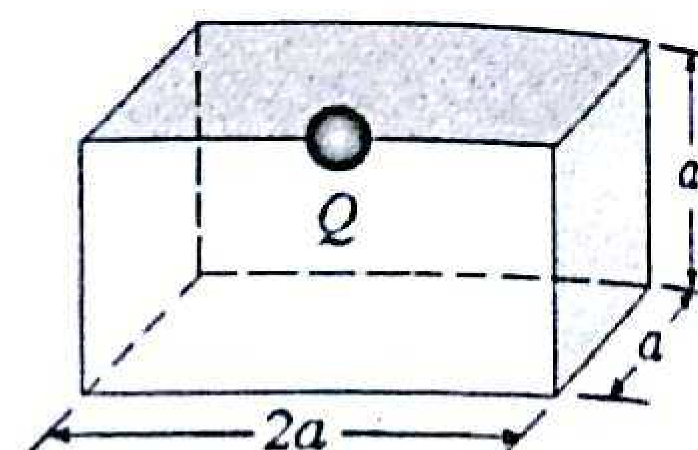


Respuesta:

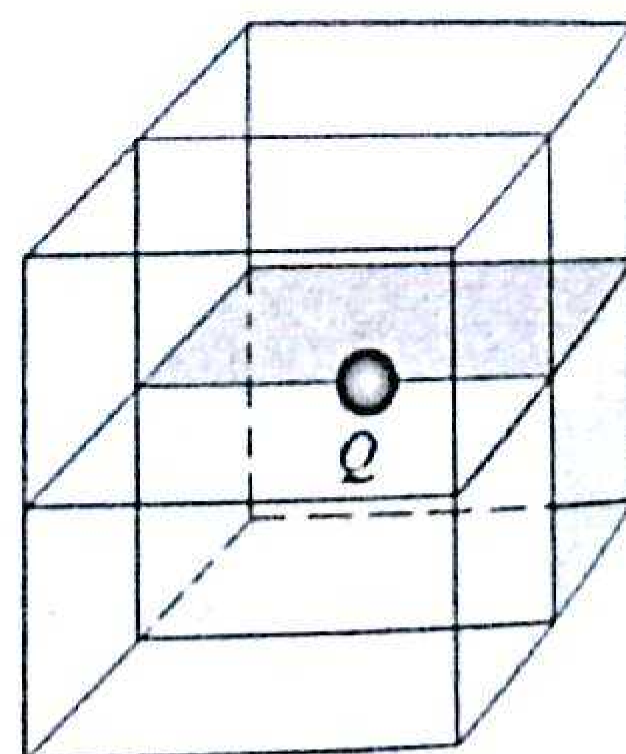
Tres caras adyacentes: $\Phi = 0$
Tres caras opuestas: $\Phi = Q/24\varepsilon_0$

PR-3.08. *Carga puntual en arista de un paralelepípedo*

Sea un paralelepípedo que tiene dos caras cuadradas de lado a, y cuatro caras rectangulares de lados a y $2a$. Una partícula con carga Q se encuentra situada en el punto medio de una de las aristas largas. Determine el flujo del campo eléctrico a través de cada una de sus caras y el flujo total a través del paralelepípedo.



Solución: En las dos caras rectangulares que son adyacentes a la carga Q, el flujo es cero puesto que el campo $\vec{E}$ es paralelo a estas superficies. Para hallar el flujo en las otras caras, aprovechamos la simetría que se obtiene agregando tres paralelepípedos iguales que tengan en común con el dado, la arista donde está la carga. De esta manera se obtiene un cubo de arista $2a$ centrado en la carga Q. Haciendo uso de la ley de Gauss, el flujo a través de toda la superficie del cubo es Q/ε_0. Este flujo se reparte por igual en las 24 caras mas pequeñas de arista a. Para cada una de las caras cuadradas del paralelepípedo el flujo será:



$$\Phi_c = \frac{1}{24}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Para cada una de las caras rectangulares del paralelepípedo el flujo será:

$$\Phi_r = \frac{1}{12}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

El flujo total sobre todas las caras es la suma:

$$\Phi_{total} = 2(0) + 2\left(\frac{1}{24}\frac{Q}{\varepsilon_0}\right) + 2\left(\frac{1}{12}\frac{Q}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{4}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

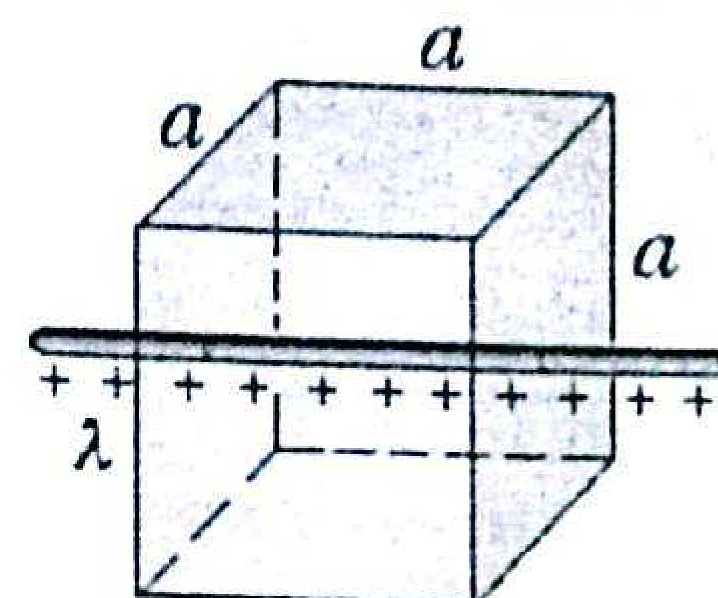
Respuesta:

$\Phi_c = \frac{1}{24}\frac{Q}{\varepsilon_0}$, $\Phi_r = \frac{1}{12}\frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Phi_{total} = \frac{1}{4}\frac{Q}{\varepsilon_0}$

PR-3.09. *Línea de carga que atraviesa un cubo*

Una línea de carga infinitamente larga, con densidad lineal λ (C/m), atraviesa un cubo de lado a, perpendicularmente a dos de sus caras y por sus centros, como se indica en la figura. ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo?



Solución: De acuerdo a la ley de Gauss, el flujo eléctrico total es igual a la carga encerrada por el cubo $(Q_{enc} = \lambda a)$ dividida por ε_0. El campo eléctrico $\vec{E}$ de la línea de carga es radial y no produce flujo en las dos caras que son perpendiculares:

$$\Phi_\perp = 0$$

Debido a la simetría el flujo total se reparte por igual entre las cuatro caras que son paralelas a la línea de carga. Por lo tanto, el flujo en cada cara paralela es:

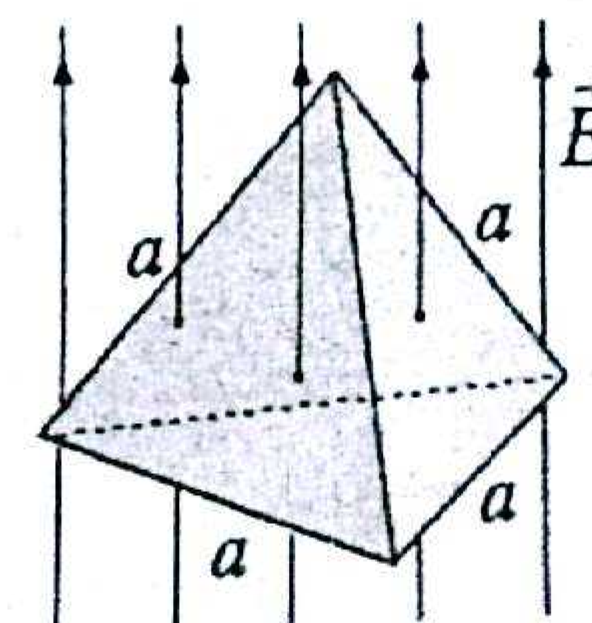
$$\Phi_{//} = \frac{1}{4}\frac{\lambda a}{\varepsilon_0}$$

Respuesta:

Caras perpendiculares: $\Phi_\perp = 0$
Caras paralelas: $\Phi_{//} = \lambda a / 4\varepsilon_0$

PR-3.10. *Campo uniforme en superficie tetraédrica*

Un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}_0$, está aplicado a un tetraedro regular cuyos caras son triángulos equiláteros de lado a. Si el campo lo atraviesa perpendicularmente por su base, determine el flujo eléctrico a través de cada uno de las tres caras superiores del tetraedro.



Solución: Como no hay carga dentro del tetraedro, el flujo total en su superficie es cero.

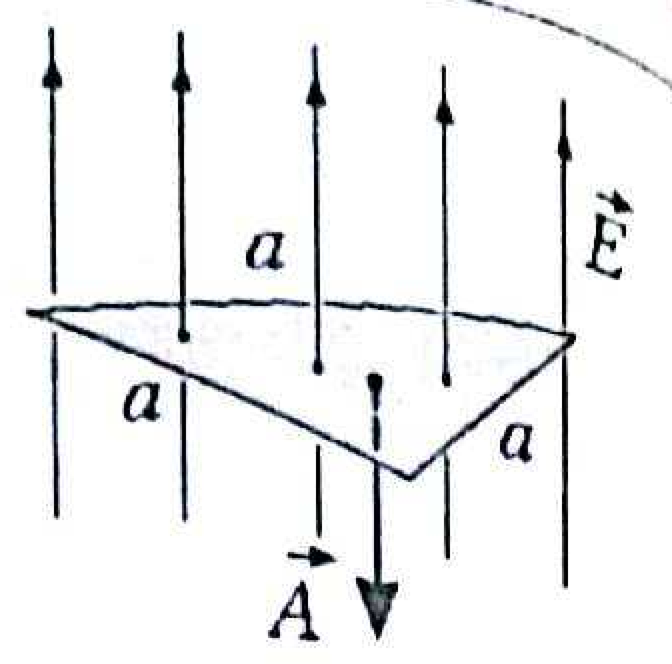
$$\Phi_{neto} = \Phi_{ent} + \Phi_{sal} = 0$$

Es decir, el mismo flujo que entra por la base triangular sale por las caras superiores y es igual a:

$$\Phi_{ent} = -\vec{E} \bullet \vec{A} = -E[\frac{1}{2}a(a\,sen60^{\circ})] = -\frac{\sqrt{3}}{4}Ea^2 = -\Phi_{sal}$$

Debido a la simetría, este flujo se reparte por igual entre éstas:

$$\Phi_{cara} = \frac{1}{3}\Phi_{sal} = \frac{\sqrt{3}}{12}Ea^2$$



Respuesta:

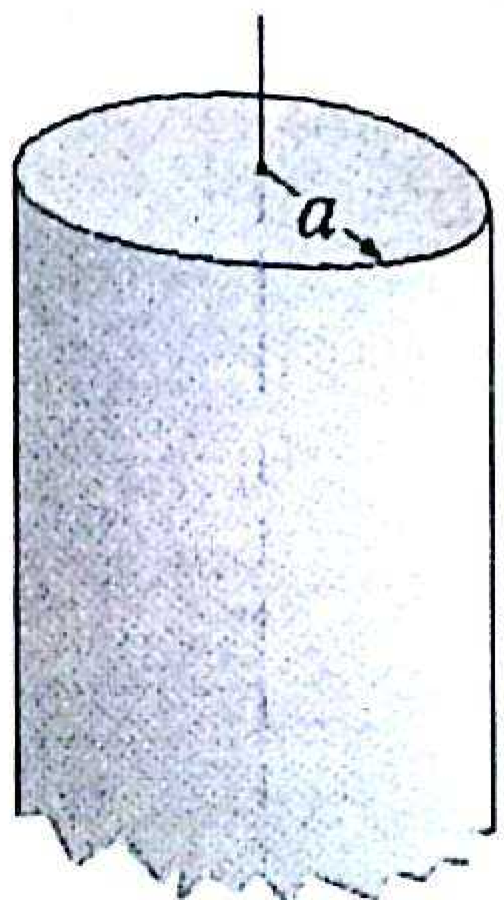
$$\Phi_{cara} = \frac{\sqrt{3}}{12}Ea^2$$

PR-3.11. *Campo de cilindro macizo y de línea de carga*

En un cilindro infinitamente largo de radio a, existe una carga volumétrica uniforme con densidad ρ (C/m^3).
a) Halle el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.
b) Demuestre que si el cilindro es muy delgado (línea de carga) el campo a una distancia radial r viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Siendo λ (C/m) la densidad lineal de carga.



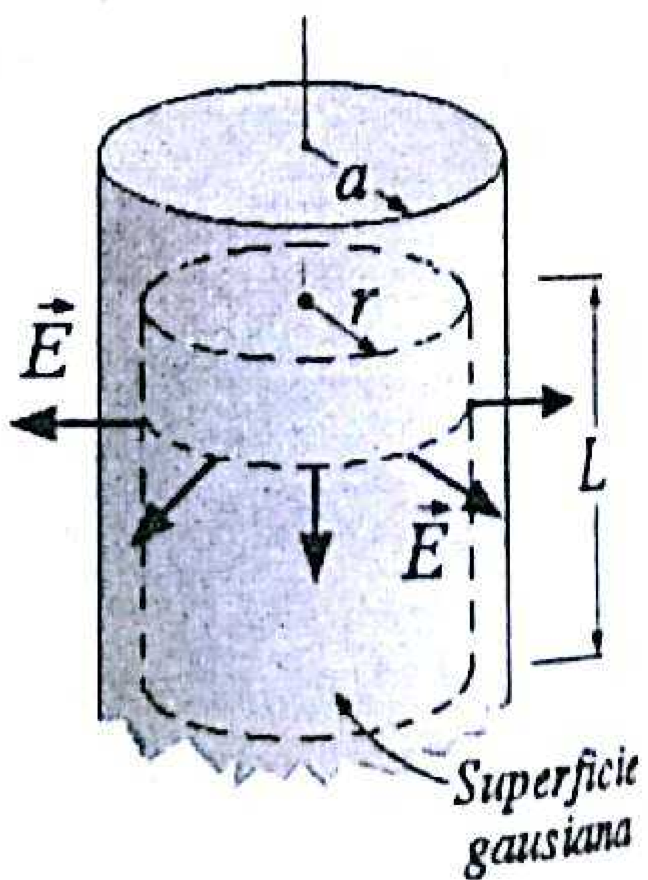
Solución: a) La simetría cilíndrica sugiere que el campo $\vec{E}$ es radial y tiene igual magnitud en todos los puntos de una circunferencia concéntrica de radio r.

Región interna ($r \leq a$): La superficie gaussiana apropiada es un cilindro de largo arbitrario L y radio $r \leq a$. Como el campo es radial el flujo eléctrico en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo total a través de la superficie es:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \int dA = E(2\pi r L)$$

La carga encerrada es: $Q = \rho(\pi r^2 L)$, y por la ley de Gauss:

$$E(2\pi r L) = \frac{\rho(\pi r^2 L)}{\varepsilon_0}$$

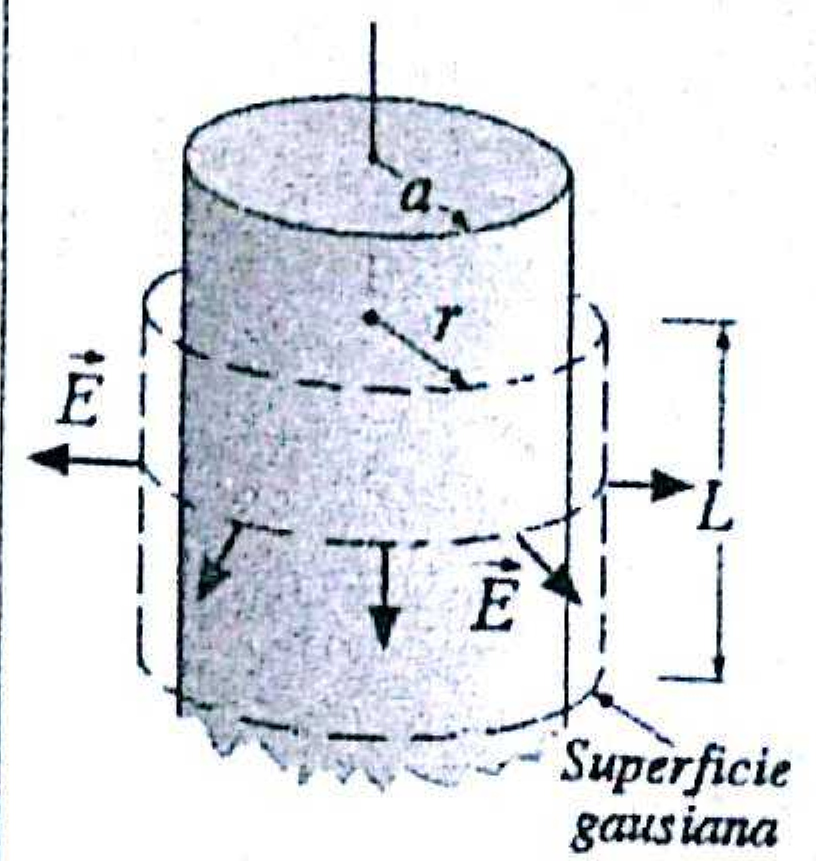


Por lo tanto, el vector campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} \qquad (r \leq a)$$

Región exterior ($r \geq a$): Tomamos un cilindro gaussiano de largo arbitrario L y radio $r \geq a$. El flujo en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo total que sale de la superficie gaussiana es: $\Phi = E(2\pi r L)$. La carga encerrada es: $Q = \rho\pi a^2 L$, y aplicando la ley de Gauss: $\Phi = Q/\varepsilon_o$, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \qquad (r \geq a)$$



b) Si consideramos que el cilindro cargado es delgado (línea de carga), entonces la cantidad ($\rho\pi a^2$) representa la carga por unidad de longitud λ (C/m). Por lo tanto, la expresión anterior puede escribirse en la forma:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Este resultado coincide con el que habíamos obtenido en el capítulo anterior, mediante cálculo directo del campo.

Respuesta:

a) Cilindro macizo:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} \qquad (r \leq a)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \qquad (r \geq a)$$

b) Línea de carga: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

PR-3.12. *Cilindro macizo con carga no homogénea*

Un cilindro aislante infinitamente largo de radio R, tiene una densidad de carga volumétrica que varía con la distancia radial como:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - \frac{r}{a}) \quad \text{C/m}^3$$

Donde ρ_0 y a son constantes positivas. Halle el campo eléctrico a las distancias radiales: a) $r < R$, b) $r > R$.

Solución: a) Región interna ($r \leq a$): Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de largo arbitrario L y radio $r < a$. Como el campo es radial, el flujo en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo eléctrico total es a través de su superficie curva:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \int dA = E(2\pi r L)$$

La carga encerrada por este cilindro de radio r es:

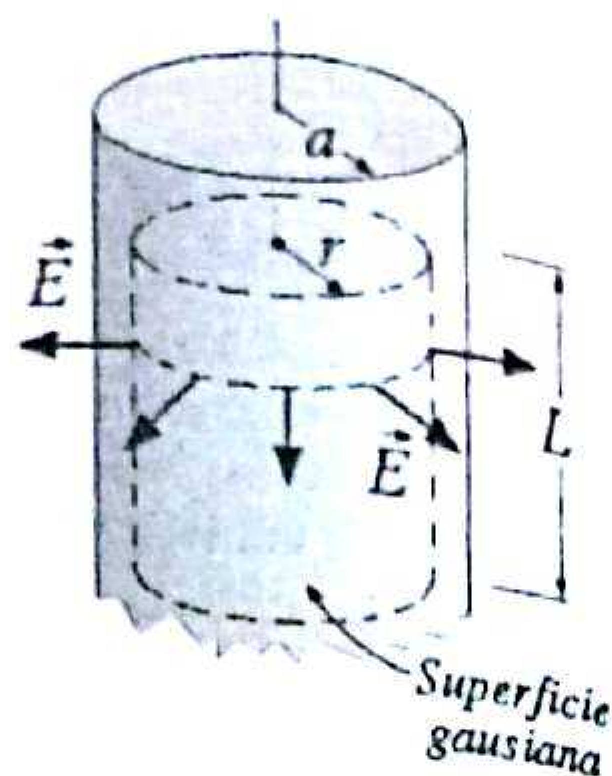
$$Q = \int_0^r \rho(r)dV = \int_0^r \rho_0(1-\frac{r}{a})2\pi rLdr$$

$$Q = 2\pi L\rho_0[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}]\Big|_0^r = 2\pi L\rho_0[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}]$$

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico:

$$E(2\pi rL) = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi L\rho_0[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}]$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}[1 - \frac{2r}{3a}] \qquad (r \le a)$$



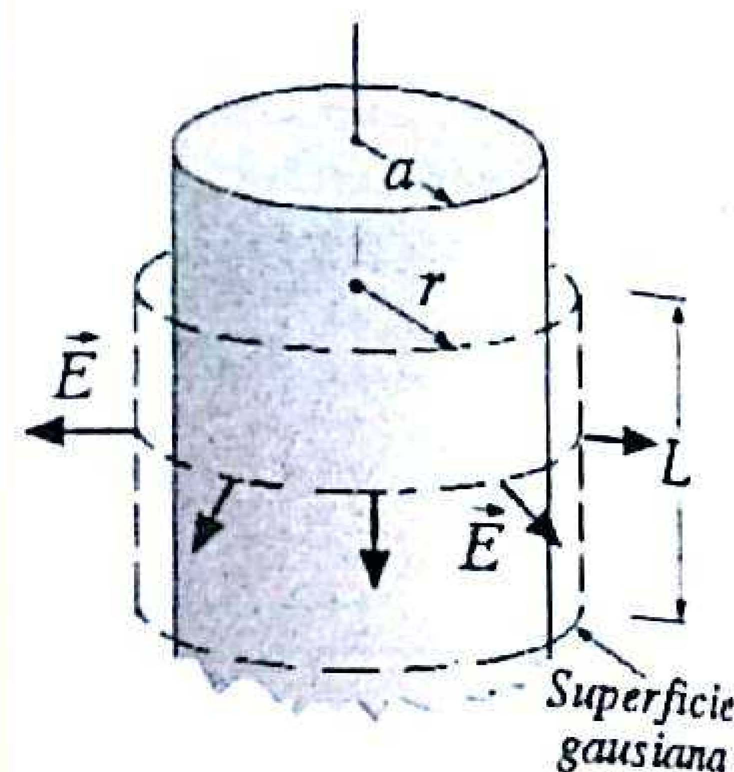
Región exterior ($r \ge a$): Tomamos un cilindro de largo L y radio $r > a$. El flujo en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo eléctrico total es el que atraviesa la superficie curva: $\Phi = E(2\pi rL)$. La carga encerrada es:

$$Q = \int_0^R \rho_0(1-\frac{r}{a})2\pi rLdr = 2\pi L\rho_0[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}]$$

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico:

$$E(2\pi rL) = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi L\rho_0[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}]$$

$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}[1 - \frac{2R}{3a}] \qquad (r \ge a)$$



Respuesta:

$$E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}[1 - \frac{2r}{3a}] \quad (r \le a)$$
$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}[1 - \frac{2R}{3a}] \quad (r \ge a)$$

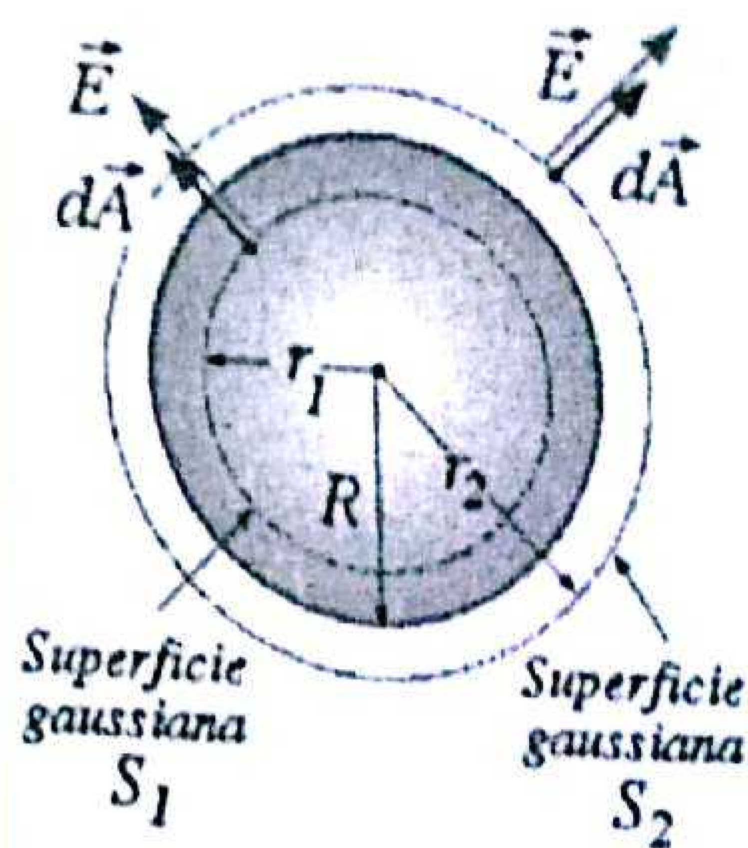
PR-3.13. *Campo de esfera maciza con carga uniforme*

Una esfera sólida de radio R, tiene una carga uniforme Q distribuida por todo el volumen. Determine el campo eléctrico: a) En la región interna, $r < R$. b) En la región externa, $r > R$.

Solución: a) La simetría esférica sugiere que el campo $\vec{E}$ es radial y tiene igual magnitud en todos los puntos de cualquier esfera concéntrica.

Región interna ($r \le R$): La superficie gaussiana apropiada es una esfera concéntrica S_1 de radio $r < R$. Como el campo es radial, el flujo:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \int dA = E(4\pi r^2)$$

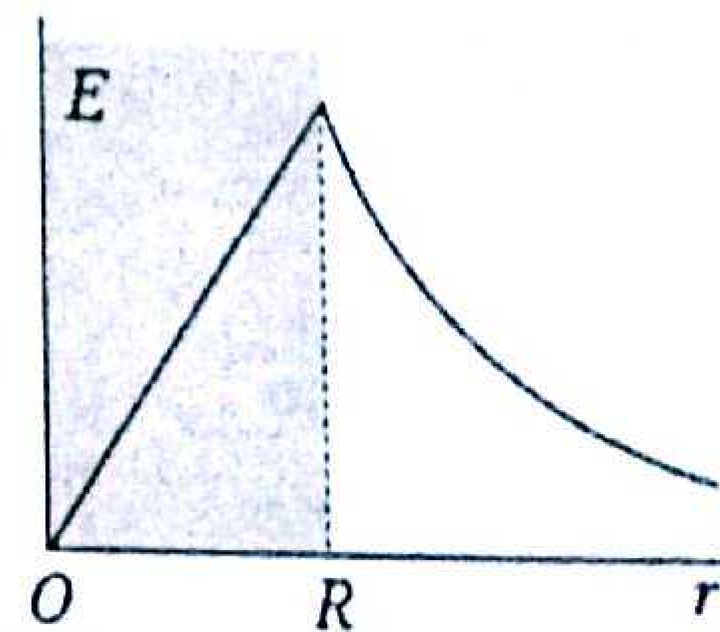


La carga encerrada por esta superficie esférica es proporcional al volumen de la esfera, $4\pi r^3/3$. Esto significa que la fracción de la carga total dentro de este volumen es: $Q' = Q(r^3/R^3)$. Aplicando la ley de Gauss:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q(r^3/R^3)}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico dentro de la esfera resulta proporcional a la distancia radial:

$$\vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} \qquad (r < R)$$



Región externa ($r \ge R$): Tomamos una esfera gaussiana S_2 de radio $r > R$, para la cual el flujo eléctrico es: $\Phi = E(4\pi r^2)$ y toda la carga Q de la esfera sólida está encerrada.

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \qquad (r > R)$$

Respuesta:

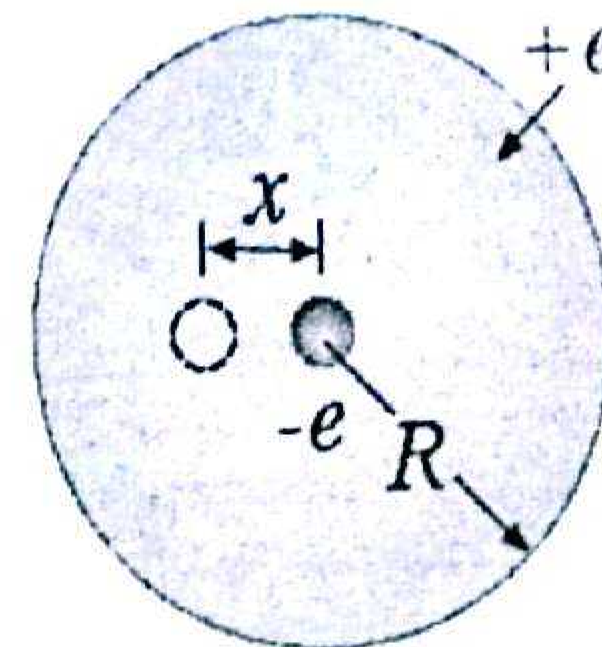
$$\vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} \qquad (r \le R)$$
$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \qquad (r \ge R)$$

PR-3.14. *Modelo Thomson del átomo de hidrógeno*

En uno de los primeros modelos clásicos para el átomo de hidrógeno, J. J. Thomson proponía que este átomo estaría constituido por una esfera de radio R con carga positiva uniforme $+e$ y un electrón de carga $-e$ en su centro.

a) Demuestre que si el electrón se desplazara una corta distancia x del centro y se liberara, su movimiento sería armónico simple y, calcule la frecuencia de oscilación.

b) Calcule el valor numérico del radio R para que se produzca la frecuencia $f = 2{,}47\text{x}10^{-15}$ Hz de la línea mas intensa que se observa en el espectro del hidrógeno.



Solución: Según el problema anterior, el campo eléctrico de la esfera con carga uniforme positiva $Q = +e$, a distancia x de su centro apunta hacia fuera, de modo que la fuerza eléctrica sobre el electrón es atractiva:

$$E = \frac{kex}{R^3} \quad \Rightarrow \quad F = -eE = -\frac{ke^2}{R^3}x$$

Aplicando la segunda ley de Newton, $F = m\ddot{x}$:

$$-\frac{ke^2}{R^3}x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Esta es la ecuación para un oscilador armónico simple con una frecuencia angular:

$$\omega^2 = \frac{ke^2}{mR^3}$$

La frecuencia de oscilación del electrón es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}}$$

b) Despejando en esta expresión el radio de la esfera:

$$R = (\frac{ke^2}{4\pi^2 mf^2})^{1/3}$$

$$R = [\frac{(9x10^9)(1{,}6x10^{-19})^2}{4\pi^2(9{,}11x10^{-31})(2{,}47x10^{-15})^2}]^{1/3} = 1{,}02x10^{-10}\text{m}$$

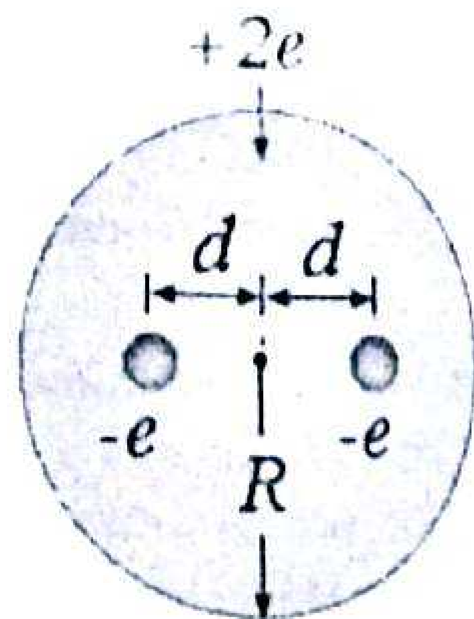
Respuesta:

a) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}}$

b) $R = 1{,}02x10^{-10}\text{m}$

PR-3.15. *Modelo Thomson del átomo de helio*

En el modelo de Thomson para el átomo de helio, dos electrones en reposo están incrustados dentro de una esfera uniforme de carga positiva $2e$. Halle la distancia $2d$ entre los dos electrones de modo que la configuración esté en equilibrio estático.

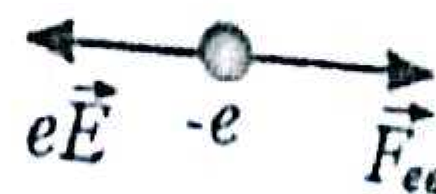


Solución: Si los electrones están en equilibrio, la fuerza neta sobre cada uno de ellos es cero. El campo eléctrico en el interior de la esfera de carga distribuida positiva $Q = +2e$, a una distancia de su centro es:

$$E = \frac{k(2e)d}{R^3}$$

La fuerza ejercida por la carga positiva distribuida es atractiva:

$$F = -eE = \frac{2ke^2 d}{R^3}$$



Esta fuerza debe ser igual y opuesta a la fuerza coulombiana repulsiva del otro electrón, $F_{ee} - eE = 0$, entonces:

$$\frac{ke^2}{(2d)^2} = \frac{2ke^2 d}{R^3}, \qquad R^3 = 8d^3 \quad \Rightarrow \quad 2d = R$$

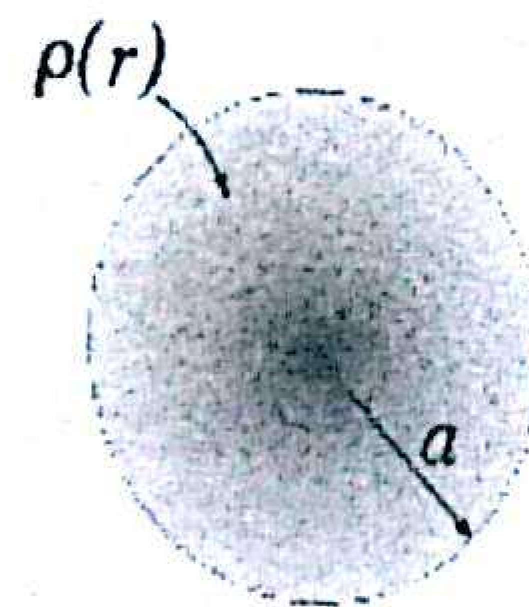
Respuesta:

$2d = R$

PR-3.16. *Modelo de cargas en un núcleo atómico*

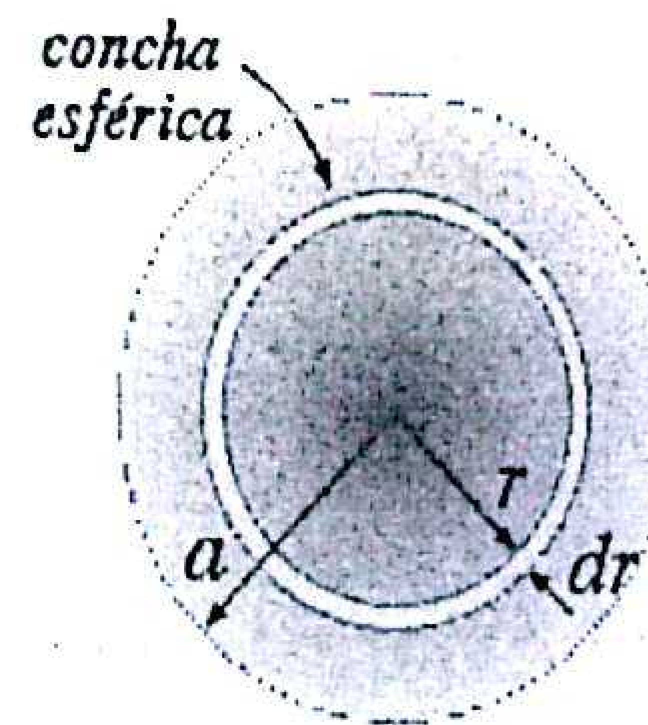
En un modelo propuesto para un núcleo atómico ligero, la carga está distribuida en una especie de nube esférica de radio a, con una densidad volumétrica que depende de la distancia r al origen:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - \frac{r^2}{a^2}) \qquad \text{para } r \leq a$$



a) Calcule la carga total del núcleo.
b) Determine el campo eléctrico dentro y fuera de la nube.
c) ¿A qué distancia radial, tiene E el máximo valor?

Solución: a) Para hallar la carga total, escogemos una concha esférica de radio r y espesor dr como diferencial de carga, dQ. El área de la concha es $4\pi r^2$ y su volumen $dV = 4\pi r^2 dr$. La carga total se obtiene sumando todas las cargas de las conchas con radios desde 0 hasta a:



$$Q = \int \rho(r)dV = \int_0^a \rho_0(1 - \frac{r^2}{a^2})4\pi r^2 dr$$

$$Q = 4\pi\rho_0(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2})\Big|_0^a = \frac{8}{15}\pi a^3 \rho_0$$

b) Región $r < a$: Para hallar el campo en la región dentro de la nube, consideremos una superficie esférica imaginaria interna S_1. La carga encerrada es:

$$Q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_0 (1 - \frac{r^2}{a^2}) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 (\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2})$$

El campo $\vec{E}$ es radial y de módulo constante en esta superficie esférica. El flujo que la atraviesa es: $E(4\pi r^2)$ y aplicando la ley de Gauss: $E(4\pi r^2) = Q/\varepsilon_0$, se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2})\hat{r} \qquad (r < a)$$

Región: $r > a$. Para hallar el campo eléctrico, escogemos una esfera gaussiana exterior (superficie S_2). Esta superficie encierra toda la carga del núcleo ($8\pi a^3\rho_0/15$). El campo es radial y de magnitud constante sobre la superficie esférica. Aplicando de nuevo la ley de Gauss, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{2}{15}\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (r > a)$$

c) Observe la continuidad de E en la frontera $r = a$, es decir, las dos soluciones dentro y fuera coinciden. Además, la solución para $r > a$ es una función decreciente con la distancia r.

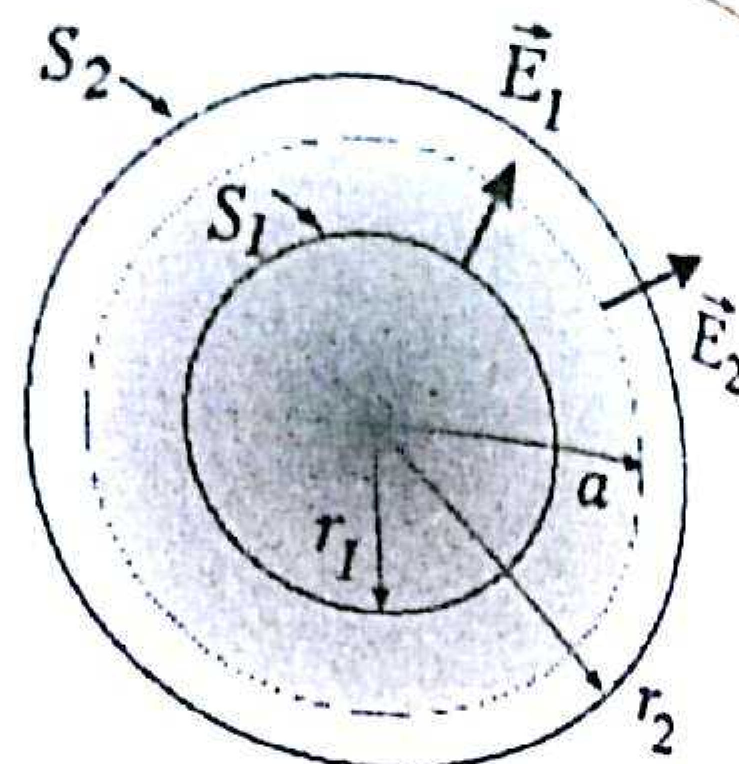
A fin de determinar si la solución presenta un valor máximo para $r < a$, impondremos la condición de que la derivada de E respecto a r sea nula:

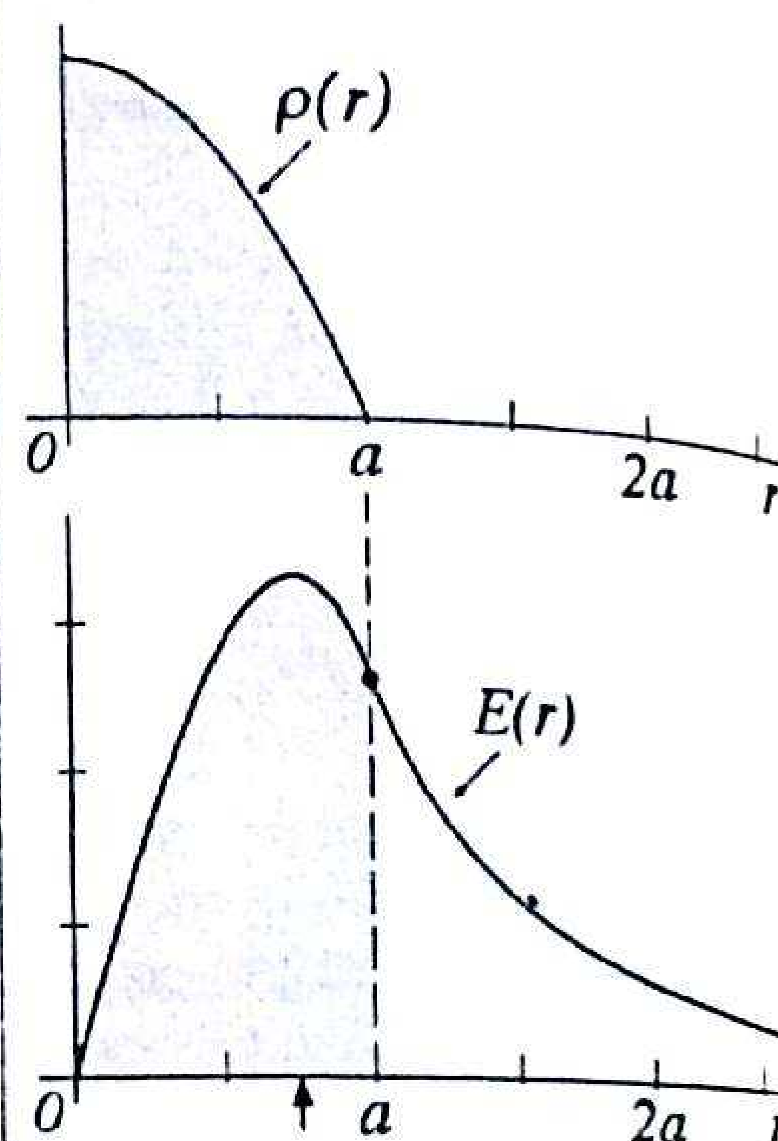
$$\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}[\frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2})] = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(\frac{1}{3} - \frac{3r^2}{5a^2})$$

La expresión entre paréntesis se anula para:

$$\frac{1}{3} - \frac{3r^2}{5a^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{5}}{3}a = 0{,}745a$$

Esta es la distancia radial dentro del núcleo para la cual la magnitud del campo eléctrico presenta su máximo valor, según se observa en el gráfico de E vs. r.





Respuesta:

a) $Q = \frac{8}{15}\pi a^3 \rho_0$

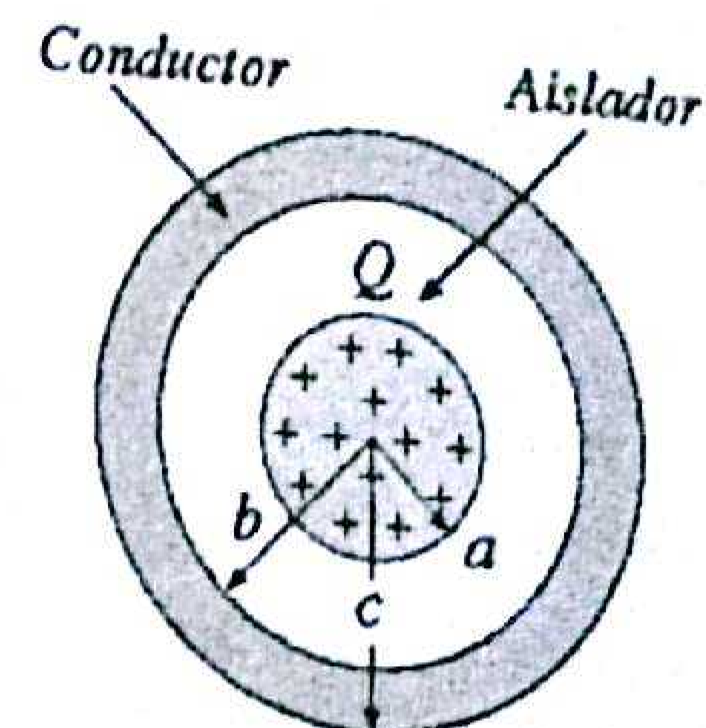
b) $\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2})\hat{r} \quad (r \le a)$

$\vec{E} = \frac{2}{15}\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (r \ge a)$

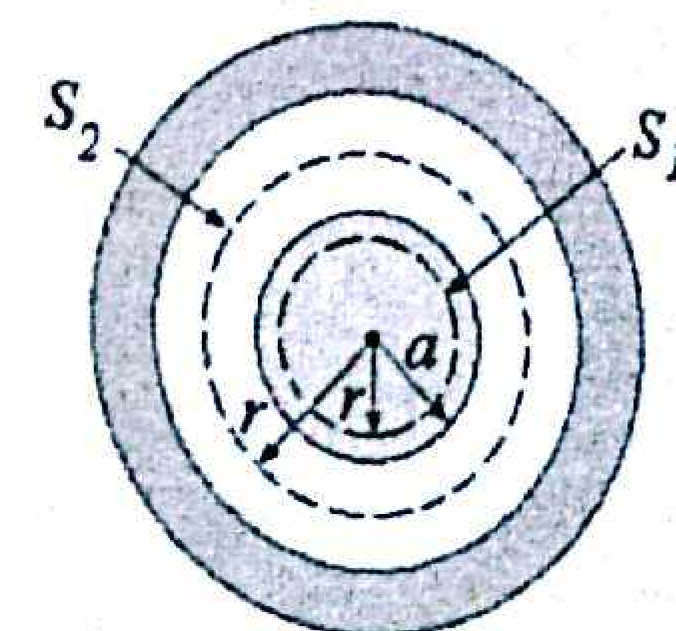
c) $r = \frac{\sqrt{5}}{3}a = 0{,}745a$

PR-3.17. Esfera aisladora dentro de esfera conductora

Una esfera no conductora sólida de radio a y carga uniforme $+Q$ está situada en el centro de una esfera conductora hueca descargada, de radio interior b y radio exterior c. Halle el campo $E(r)$ en las regiones siguientes:
a) Dentro de la esfera no conductora ($r < a$).
b) Entre la esfera aisladora y la conductora ($a < r < b$).
c) Dentro de la esfera conductora ($b < r < c$).
d) Fuera de las esferas ($r > c$).
e) ¿Cuáles son las densidades de cargas inducidas en las superficies interna y externa de la esfera conductora?



Solución: La distribución de cargas tiene simetría esférica y conviene escoger como superficies gaussianas, esferas concéntricas de radio r que pasen por el punto donde se desea hallar el campo. En cada una de estas superficies el campo será radial y debe tener magnitud constante, de modo que el flujo es: $\Phi = E(4\pi r^2)$.



a) Para $r < a$: La carga encerrada por la superficie S_1 es $Q(r/a)^3$. Aplicando la ley de Gauss, se obtiene el campo:

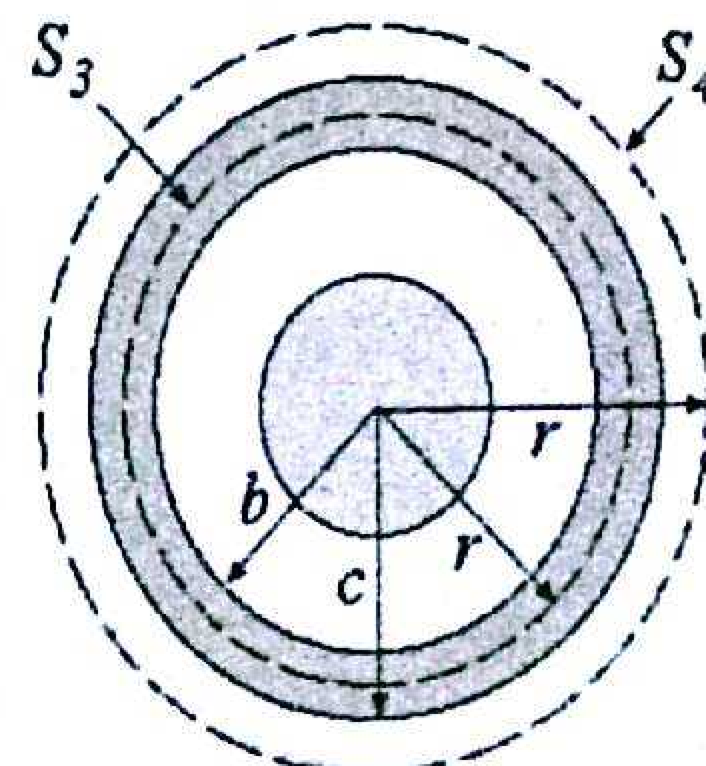
$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{a^3} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r} = \frac{kQr}{a^3}\hat{r}$$

b) Para $a < r < b$: La carga encerrada por la superficie S_2 es $+Q$. Aplicando la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

c) Para $b < r < c$: Como la esfera hueca es un conductor en equilibrio, el campo eléctrico en todos los puntos de S_3 es nulo.

$$\vec{E} = 0$$



d) Para $r > c$: La carga encerrada por la superficie S_4 es la de la esfera no conductora, es decir, Q. Aplicando Gauss:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

e) Consideremos una superficie S_3 que queda dentro del cuerpo de la esfera conductora. Como se trata de un conductor en equilibrio, $\vec{E} = 0$, el flujo será nulo y la carga neta encerrada también es cero. La superficie interna del cascarón debe tener una carga Q_i tal que:

$$Q + Q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = -Q$$

Esta carga está repartida uniformemente en la superficie interna con una densidad: $\sigma_i = -Q/4\pi b^2$.

Como la esfera conductora es neutra, la carga inducida sobre la superficie externa será tal que: $Q_e + Q_i = 0$. Por lo tanto, $Q_e = -Q_i = Q$ y la densidad es: $\sigma_e = +Q/4\pi c^2$.

Respuesta:

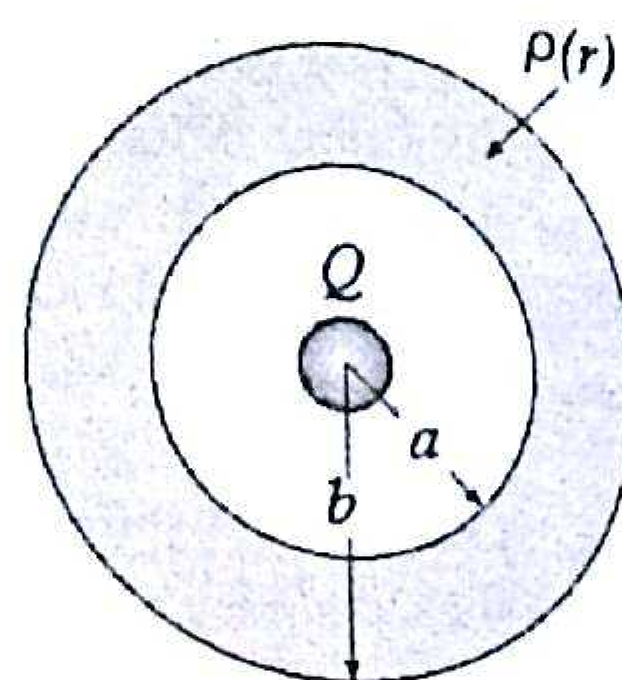
a) $\vec{E} = \dfrac{kQr}{a^3}\hat{r}$	$r < a$
b) $\vec{E} = \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}$	$a < r < b$
c) $\vec{E} = 0$	$b < r < c$
d) $\vec{E} = \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}$	$r > c$
e) $\sigma_i = -Q/4\pi b^2$, $\sigma_e = +Q/4\pi c^2$	

PR-3.18. *Campo constante dentro de esfera cargada*

La región esférica $a < r < b$ contiene una carga por unidad de volumen:

$$\rho = A/r \qquad (\text{C/m}^3)$$

Donde A es una constante. En el centro de la cavidad se encuentra una carga puntual $+Q$. ¿Cuál debe ser el valor de A para que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga una magnitud constante?



Solución: Para hallar el campo a una cierta distancia del centro en términos de A, escogemos una esfera gaussiana de radio r_o concéntrica con la carga. La carga de la esfera hueca encerrada, es la suma de las cargas de las sucesivas conchas esféricas de espesor dr y radios comprendidos en $(a < r < r_o)$:

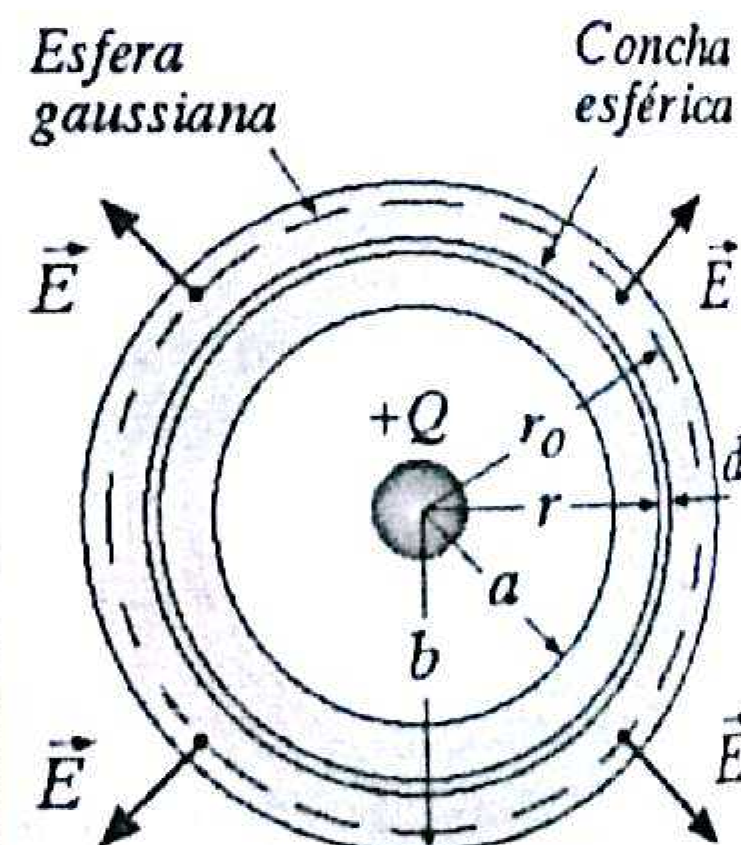
$$Q_0 = \int \rho dV = \int_0^{r_o} \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_a^{r_o} r dr$$

Integrando, se obtiene:

$$Q_0 = 2\pi A(r_0^2 - a^2)$$

La carga *total* encerrada dentro de la superficie gaussiana es:

$$Q_{enc} = Q + Q_0 = Q + 2\pi A(r_0^2 - a^2)$$



Como el campo eléctrico es radial, el flujo a través de la superficie esférica es: $\Phi = 4\pi r_0^2 E$ y aplicando Gauss:

$$4\pi r_0^2 E = \frac{Q + 2\pi A(r_0^2 - a^2)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r_0^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r_0^2}\right] \qquad \text{(i)}$$

Para que el módulo de $\vec{E}$ sea constante (independiente de r_0), se deben cancelar el primer y el tercer término en el corchete, y así encontramos la constante A:

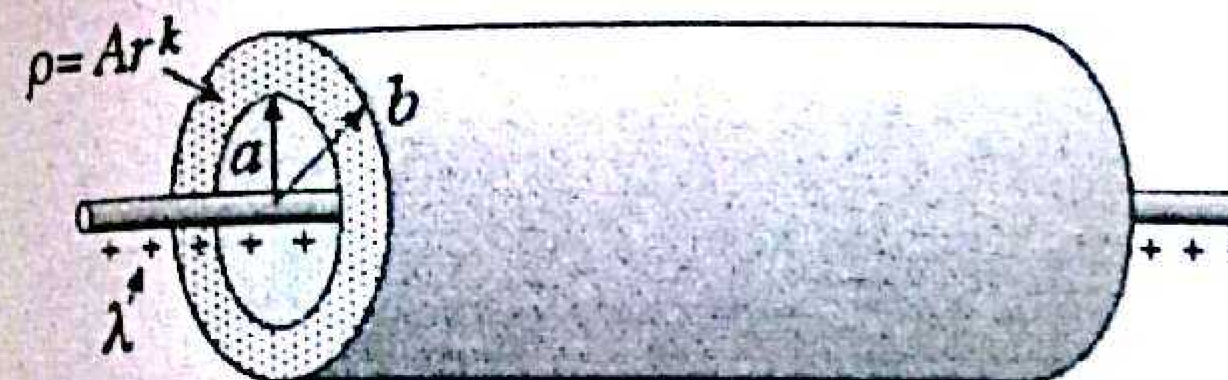
$$\frac{Q}{r_0^2} = \frac{2\pi A a^2}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Respuesta:

$$A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

PR-3.19. *Línea de carga dentro de un cilindro hueco*

Un hilo recto e infinito con una densidad lineal de carga constante, λ, se encuentra en el eje de un cilindro macizo de radio interior a y radio exterior b.



El cilindro tiene una densidad de carga volumétrica:

$$\rho(r) = Ar^k$$

a) Determine las constantes A y k para que en la región donde existe la carga volumétrica, el campo eléctrico tenga módulo constante.

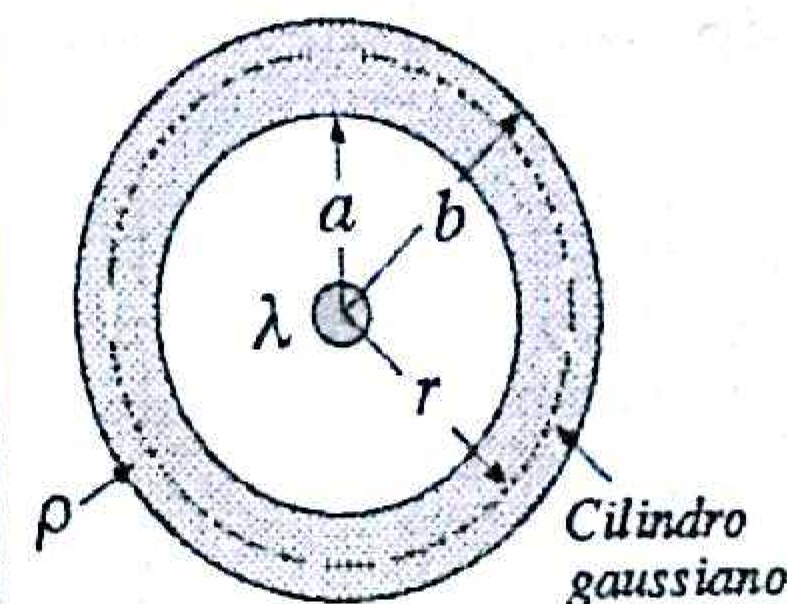
b) Determine el campo eléctrico en todas las regiones:

$0 < r < a$, $\quad a < r < b$, $\quad r > b$

Solución: a) En la región $a < r < b$, tomamos como superficie gaussiana un cilindro de largo arbitrario L y radio r. Como el campo es radial, el flujo en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo eléctrico total es a través de su superficie curva: $\Phi = E(2\pi rL)$. Para obtener la expresión del campo eléctrico, aplicamos la ley de Gauss:

$$E(2\pi rL) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\lambda L + \int_a^r Ar^k 2\pi rL dr\right]$$

$$E(2\pi rL) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\lambda L + 2\pi LA\frac{r^{k+2}}{k+2}\Big|_a^r\right.$$



$$E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{A}{\varepsilon_0(k+2)}[\,r^{k+1}-\frac{a^{k+2}}{r}\,]$$

El campo eléctrico no dependerá de la distancia radial r si k =-1 y también se cancelan los términos en $1/r$, es decir:

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}-\frac{Aa^{k+2}}{\varepsilon_0(k+2)}=0 \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{(k+2)\lambda}{2\pi a^{k+2}}=\frac{\lambda}{2\pi a}$$

b) Con estas constantes se obtiene el campo eléctrico en la región del cilindro, $a < r < b$:

$$\vec{E}=\frac{Ar^{k+1}}{\varepsilon_0(k+2)}\hat{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{r}$$

Para la región de la cavidad, $0 < r < a$, aplicamos la ley de Gauss a un cilindro imaginario de radio r y longitud L:

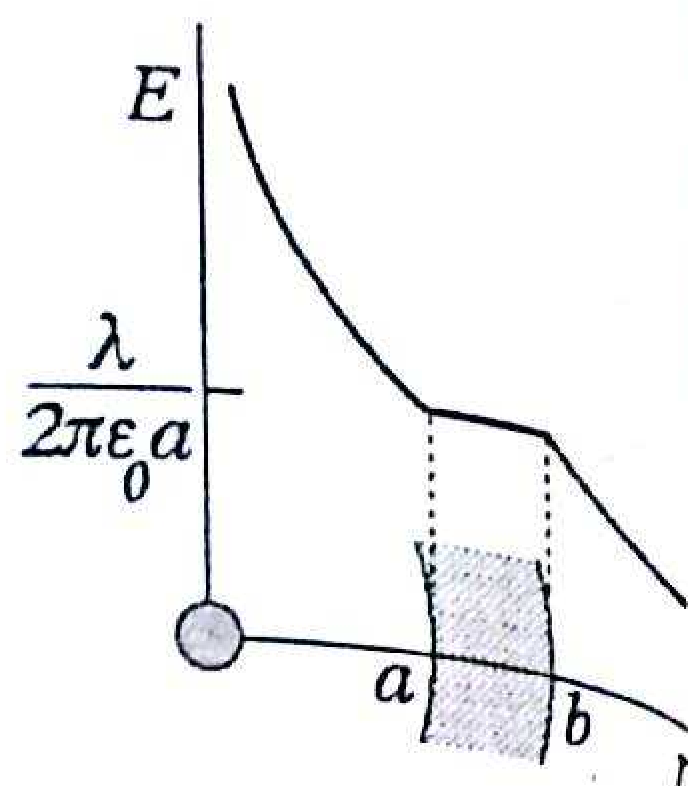
$$E(2\pi rL)=\frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Por último, para la región exterior, $r > b$, se obtiene:

$$E(2\pi rL)=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}[\,\lambda L+\int_a^b\frac{A}{r}2\pi rLdr\,]$$

$$E(2\pi rL)=\frac{L}{\varepsilon_0}[\,\lambda+2\pi A(b-a)\,]=\frac{L}{\varepsilon_0}[\,\lambda+\frac{\lambda}{a}(b-a)\,]$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda b}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{r}\hat{r}$$



Respuesta

a) $k=-1,\ A=\frac{\lambda}{2\pi a}$

b) $0 < r < a$: $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$;

$a < r < b$: $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$;

$r > b$: $\vec{E}=\frac{\lambda b}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{r}$;

PR 3.20. *¿Cuál será esta distribución de carga?*

Determine una distribución volumétrica de cargas, $\rho(r)$, que debería haber en una esfera sólida de radio R, para que el campo eléctrico en su interior sea radial y tenga el valor constante E_o. ¿Cuál es la carga total de la esfera?

Solución: a) Consideremos una esfera de radio $r < R$. Como el campo eléctrico es radial y de magnitud constante, el flujo es: $\Phi=4\pi r^2E_0$.

La carga encerrada es la suma de las cargas de cascarones esféricos de radio r' y espesor dr'. Aplicando la ley de Gauss $\Phi=Q_{enc}/\varepsilon_0$, podemos escribir:

$$4\pi r^2E_0=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho(r')4\pi r'^2\,dr'$$

De acuerdo al teorema fundamental del cálculo integral,

$$\text{Si: } g(x)=\int_0^x f(t)dt \qquad \text{entonces:} \qquad \frac{dg}{dx}=f(x)$$

Aplicándolo a la expresión anterior, se obtiene la densidad de carga:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)4\pi r^2=\frac{d}{dr}(4\pi r^2E_0)=8\pi E_0 r$$

$$\rho(r)=\frac{2\varepsilon_0E_0}{r}$$

Note que esta función es *divergente* para $r\to 0$.

b) La carga total de la esfera es:

$$Q=\int_0^R\rho(r)4\pi r^2dr=\int_0^R\frac{2\varepsilon_0E_0}{r}4\pi r^2dr$$

$$Q=8\pi\varepsilon_0E_0\frac{r^2}{2}\Big|_0^R=4\pi\varepsilon_0E_0R^2$$

Respuesta:

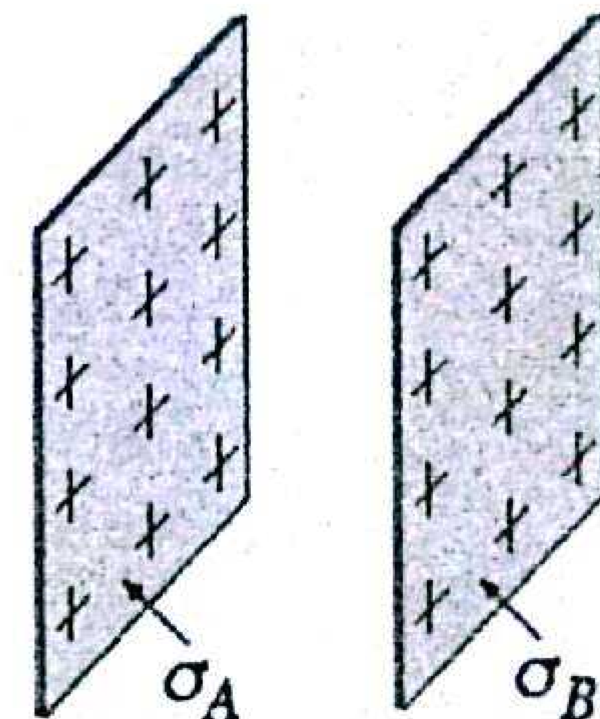
a) $\rho(r)=\frac{2\varepsilon_0E_0}{r}$

b) $Q=4\pi\varepsilon_0E_0R^2$

PR-3.21. *Dos hojas paralelas con carga uniforme.*

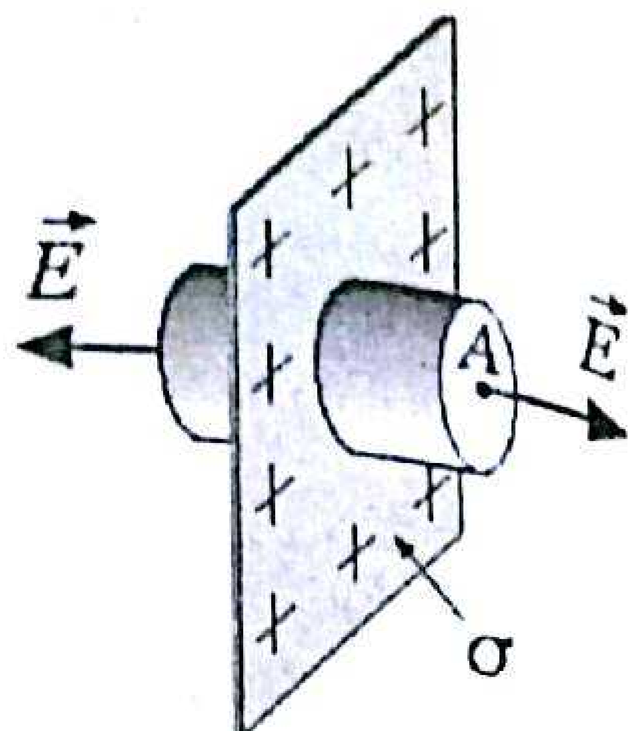
Dos láminas infinitas no conductoras, con carga uniforme están enfrentadas paralelamente. La de la izquierda tiene una densidad de carga superficial, σ_A, y la de la derecha tiene una densidad de carga, σ_B. Halle el campo eléctrico en todas las regiones, para las siguientes configuraciones:

a) $\sigma_A=+\sigma_o$ y $\sigma_B=-\sigma_o$
b) $\sigma_A=+\sigma_o$ y $\sigma_B=+\sigma_o$
c) $\sigma_A=+3\sigma_o$ y $\sigma_B=-2\sigma_o$



Solución: El campo debido a un plano infinito no conductor se obtiene eligiendo un cilindro como superficie gaussiana. No hay flujo a través de la parte curva y el flujo a través de cada tapa plana es EA. La carga total encerrada por la superficie es σA, y empleando la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico a cualquier distancia a cada lado del plano:

$$\Phi = 2EA = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



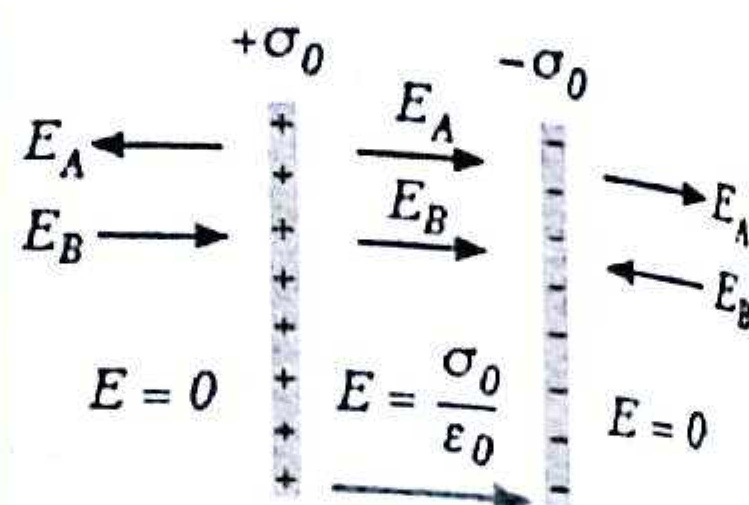
El campo resultante en cualquier región se obtiene por la superposición de los campos generados por cada lámina.

a) Densidades de carga: $\sigma_A = +\sigma_o$ y $\sigma_B = -\sigma_o$, si sumamos los campos se obtiene,

Izquierda: $\bar{E}_{iz} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = 0$

Centro: $\bar{E}_{cen} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{x}$

Derecha: $\bar{E}_{der} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = 0$

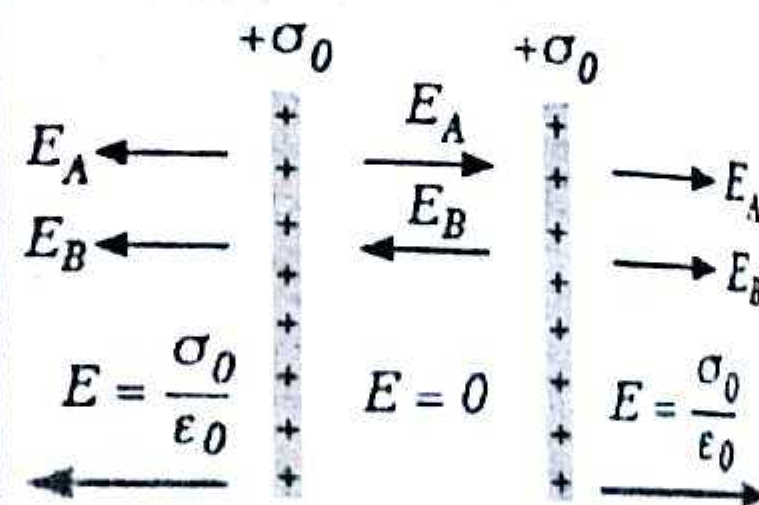


b) Densidades de carga: $\sigma_A = +\sigma_o$ y $\sigma_B = +\sigma_o$, si sumamos los campos se obtiene:

Izquierda: $\bar{E}_{iz} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{x}$

Centro: $\bar{E}_{cen} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = 0$

Derecha: $\bar{E}_{der} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = +\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{x}$

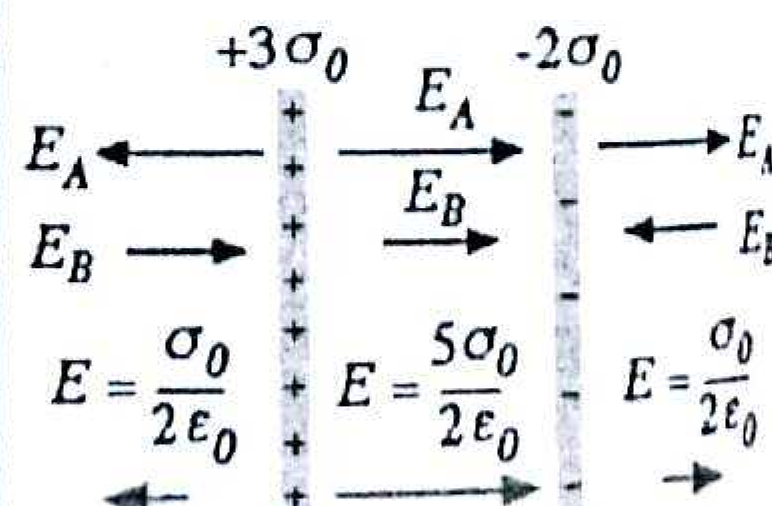


c) Densidades de carga: $\sigma_A = +3\sigma_o$ y $\sigma_B = -2\sigma_o$, si sumamos los campos, se obtiene:

Izquierda: $\bar{E}_{iz} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = -3\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} + 2\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

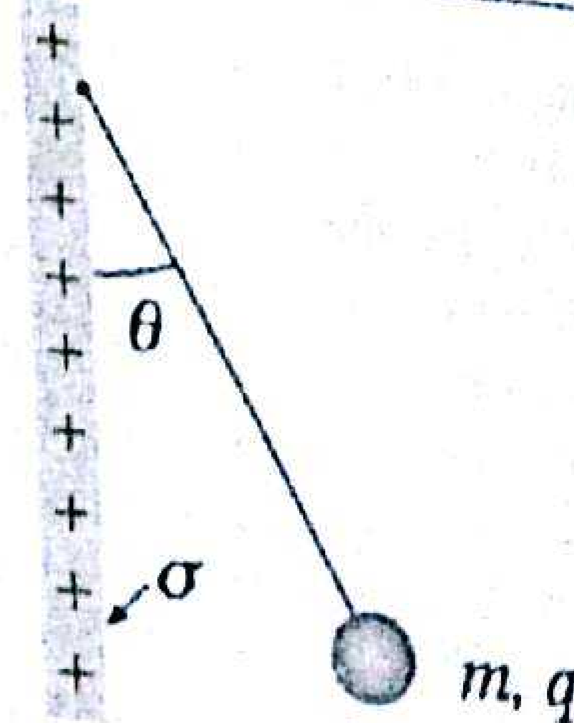
Centro: $\bar{E}_{cen} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +3\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} + 2\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = +\frac{5}{2}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

Derecha: $\bar{E}_{der} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = +3\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} - 2\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x} = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{x}$



PR-3.22. *Esferita suspendida enfrente de hoja de carga*

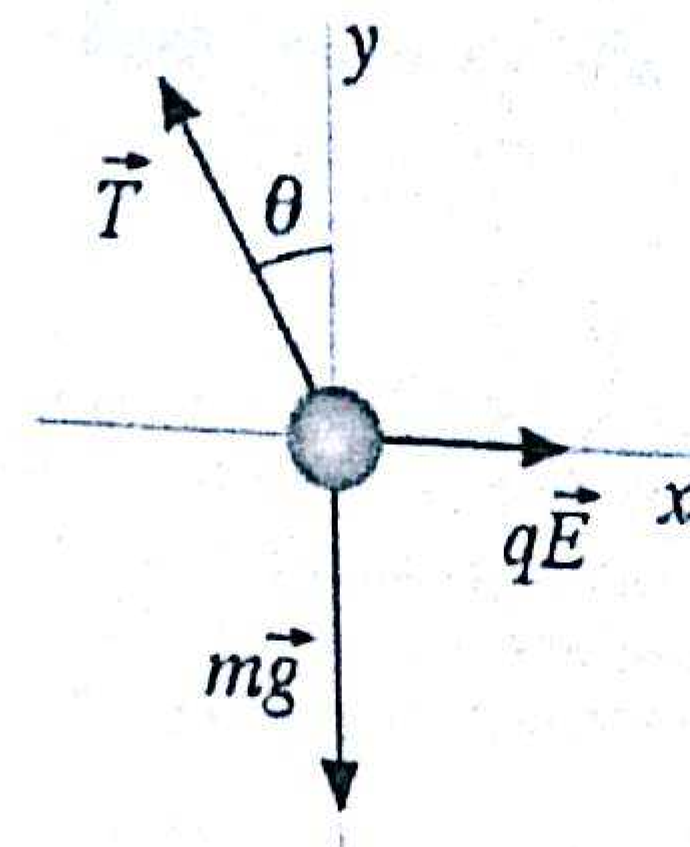
Una esferita no conductora de masa $m = 0{,}002$ g tiene una carga uniforme $q = 3\times10^{-8}$ C, y está suspendida por un hilo aislante que forma un ángulo $\theta = 36{,}9°$ con una hoja no conductora y muy grande uniformemente cargada. Calcule la densidad superficial de carga, σ, de la hoja.



Solución: Las fuerzas que actúan sobre la esferita son: el peso $m\vec{g}$, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, y la fuerza de repulsión eléctrica de la hoja que es perpendicular a ésta, $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Como la esferita está en equilibrio, la fuerza neta en cada dirección es cero:

$$\sum F_x = F_e - T sen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad qE = T sen\theta$$

$$\sum F_y = T cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = T cos\theta$$



Eliminando la tensión de este par de ecuaciones, y tomando en cuenta que el campo de la hoja de carga es: $E = \sigma / 2\varepsilon_0$, encontramos:

$$\frac{T sen\theta}{T cos\theta} = tg\theta = \frac{qE}{mg} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2mg\varepsilon_0 tg\theta}{q}$$

$$\sigma = \frac{2(2\times10^{-6})(9{,}8)(8{,}85\times10^{-12})tg36{,}9°}{3\times10^{-8}} = 8{,}68\times10^{-9}\,\text{C/m}^2$$

Respuesta

$$\sigma = \frac{2mg\varepsilon_0 tg\theta}{q} = 8{,}68\times10^{-9}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

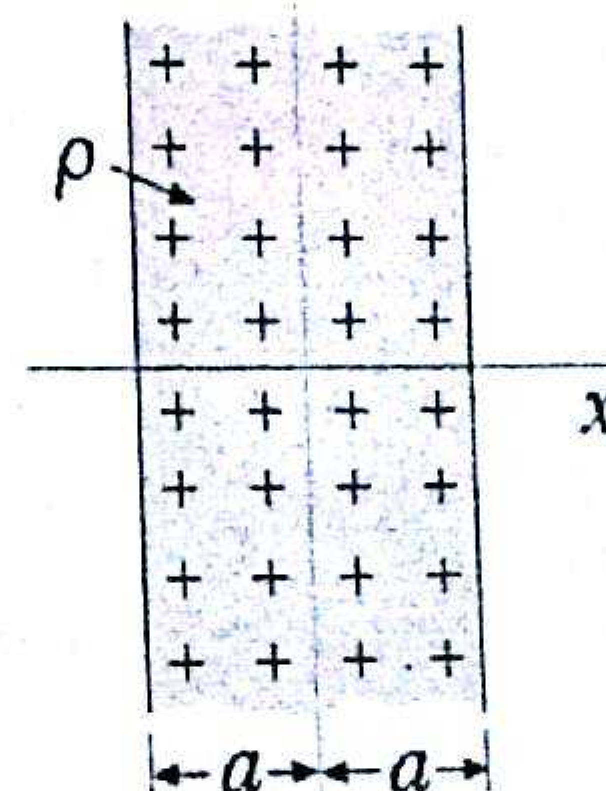
PR-3.23. *Lámina no-conductora con carga uniforme.*

Sea una lámina plana e infinita de espesor $2a$, no-conductora, con una carga uniforme con densidad volumétrica ρ(C/m³). Halle el campo eléctrico en términos de la distancia x, medida desde el plano medio de la lámina:

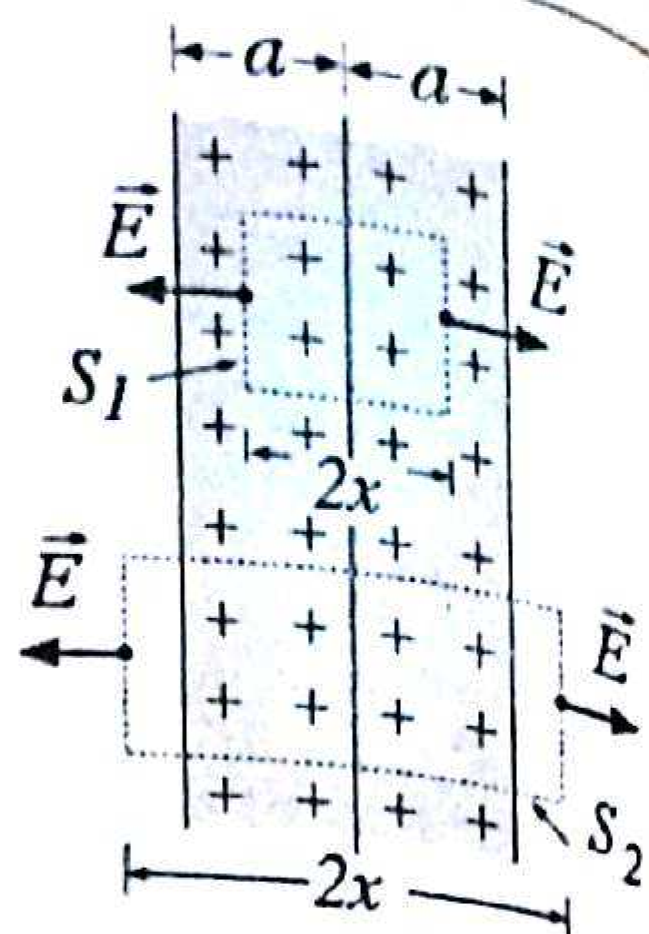
a) Dentro de la lámina.

b) Fuera de la lámina.

c) Grafique el módulo de E en función de x.



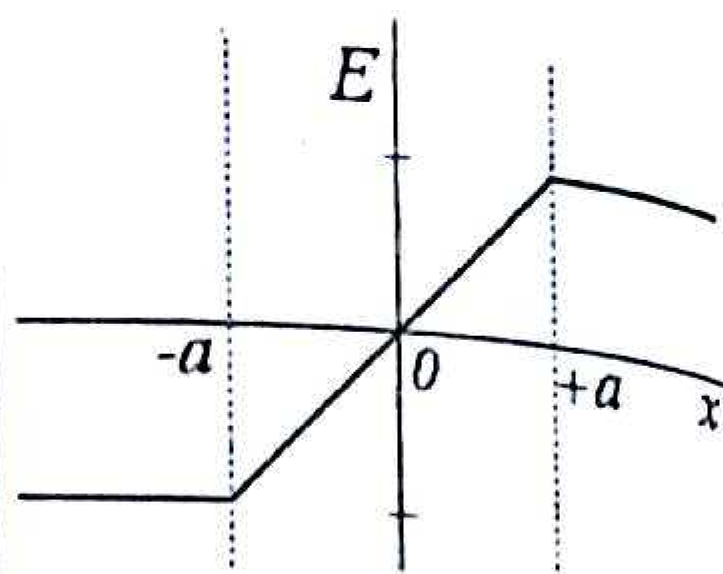
Solución: a) Para $(x < a)$ se escoge una superficie gaussiana, S_1, en forma de una cajita cilíndrica de largo $2x$, tapas planas con área A y centrada en la lámina. El campo es uniforme y normal a las caras planas de la cajita y tiene igual magnitud sobre ellas. Si ρ es positivo $\vec{E}$ apunta hacia afuera y el flujo en cada cara es EA. Sobre las caras curvas, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie y el flujo es cero. El flujo total a través de la cajita gaussiana es: $\Phi = 2EA$. El volumen encerrado es $2xA$ y la carga que contiene es $(2xA)\rho$. Aplicando la ley de Gauss:



$$\varepsilon_o(2EA) = 2xA\rho$$

Por lo tanto, el campo eléctrico dentro de la lámina es:

$$\vec{E} = \pm(\frac{\rho x}{\varepsilon_0})\hat{x} \qquad |x| \le a$$



b) Para hallar el campo afuera $(x > a)$ se escoge una superficie gaussiana mas grande S_2, en forma de cajita cilíndrica de tapas planas con área A y largo $2x$. El flujo total sobre la superficie de la cajita es: $\Phi = 2EA$ y la carga encerrada es: $Q = (2aA)\rho$. Aplicando la ley de Gauss:

$$\varepsilon_o(2EA) = 2aA\rho$$

Por lo tanto, el campo eléctrico afuera de la placa es:

$$\vec{E} = \pm(\frac{\rho a}{\varepsilon_0})\hat{x} \qquad |x| \ge a$$

c) Dentro de la lámina el campo crece linealmente, mientras que afuera el campo es uniforme. Los resultados están representados en la gráfica de E vs. x.

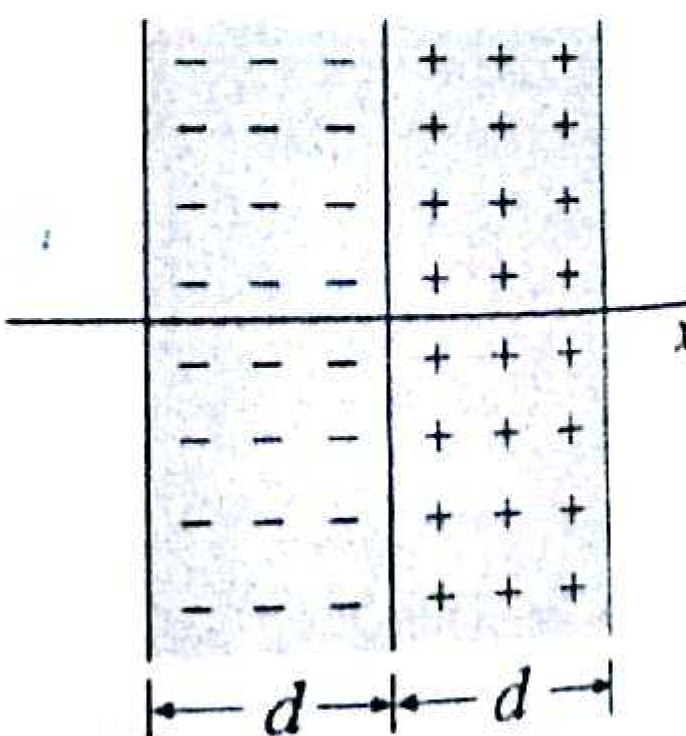
Respuesta

Dentro: $\vec{E} = \pm(\frac{\rho x}{\varepsilon_0})\hat{x}$

Fuera: $\vec{E} = \pm(\frac{\rho a}{\varepsilon_0})\hat{x}$

PR-3.24. *Dos láminas gruesas con cargas opuestas*

Sean dos láminas planas infinitas, cada una de espesor d que están unidas y con cargas uniformes de densidad volumétrica $+\rho$ y ρ, respectivamente. Determine el campo eléctrico en todas las regiones debido a esta configuración.



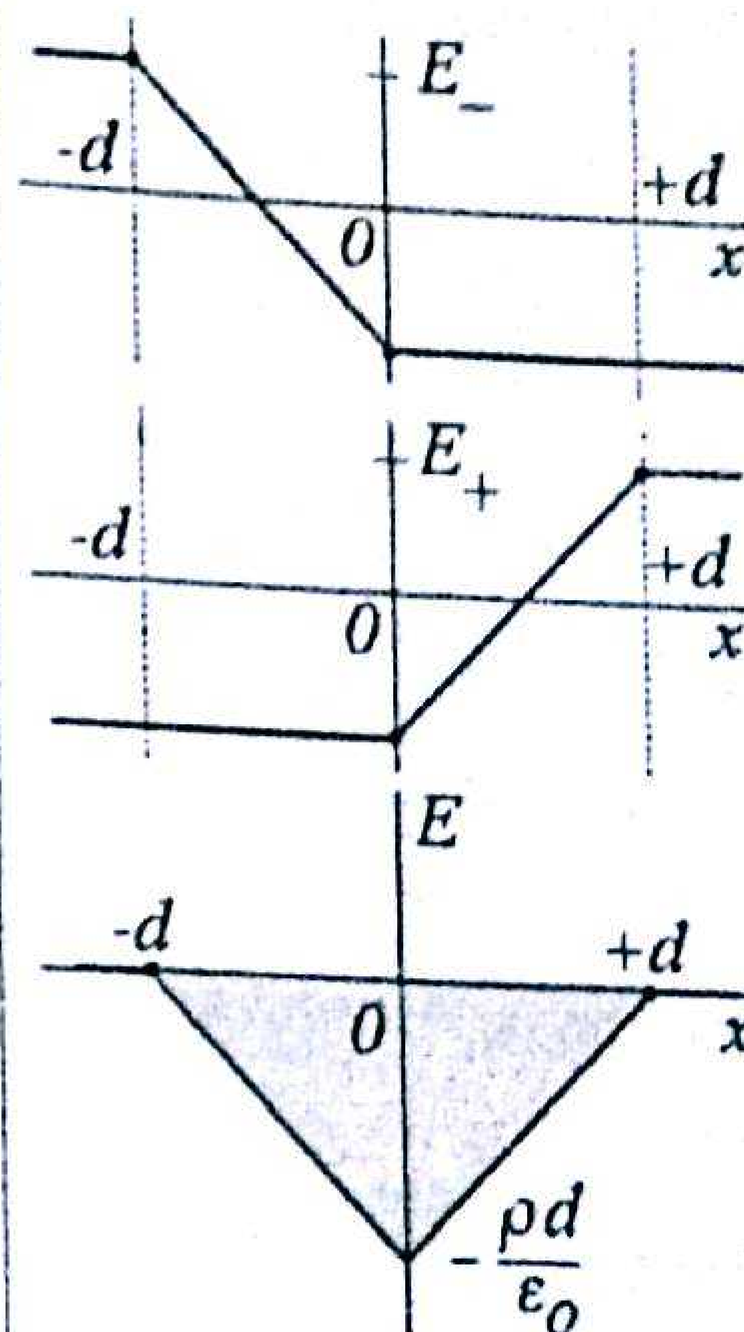
Solución: El campo eléctrico en todas las regiones lo podemos determinar gráficamente usando los resultados para la placa del problema anterior con $d = 2a$ y sumando los campos $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$ de ambas láminas. Para ello, conviene escoger el origen de coordenadas $x = 0$, en la unión de las láminas. El campo resultante está graficado en la figura inferior:

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{para } x < -d$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x+d)\hat{x} \qquad \text{para } -d < x < 0$$

$$\vec{E} = +\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-d)\hat{x} \qquad \text{para } 0 < x < d$$

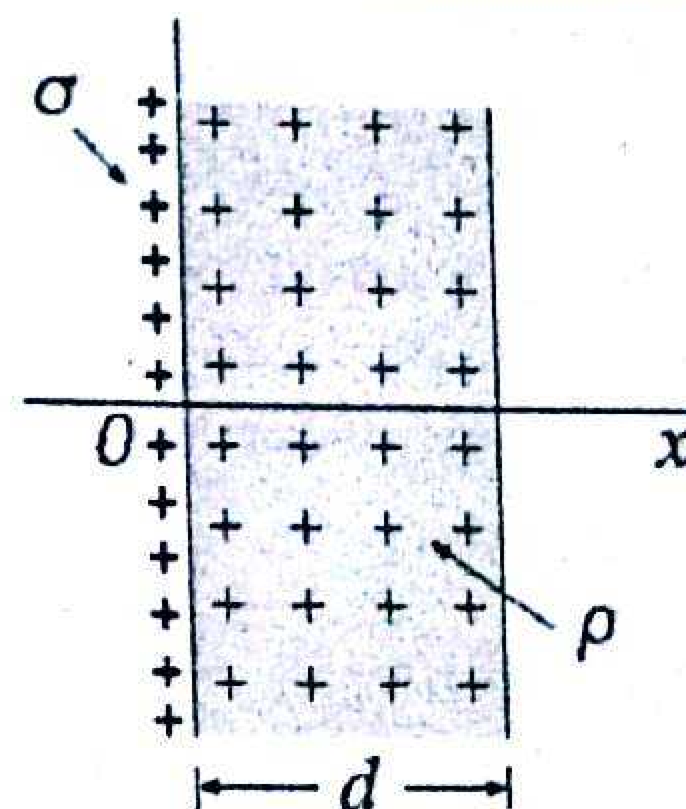
$$\vec{E} = 0 \qquad \text{para } x > d$$



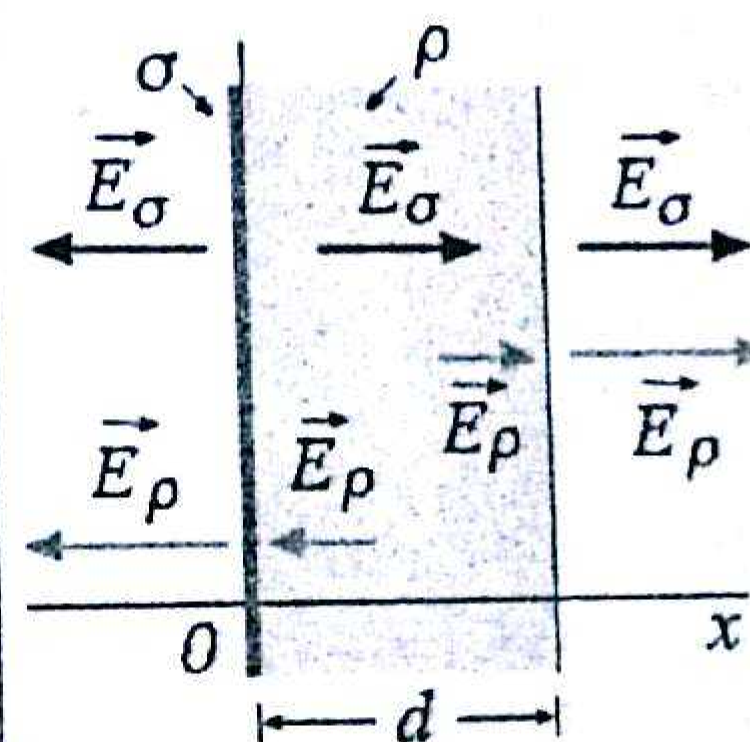
En las regiones exteriores a ambas láminas $|x| > d$, el campo resultante es nulo ya que los dos campos tienen módulos iguales: $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = \rho d / 2\varepsilon_0$, pero apuntan en sentidos opuestos. En cambio, en la unión de las láminas, $x = 0$, donde los campos y tienen sus módulos iguales pero apuntan en el mismo sentido (hacia la izquierda), el campo resultante tiene su valor máximo, $\vec{E} = -\rho d/\varepsilon_0 \hat{x}$.

PR-3.25. *Dos tipos de carga: superficial y volumétrica.*

Una lámina plana infinita de espesor d, tiene una carga uniforme con densidad volumétrica ρ (C/m^3) y además, en una cara tiene una distribución de carga superficial uniforme con densidad σ (C/m^2). Determine el campo eléctrico $\vec{E}$ en todas las regiones.



Solución: En cada una de las regiones se puede aplicar el principio de superposición para combinar los campos individuales: $\vec{E}_\sigma$ de la hoja y $\vec{E}_\rho$ de la lámina. Conviene escoger el origen de coordenadas en la hoja de carga. Para la lámina de densidad ρ podemos usar los resultados del problema anterior, tomando $2a = d$.



En la región a la izquierda, $x < 0$, el campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_\rho = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{x} = -(\frac{\sigma + \rho d}{2\varepsilon_0})\hat{x}$$

En la región intermedia, $0 < x < d$, el campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_\rho = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \left(-\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

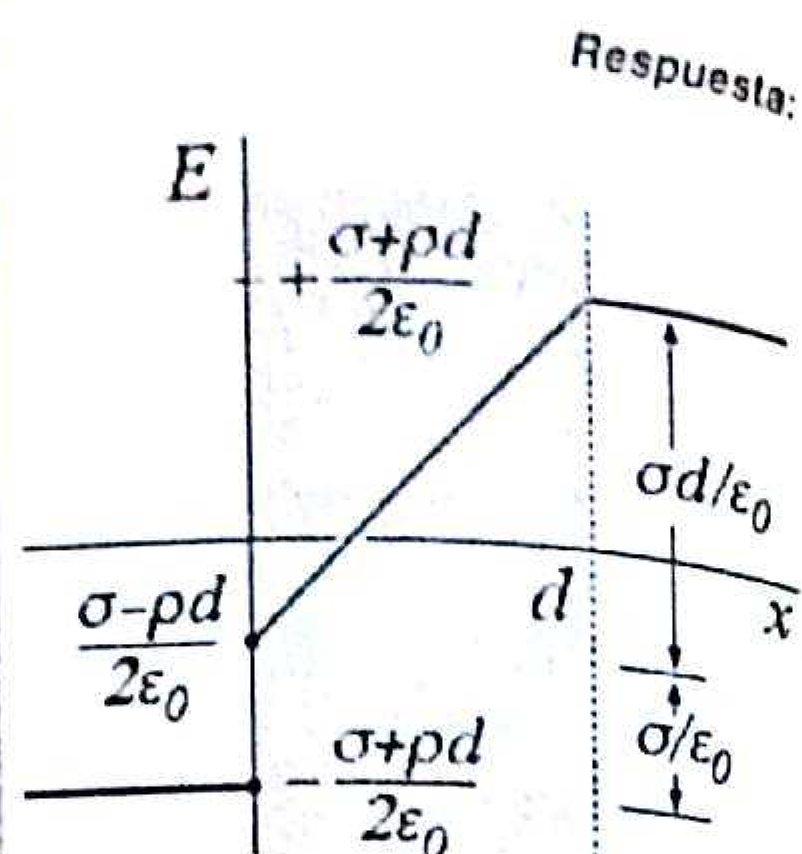
$$\vec{E} = \frac{\sigma - \rho d + 2\rho x}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

En la región a la derecha, $x > 0$, el campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_\rho = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{x} = \left(\frac{\sigma + \rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

Estos resultados están resumidos en el gráfico de E vs x.

Respuesta:



PR-3.26. *Una lámina infinita con carga no uniforme*

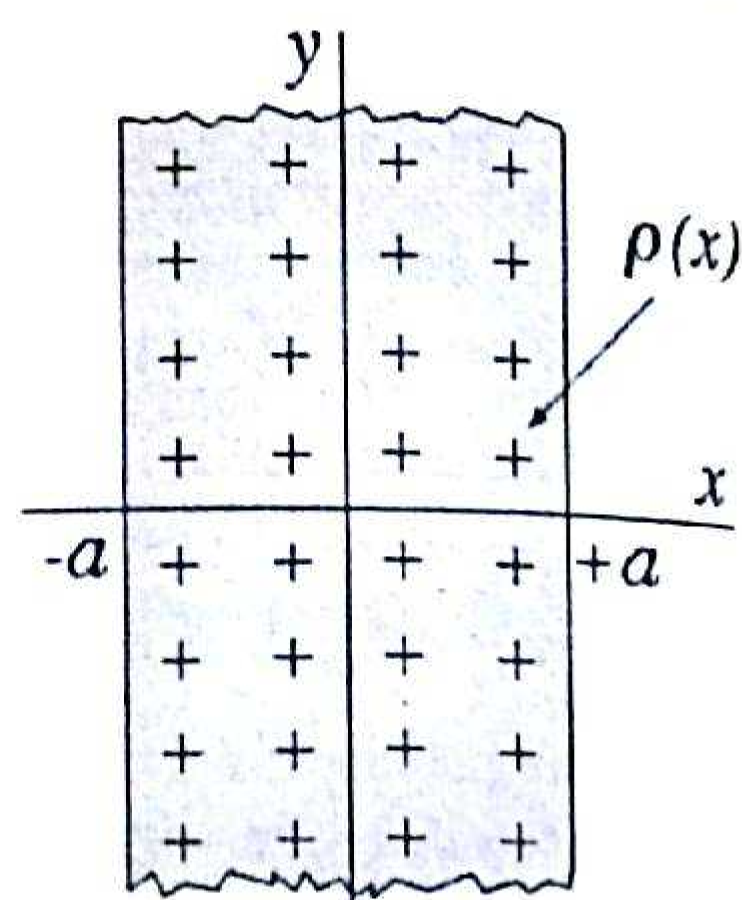
En la región comprendida entre dos planos infinitos $x = -a$ y $x = +a$ existe una carga eléctrica positiva distribuida no uniforme, con densidad volumétrica:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{|x|}{a} \qquad (\text{C/m}^3)$$

Siendo ρ_o una constante.

a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.

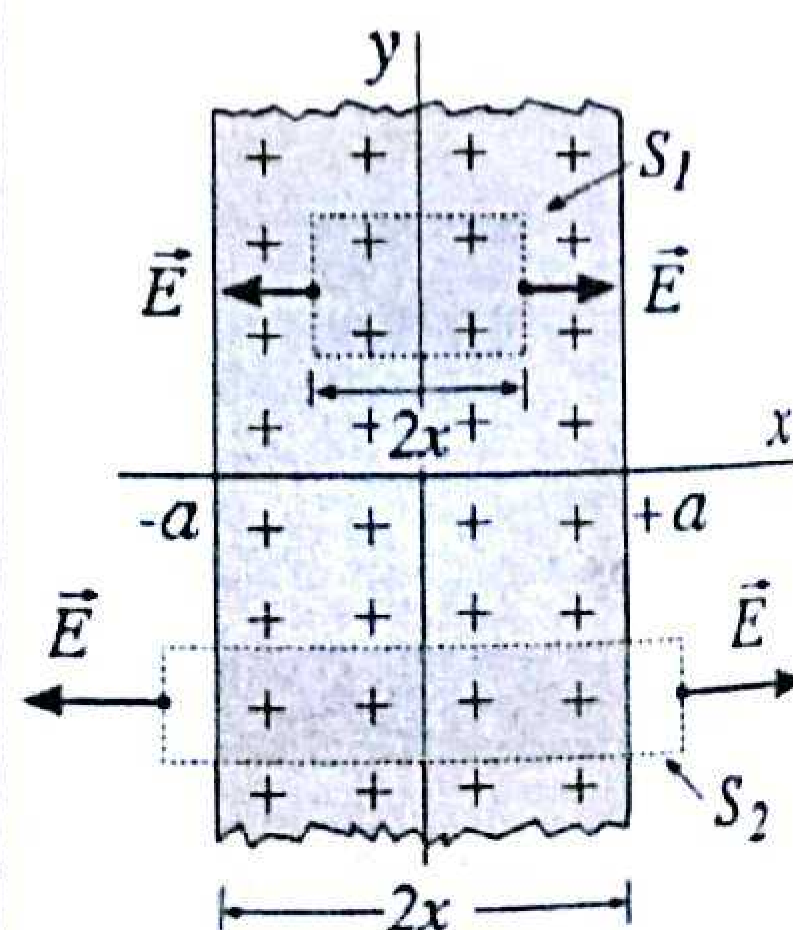
b) Haga una gráfica de E vs. x para todo x.



Solución: a) Para $|x| < a$ se escoge una superficie gaussiana en el interior de la lámina S_1, en forma de una cajita cilíndrica de largo $2x$, con tapas planas de área A y centrada. En las tapas planas el campo es normal a las caras y tiene igual magnitud sobre ellas. Sobre la superficie curva $\vec{E}$ es paralelo a la superficie y el flujo es cero. El flujo total a través de la cajita gaussiana es: $\Phi = 2EA$ y la carga encerrada es:

$$Q_{enc} = 2\int_0^x \rho(x) A dx = 2\int_0^x \frac{\rho_0 x}{a} A dx = \frac{2\rho_0 A}{a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{\rho_0 A x^2}{a}$$

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico:



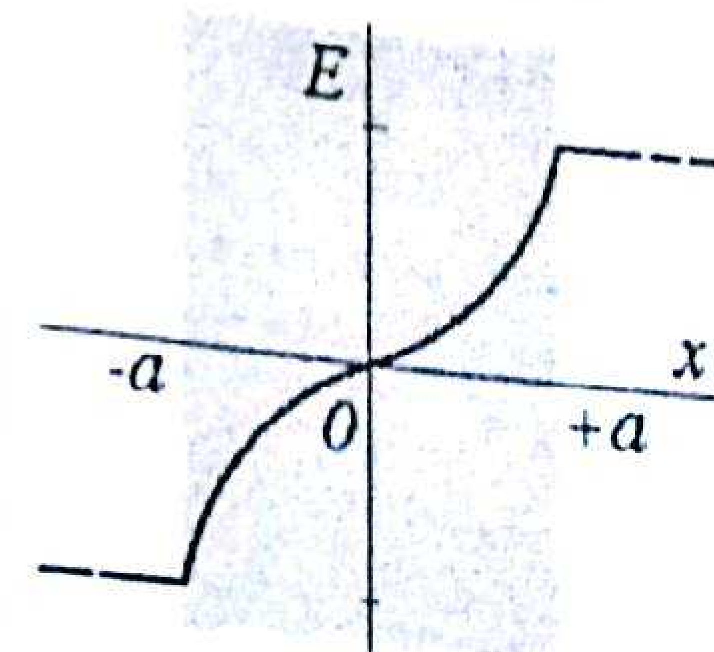
$$2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho_0 A x^2}{a} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = \pm\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 a}\hat{x} \qquad |x| < a$$

Para hallar el campo afuera de la lámina, $|x| > a$, se escoge una superficie gaussiana S_2, en forma de cajita cilíndrica con tapas planas de área A y de largo $2x$. El flujo total sobre la superficie es: $\Phi = 2EA$ y la carga encerrada:

$$Q_{enc} = 2\int_0^a \rho(x) A dx = 2\int_0^a \frac{\rho_0 x}{a} A dx = \frac{2\rho_0 A}{a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \rho_0 A a$$

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico:

$$2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 A a \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = \pm\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$



Respuesta:

$$\vec{E} = \pm\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 a}\hat{x} \qquad |x| < a$$

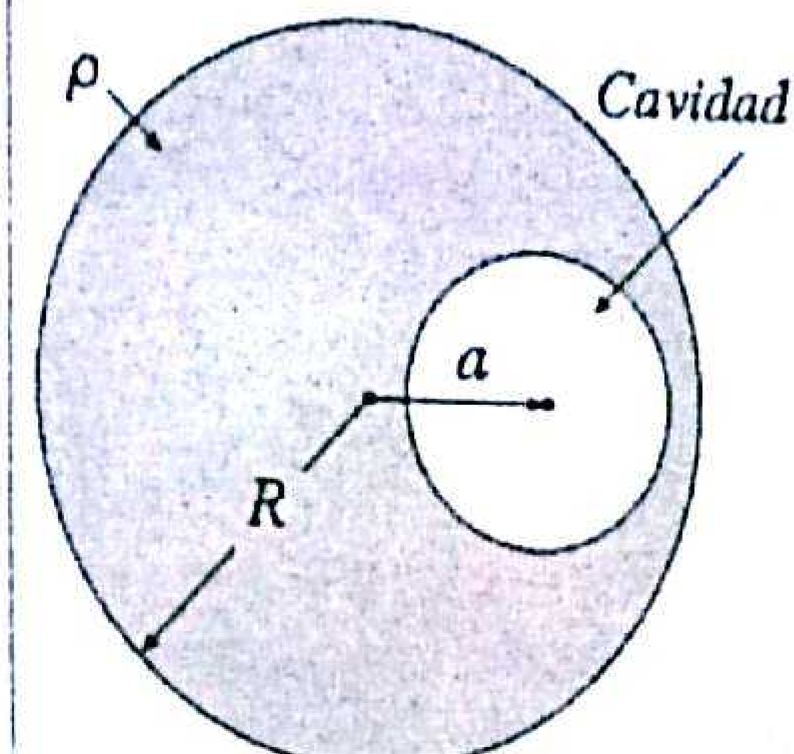
$$\vec{E} = \pm\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\hat{x} \qquad |x| > a$$

PR-3.27. *Campo uniforme dentro de una cavidad*

Una esfera de radio R y carga uniforme por unidad de volumen ρ, tiene una cavidad esférica. El centro de la cavidad está desplazado respecto al centro de la esfera por una distancia a. Demuestre que el campo eléctrico en la cavidad es uniforme y viene dado por:

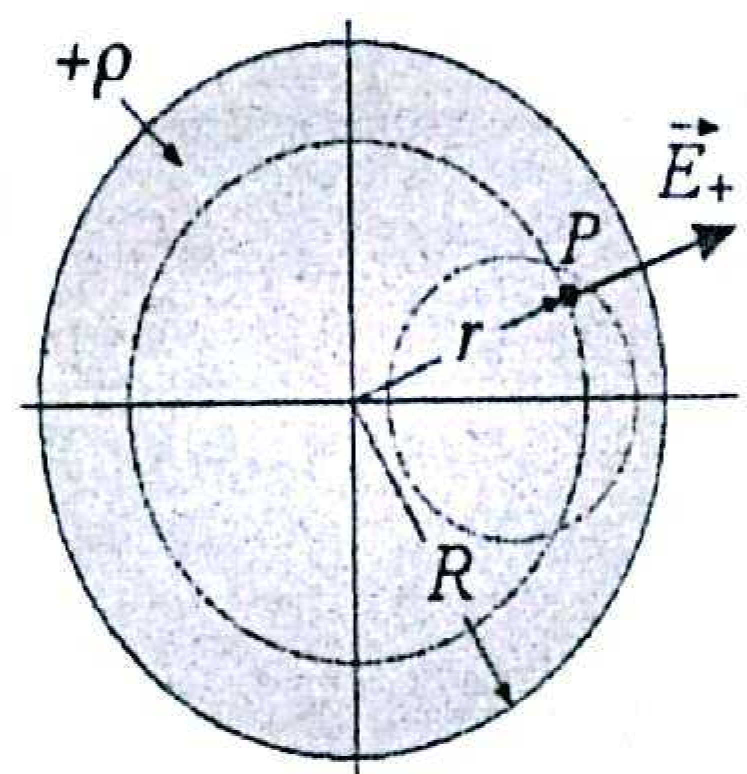
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

Siendo $\vec{a}$ el vector posición que apunta desde el centro de la esfera al centro de la cavidad.

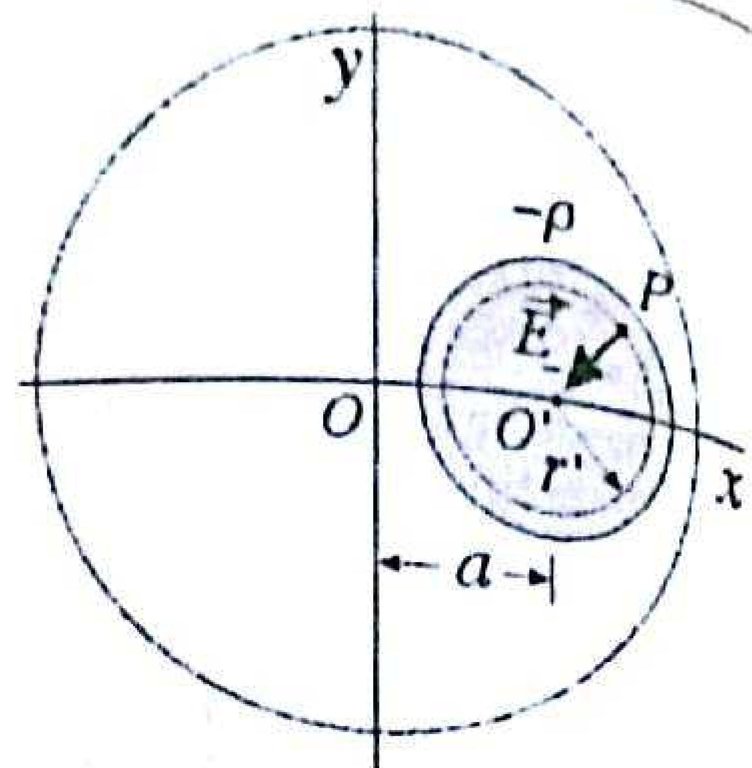


Solución: Podemos *rellenar la cavidad* con una carga positiva de densidad volumétrica $+\rho$ y otra negativa de densidad volumétrica $-\rho$, sin que con ello se modifique el campo en P. Como resultado, obtendremos dos esferas completas, la mayor de radio R y carga homogénea *positiva* $+\rho$ y la menor, del tamaño de la cavidad con carga homogénea *negativa* $-\rho$. El campo resultante en cualquier punto de la cavidad es la superposición del campo $\vec{E}_+$ debido a la esfera grande, y el campo $\vec{E}_-$ debido a la esfera pequeña.

En el interior de una esfera sólida con densidad ρ, el campo se determina aplicando la ley de Gauss a una esfera gaussiana de radio r que pase por el punto P.



$$\int \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

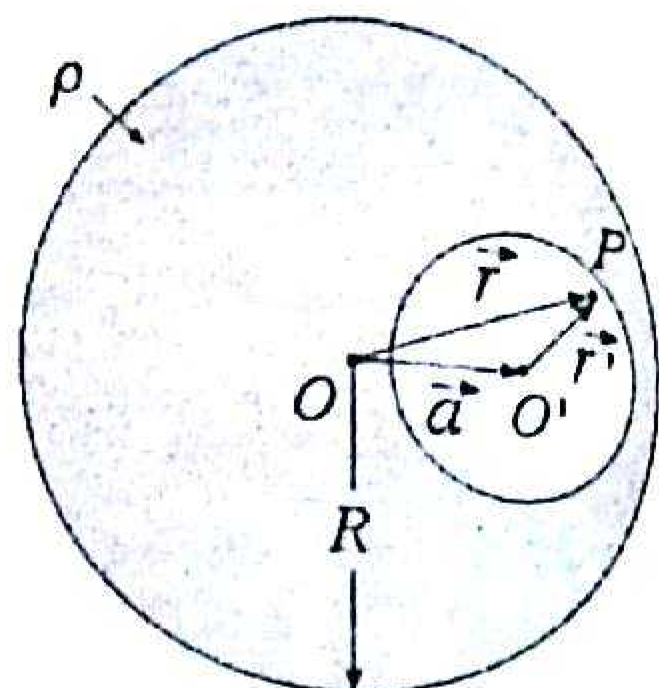


Por lo tanto el campo eléctrico debido a la esfera grande, con densidad de carga $+\rho$ es:

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

De manera similar, el campo eléctrico en el mismo punto P debido a la esfera del tamaño de la cavidad, con densidad de carga $-\rho$ es:

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,'$$

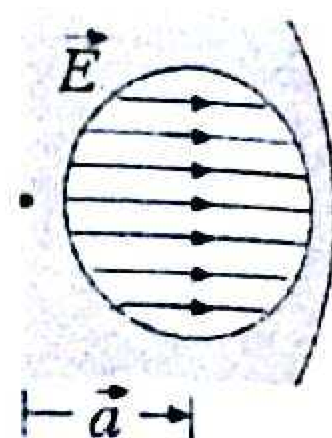


Note que por ser la carga negativa, $\vec{E}_-$ apunta en dirección contraria al vector posición $\vec{r}\,'$ de P respecto al centro O' de la cavidad. Los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ están relacionados por:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}\,'$$

El campo resultante en P se obtiene de la superposición de los dos campos, $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$



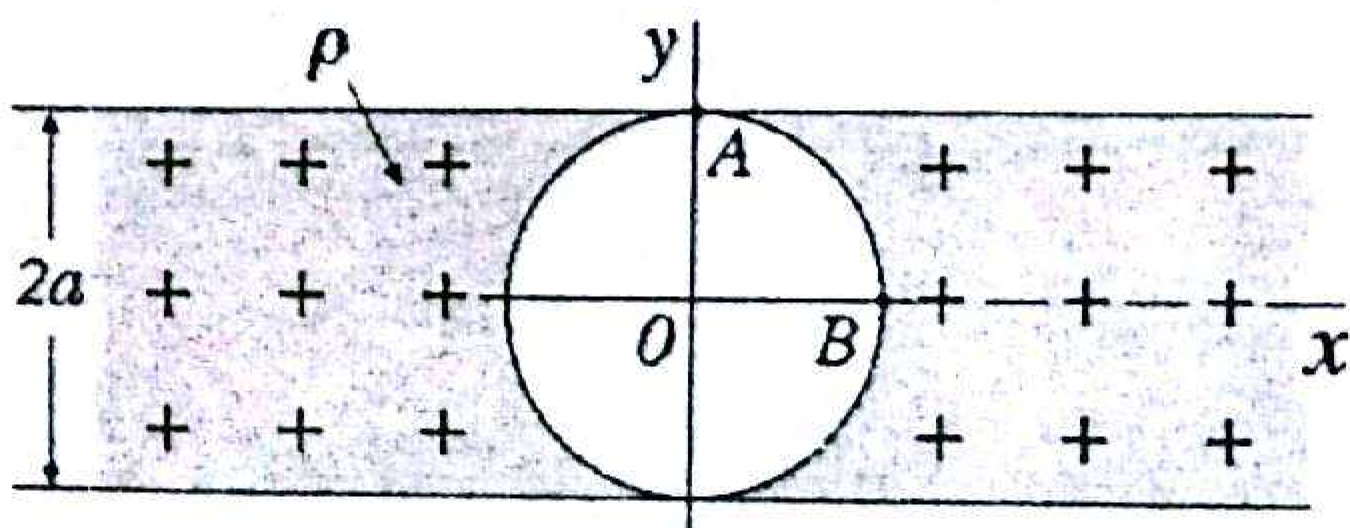
Este es un resultado bastante curioso, el campo eléctrico dentro de la cavidad es *uniforme*, es decir, tiene magnitud y dirección constantes, apuntando en la dirección del centro de la esfera al centro de la cavidad. Además, el campo eléctrico *no depende ni del radio de la esfera ni del radio de la cavidad.*

Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}}$$

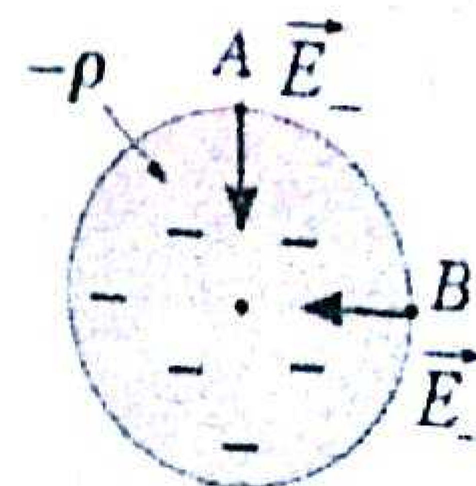
PR-3.28. *Cavidad esférica en una lámina uniforme*

Una lámina plana e ilimitada de grosor $2a$ tiene una carga repartida uniformemente con densidad volumétrica ρ.



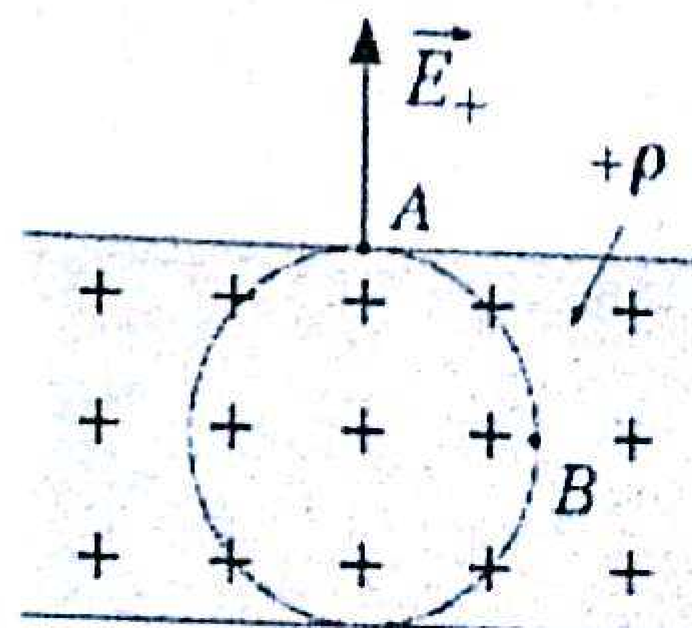
Se le quita un pedazo de tal forma que queda una cavidad esférica de radio a. Determine el campo eléctrico en los puntos A y B indicados.

Solución: El campo eléctrico no se altera si se rellena la cavidad con dos esferas de igual densidad uniforme de carga, una positiva $+\rho$ y la otra negativa $-\rho$. De esta manera podemos superponer los campos conocidos de una esfera con carga negativa, y el de una lámina completa que tiene carga positiva.



El campo eléctrico a una distancia radial r dentro de la esfera de radio a con densidad de carga uniforme $-\rho$ fue calculado en el problema PR-3.13:

$$\vec{E}_- = \frac{kQr}{R^3}(-\hat{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\hat{r} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{Qr}{(4\pi/3)R^3}\hat{r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$



El campo eléctrico a una distancia perpendicular y desde el centro, dentro de la lámina infinita de espesor $2a$ y densidad de carga $+\rho$, fue calculado en el problema PR-3.23:

$$\vec{E}_+ = \pm\left(\frac{\rho y}{\varepsilon_0}\right)\hat{y}$$

La superposición de estos dos campos en el punto A con $r = a$ para la esfera e $y = a$, para la lámina, resulta:

$$\vec{E}_A = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{y} - \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\hat{y} = \frac{2}{3}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

La superposición de estos dos campos en el punto B con $r = a$ para la esfera e $y = 0$ para la lámina, resulta:

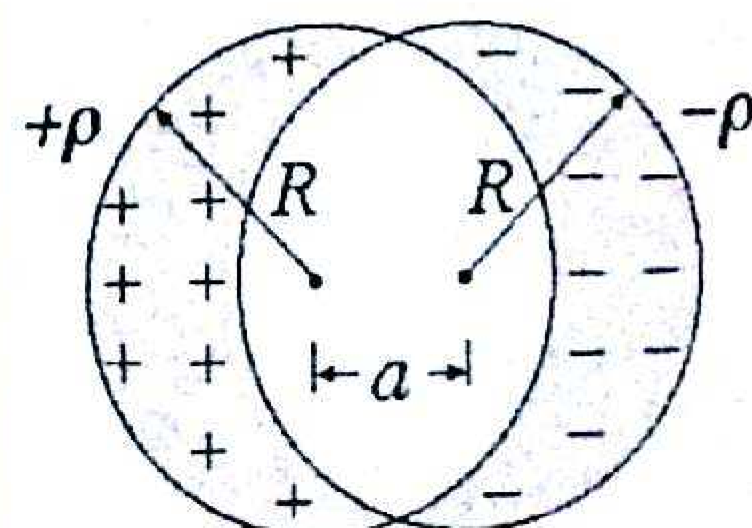
$$\vec{E}_B = 0 - \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\hat{x} = -\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\hat{x}$$

Respuesta:

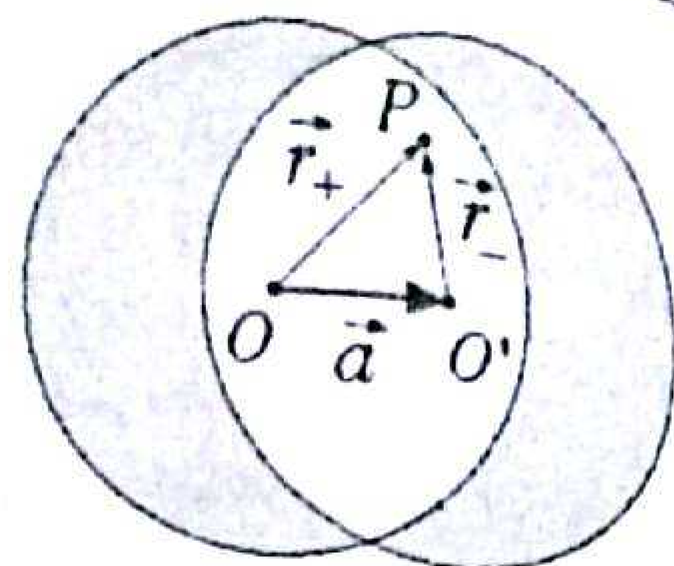
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_A &= +\frac{2}{3}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{y} \\ \vec{E}_B &= -\frac{1}{3}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{x}\end{aligned}}$$

PR-3.29. *Campo de dos medias lunas*

Dos esferas de igual radio, R, tienen cargas uniformes con densidades volumétricas de carga uniforme, $+\rho$ y $-\rho$ respectivamente. Cuando las esferas se intersecan y sus centros están separados por una distancia $a < R$, forman dos medias lunas. Determine el campo eléctrico en cualquier punto de la zona de intersección.

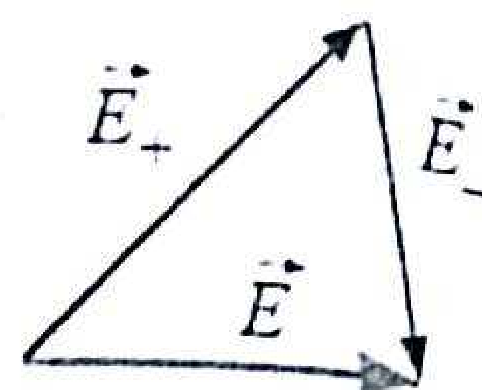


Solución: El campo eléctrico en cualquier punto P de la cavidad es la superposición de los campos producidos por las dos esferas completas con densidades volumétricas de carga $+\rho$ y $-\rho$ respectivamente.



Los campos de cada esfera son radiales y sus magnitudes proporcionales a las distancias a sus respectivos centros r_+ y r_-:

$$\vec{E}_+ = +\frac{\rho \vec{r}_+}{3\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad \vec{E}_- = -\frac{\rho \vec{r}_-}{3\varepsilon_0}$$



El campo resultante en el punto P de la cavidad es la suma vectorial:

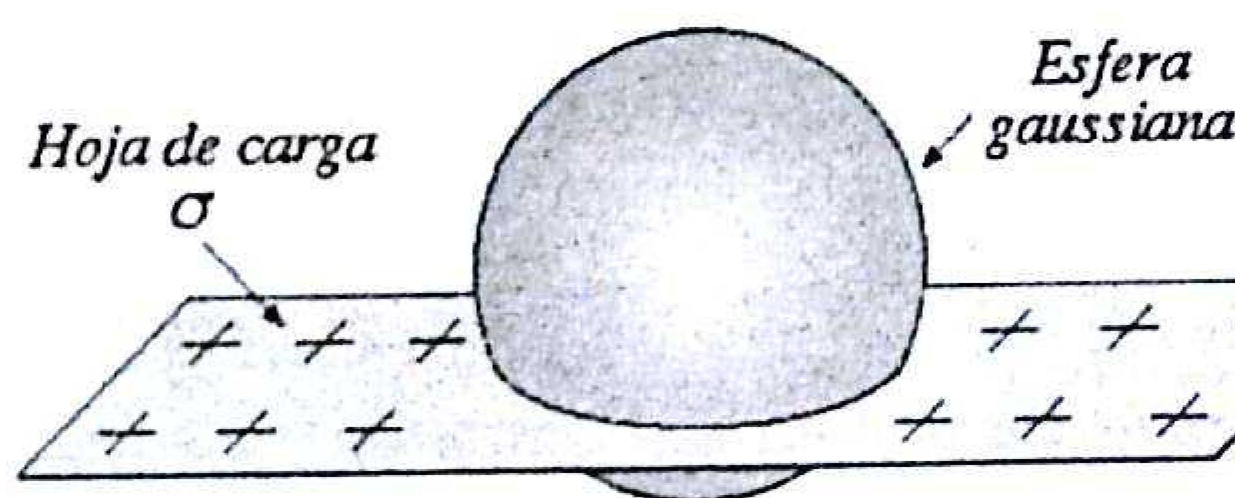
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

Respuesta:

$\vec{E} = \rho\vec{a}/3\varepsilon_0$ (uniforme)

PR-3.30. *Esfera gaussiana interseca un plano de carga*

Sabemos que una hoja de carga infinita produce un campo uniforme a ambos lados de la superficie: $E = \pm\sigma/2\varepsilon_0$.



Considere una esfera imaginaria de radio R cuyo centro está a una distancia $d < R$ del plano. Calcule el flujo neto a través de la superficie esférica y la carga neta que encierra para verificar que se cumple la ley de Gauss.

Solución: Para calcular el flujo a través de la parte superior de la esfera donde el campo apunta hacia arriba, consideramos en la esfera un anillo de radio $r = Rsen\theta$ a un ángulo θ respecto al eje z positivo. El área de este anillo es $dA = (2\pi r)(Rd\theta) = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$ y el flujo es:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E}\bullet d\vec{A} = \int_0^{\theta_0} (\frac{\sigma}{2\varepsilon_0})(2\pi R^2 sen\theta d\theta)cos\theta =$$

$$\frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}\int_0^{\theta_0} sen\theta cos\theta d\theta = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}\frac{sen^2\theta}{2}\Big|_0^{\theta_0} = \frac{\sigma\pi R^2}{2\varepsilon_0}sen^2\theta_0$$

El flujo en la parte inferior de la esfera, donde el campo apunta hacia abajo es:

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E}\bullet d\vec{A} = -\int_{\theta_0}^{\pi} (\frac{\sigma}{2\varepsilon_0})(2\pi R^2 sen\theta d\theta)cos\theta =$$

$$-\frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}\int_{\theta_0}^{\pi} sen\theta cos\theta d\theta = -\frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}\frac{sen^2\theta}{2}\Big|_{\theta_0}^{\pi} = \frac{\sigma\pi R^2}{2\varepsilon_0}sen^2\theta_0$$

El flujo total a través de la esfera gaussiana es:

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_2 = \frac{\sigma\pi R^2}{2\varepsilon_0}sen^2\theta_0 + \frac{\sigma\pi R^2}{2\varepsilon_0}sen^2\theta_0 = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}sen^2\theta_0$$

La esfera interseca en el plano un círculo de radio $Rsen\theta_0$, y la cantidad de carga del plano que encierra es: $Q_{enc} = \sigma A = \sigma\pi R^2 sen^2\theta_0$. Por lo tanto, queda demostrado que para la superficie esférica dada se cumple la ley de Gauss, como debe ser:

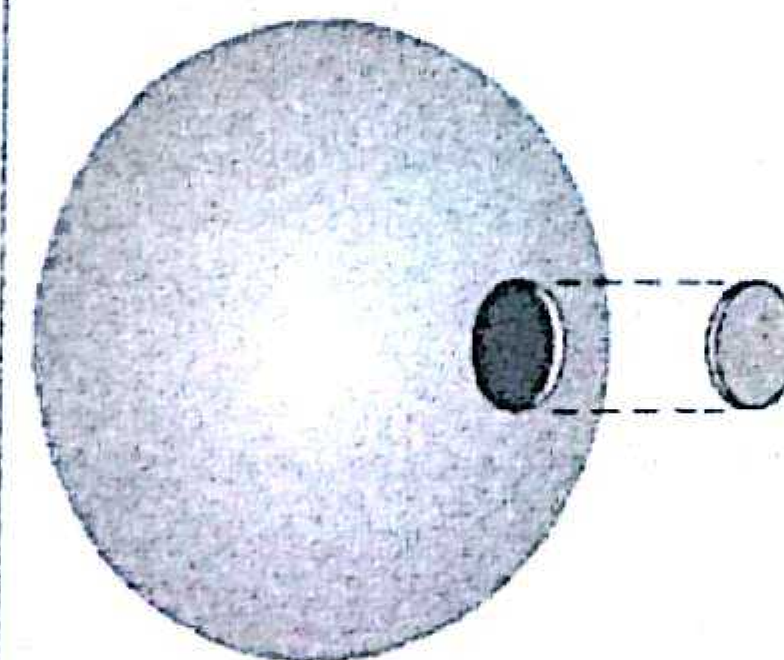
$$\Phi = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}sen^2\theta_0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Respuesta:

$$\Phi = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}sen^2\theta_0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

PR-3.31. *Campo en el agujero de un cascarón esférico.*

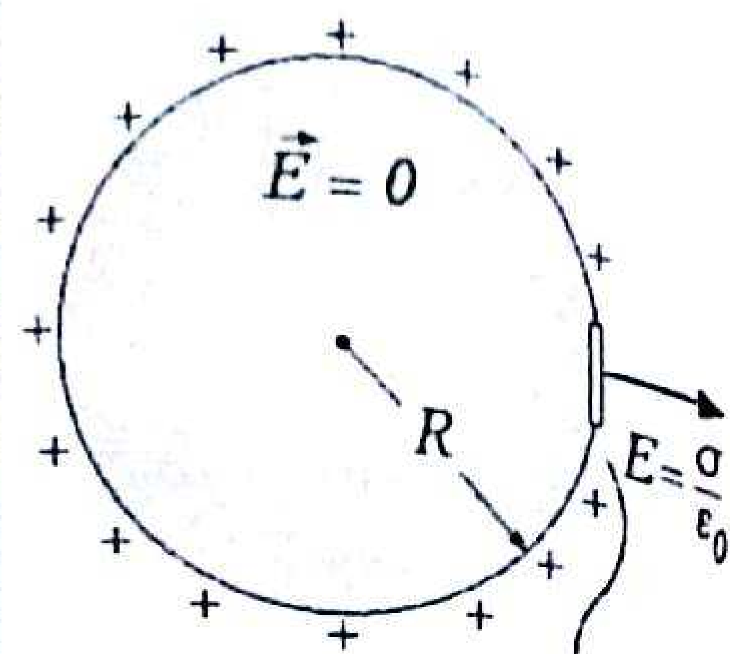
Suponga que se pincha un pequeño orificio a través de la pared de un cascarón esférico de radio R que tiene una carga uniforme con densidad superficial σ (C/m²). ¿Cuál será la magnitud y dirección del campo eléctrico próximo al centro del orificio?



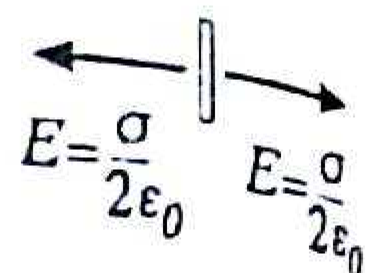
Solución: Podemos aplicar el principio de superposición, considerando los campos que generarían en ese punto, el cascarón original y el pedacito que se le ha extraído. Hallemos primero, el campo eléctrico debido al cascarón completo. En el interior del cascarón, si tomamos una esfera gaussiana concéntrica de radio $r < R$, debido a la simetría esférica el flujo es $4\pi r^2 E$ y como la carga neta encerrada es cero, se deduce que el campo E es nulo.

Para hallar E en la superficie del cascarón, imaginamos una esfera gaussiana de radio $\approx R$ (es decir, que justamente la envuelva). Debido a la simetría, el flujo es $\Phi = 4\pi R^2 E$ y la carga neta encerrada es $Q = \sigma A = \sigma\,(4\pi R^2)$, por lo tanto, de acuerdo a la ley de Gauss $\Phi = Q/\varepsilon_0$, el campo eléctrico en la superficie del cascarón es:

$$\bar{E}_{casc} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

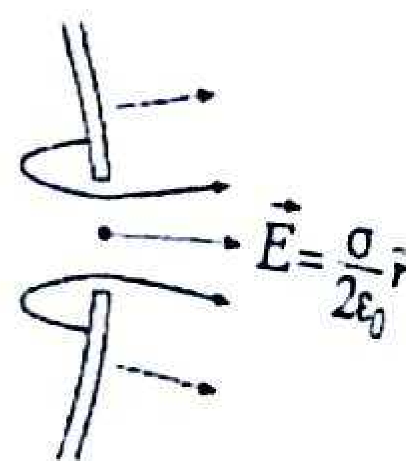


Calculemos ahora el campo debido al disco sustraído. Para puntos muy próximos a su centro, éste puede ser considerado como un plano infinito que genera un campo uniforme a ambos lados. Tomando en esa región, una cajita gaussiana de caras planas y paralelas al disco, el flujo es $\Phi = 2EA$, mientras que la carga encerrada es $Q = \sigma A$, por lo tanto aplicando la ley de Gauss, encontramos:



$$\bar{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

Respuesta:

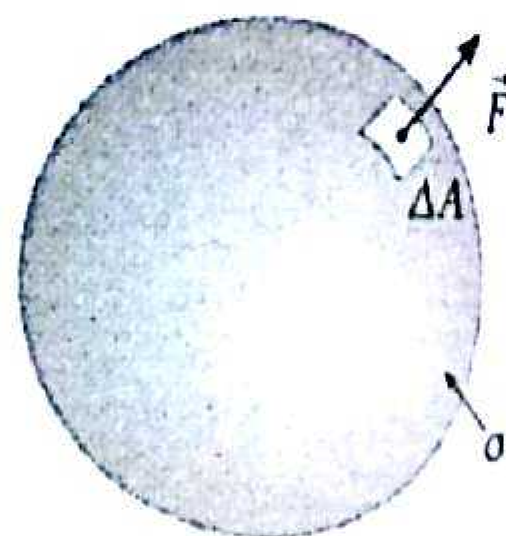


De acuerdo al principio de superposición, el campo en la posición media del agujero es:

$$\bar{E}_{agujero} = \bar{E}_{casc} - \bar{E}_{disco} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

PR-3.32. *La presión eléctrica sobre un globo cargado*

Un globo esférico de goma está cargado en su superficie con una densidad uniforme σ (C/m^2). La fuerza de repulsión eléctrica entre sus partes tiende a expandirlo. ¿Cuál es la presión (fuerza por unidad de área) debida a la fuerza eléctrica?



Solución: Escojamos una pequeña región del globo de área ΔA. De acuerdo al problema anterior, el campo eléctrico sobre una región pequeña de la superficie del globo debido a todas las cargas, salvo las cargas que se encuentran en la propia región es:

$$E = \sigma/2\varepsilon_0$$

La fuerza neta que se ejerce sobre un pedazo de área ΔA en la superficie del globo es:

$$F = Q_{pedazo}E_{resto} = \sigma\Delta A\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\Delta A\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, la presión o fuerza por unidad de área, que se ejerce sobre la pequeña región del globo cargado es:

$$p = \frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (\text{N/m}^2)$$

Respuesta:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

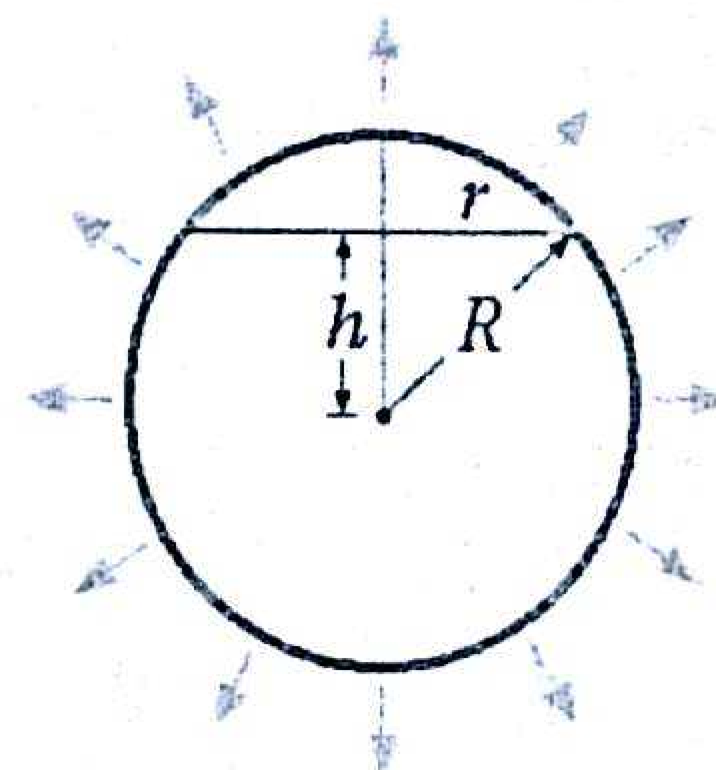
PR-3.33. *Fuerza para juntar las partes de una esfera*

Una esfera metálica de radio R con carga total Q está cortada en dos partes por el plano que está a la distancia h del centro. Halle la fuerza que es necesario aplicar para mantener las dos partes unidas.



Solución: De acuerdo al problema anterior, la presión o fuerza por unidad de área ejercida por todas las cargas sobre cualquier región de la esfera es:

$$p = \frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{(Q/4\pi R^2)^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$



Para hallar la fuerza neta que se ejerce sobre toda la parte superior de la esfera, notamos que, por razones de simetría la suma de las componentes horizontales de las fuerzas es igual a cero. La fuerza resultante será la suma de las componentes verticales:

$$F = \sum F\cos\theta = \sum p\Delta A\cos\theta = p\sum \Delta A\cos\theta$$

Donde θ es el ángulo que forma el vector $\bar{F}$ con la vertical en cada punto. Como $\Delta A\cos\theta$ es la proyección de la superficie del sector sobre el plano horizontal, la suma representa el área de un circulo, $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Por lo tanto, la fuerza que hay que aplicar es:

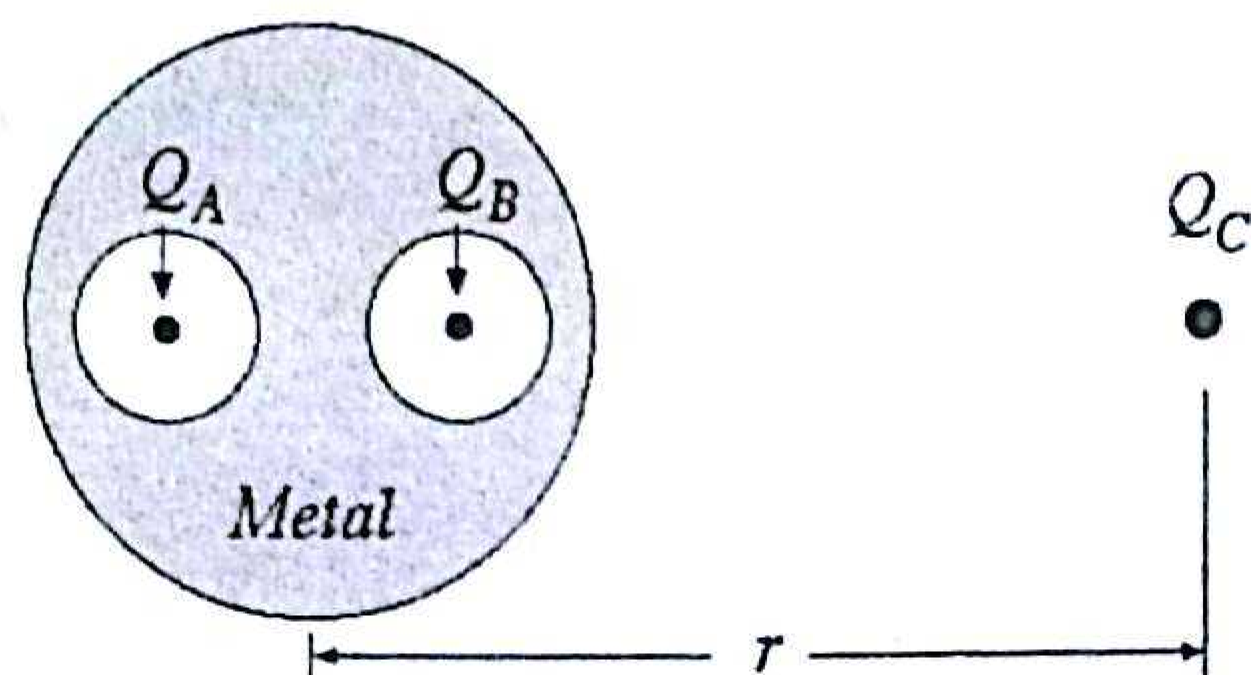
$$F = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\right)\pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)$$

Respuesta:

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)$$

PR-3.34. *Apantallamiento electrostático.*

Una esfera metálica maciza tiene dos cavidades esféricas. La esfera no tiene carga neta pero en los centros de sus cavidades hay cargas puntuales Q_A y Q_B, respectivamente.

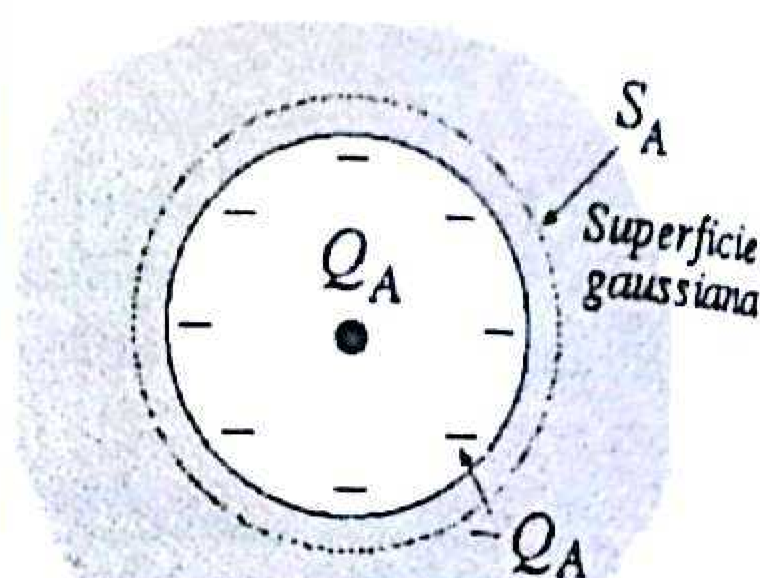


A una distancia r muy grande (en comparación con el tamaño de la esfera), existe una tercera carga puntual, Q_C. Determine:

a) Las cargas inducidas en la esfera metálica.

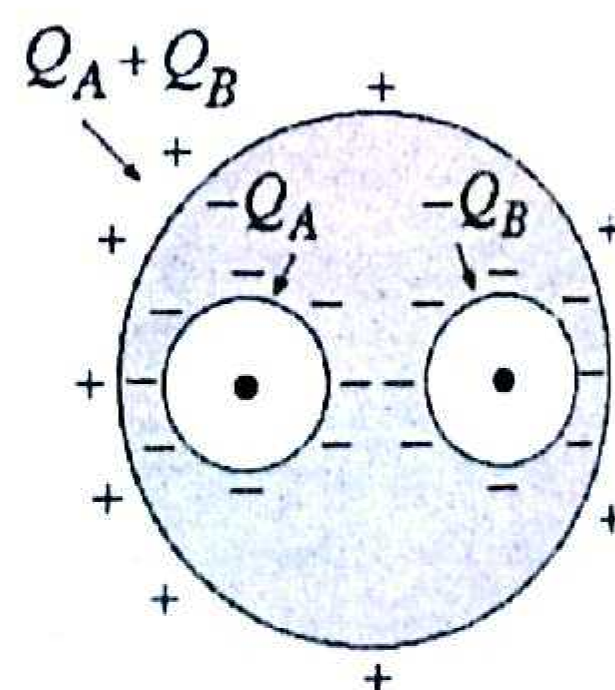
b) La fuerza que actúa sobre la esfera metálica y sobre cada una de las cargas puntuales

Solución: a) En una cavidad de un conductor, el campo E es independiente de cualquier carga situada afuera (apantallamiento). Si la cavidad contiene una carga Q_A en su centro, podemos imaginar una superficie gaussiana, S_A, de radio igual a la cavidad pero ubicada en el conductor. El flujo a través de esta superficie debe ser nulo en virtud de que en el interior de un conductor $E = 0$. Por lo tanto, debe haber una carga igual y opuesta, $-Q_A$ en la superficie de la cavidad, la cual está uniformemente distribuida.



Igual razonamiento se aplica para la cavidad que tiene una carga Q_B en su centro; y se deduce que habrá una carga opuesta $-Q_B$ inducida en la superficie de dicha cavidad. Si la esfera metálica tiene en sus superficies internas una carga total $-(Q_A+Q_B)$, entonces, para que su carga neta siga siendo nula, debe existir una cantidad igual de carga, de signo opuesto en su superficie externa:

$$Q_e = Q_A + Q_B$$



b) Las cargas puntuales Q_A y Q_B se encuentran en los centros de las cavidades completamente protegidas de la influencia de la carga puntual Q_C ubicada afuera de la esfera metálica. Por lo tanto, no se ejercerá ninguna fuerza sobre estas cargas:

$$F_A = F_B = 0$$

Si la carga externa Q_C no existiese, el campo externo de la esfera metálica tendría simetría radial. La presencia de la carga externa, altera la distribución de carga en su superficie externa (sin afectar la cantidad total de carga).

Si la separación r entre la esfera metálica y la carga puntual Q_C es muy grande en comparación con el tamaño de la esfera, la fuerza sobre éstas son opuestas y de igual magnitud, la cual es aproximadamente:

$$F_{esf} = F_C = k\frac{(Q_A + Q_B)Q_C}{r^2}$$

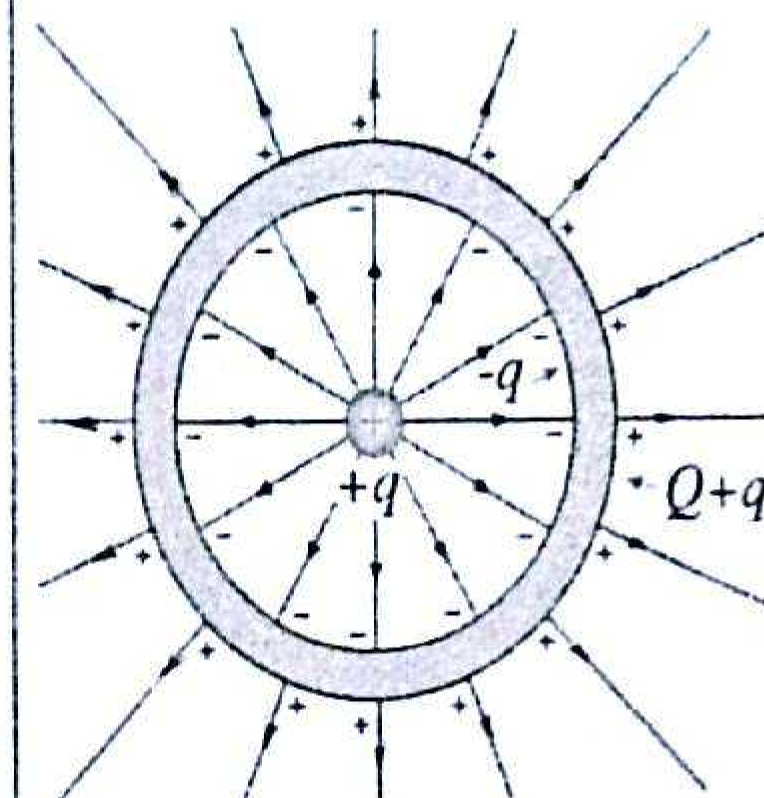
Respuesta:

a) $Q_e = Q_A + Q_B$
b) $F_A = F_B = 0$
$F_{esf} = F_C = k\frac{(Q_A + Q_B)Q_C}{r^2}$

PR-3.35. *Carga puntual dentro de una esfera metálica*

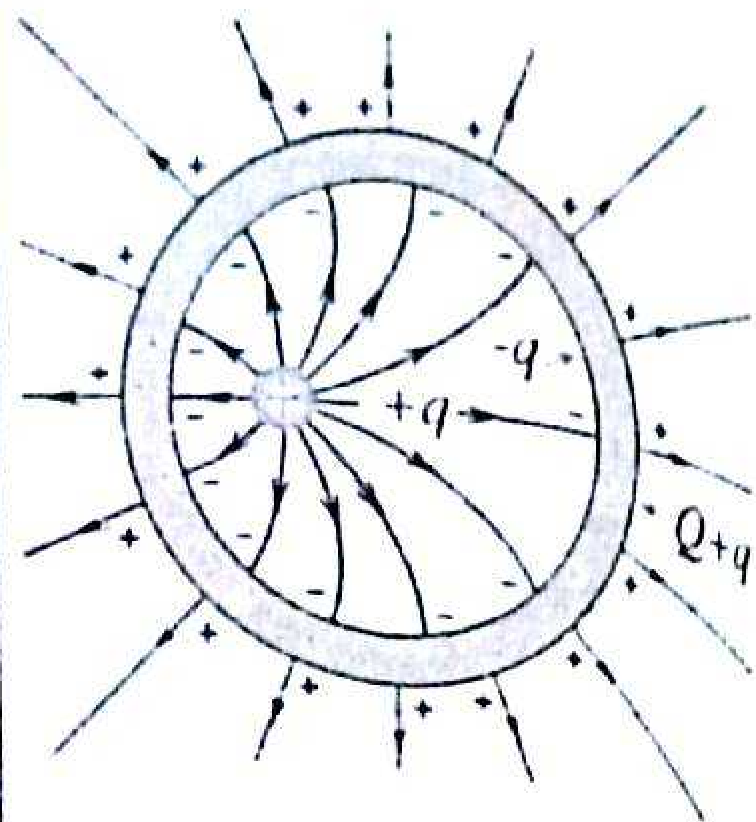
Una esfera metálica hueca con paredes de cierto grosor, tiene una carga neta Q y se introduce en su interior una carga puntual q. Determine las cargas inducidas en las superficies interior y exterior de la esfera y dibuje las líneas de campo eléctrico. Considere los dos casos:
a) La carga q está en el centro de la esfera metálica.
b) La carga q está desplazada del centro de la esfera.

Solución: a) Supongamos que la carga q se encuentra en el centro de la esfera metálica. Si imaginamos una superficie gaussiana dentro del cuerpo del metal, $E = 0$ en todos sus puntos, de modo que la ley de Gauss nos dice que no hay carga neta encerrada por esa superficie. Por lo tanto, debe haberse inducido una carga $-q$ sobre la superficie interior del metal y todas las líneas de E procedentes de la carga puntual $+q$ deben terminar en esta carga inducida $-q$. Como el conductor tiene una carga neta $+Q$, para preservar esta carga neta, en la superficie exterior debe existir una carga $(Q+q)$.

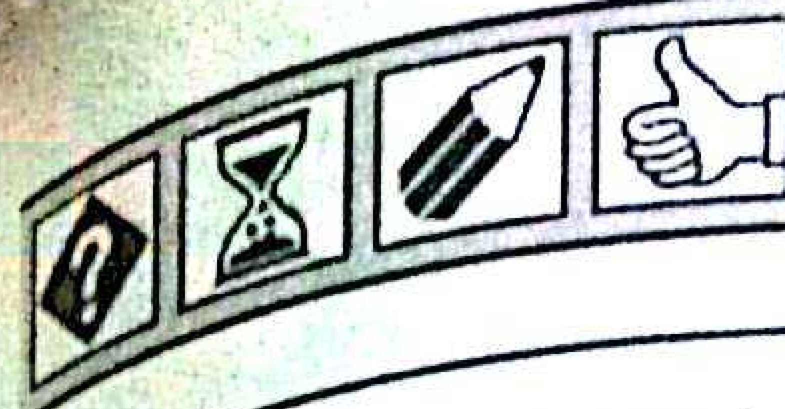


De la simetría, está claro que las cargas en ambas superficies se distribuyen uniformemente. El campo eléctrico fuera de la esfera es la suma de los campos creados por la cara puntual q y la carga de la esfera Q, ya que los campos de las cargas inducidas se compensan. La figura de las líneas de campo es simétrica, son rectas radiales que comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.

b) Supongamos ahora que la carga puntual está desplazada del centro de la esfera. Si construimos una esfera gaussiana que rodea la cavidad pero dentro del metal, la carga neta encerrada es cero y la carga inducida en la superficie interior será, como en el caso anterior, $-q$ independientemente de la ubicación de q. Pero su distribución deja de ser uniforme ya que tendrá mayor densidad para las regiones mas cercanas a la carga puntual.



Por lo tanto, las líneas de campo dentro de la cavidad se alteran, pero siguen siendo perpendiculares a la superficie del conductor. A los efectos de los puntos exteriores a la esfera gaussiana, la carga negativa inducida cancela los efectos de la carga puntual y es como si no existiera ninguna carga adentro de esta. La carga sobre la superficie exterior del metal $(q + Q)$ estará distribuida uniformemente, de modo que las líneas de campo siguen siendo radiales.



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-3.01. ***De acuerdo a la ley de Gauss, ...***

a) Si se conoce la carga neta dentro de una superficie cerrada se puede determinar el campo eléctrico.

b) Si el flujo neto a través de una superficie cerrada es cero, entonces $\vec{E} = 0$ en cada punto de dicha superficie.

c) Si una superficie cerrada no contiene carga neta alguna, entonces $\vec{E} = 0$ en todos sus puntos.

d) Si $\vec{E} = 0$ en todos los puntos de una superficie cerrada, no debe existir carga neta en su interior.

e) El campo, $\vec{E}$, en la integral es únicamente el debido a las cargas contenidas dentro de la superficie cerrada.

La ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

PE-3.02. ***Es correcto afirmar que......***

a) Si más líneas de $\vec{E}$ salen de una superficie gaussiana que las que entran, debe encerrar una carga negativa neta.

b) Las cargas externas a una superficie gaussiana contribuyen al flujo neto de $\vec{E}$ a través de esa superficie.

c) El flujo eléctrico neto a través de una superficie gaussiana que encierra una distribución de cargas dada no depende ni del tamaño ni de la forma de la superficie.

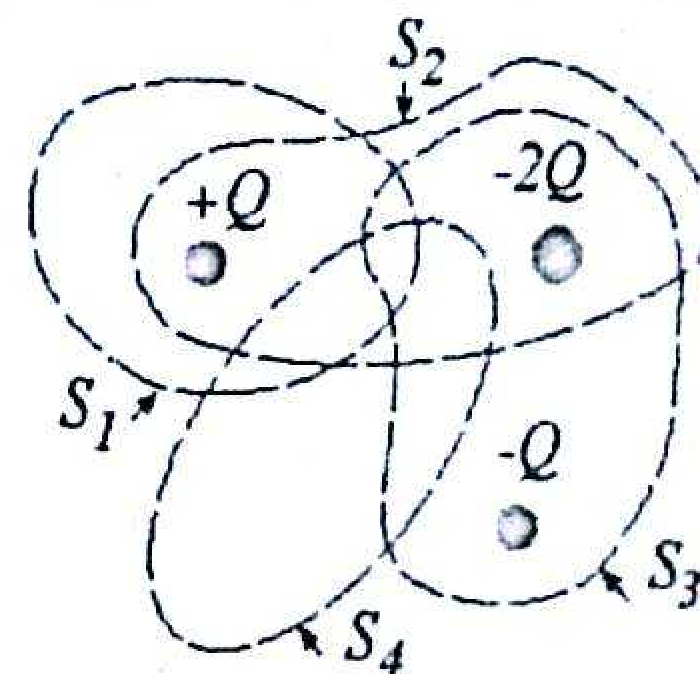
d) Si una superficie gaussiana encierra un dipolo eléctrico el flujo de $\vec{E}$ es doble que si encerrara una carga puntual.

e) La ley de Gauss es válida únicamente en el caso de distribuciones simétricas de cargas.

PE-3.03. ***Compare los flujos en las distintas superficies***

Tres cargas, $+Q$, $-Q$ y $-2Q$ están en una región del espacio. Si dibujamos las cuatro superficies gaussianas mostradas en la figura, ¿en cuál de ellas será mayor la magnitud del flujo del campo eléctrico?

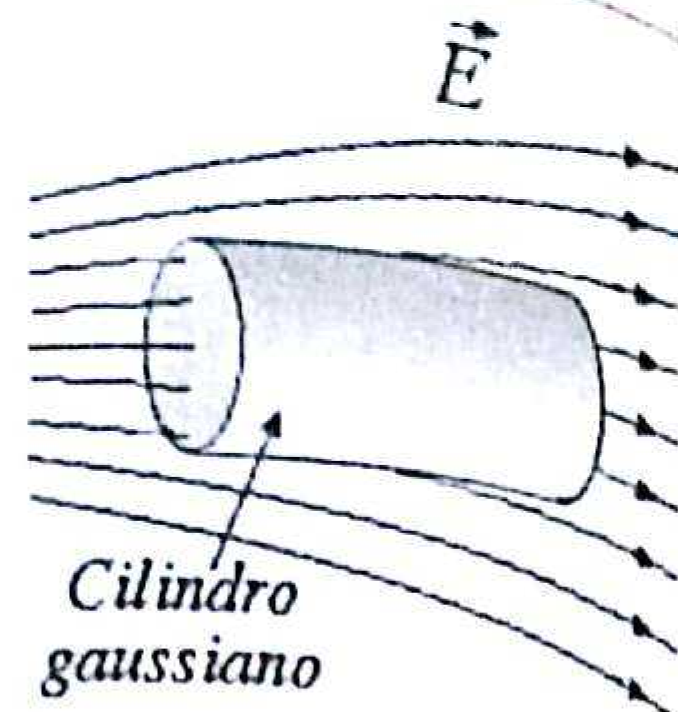
a) en S_1, b) en S_2, c) en S_3, d) en S_4, e) en S_2 y S_3.



PE-3.04. *Flujo de un campo eléctrico divergente*

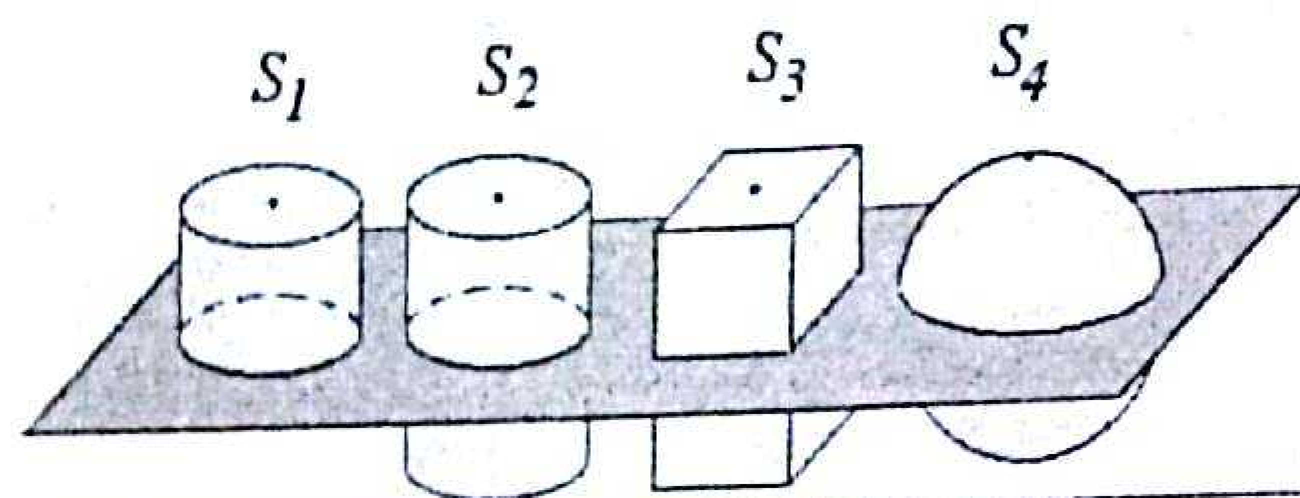
En una región donde existe un campo eléctrico *divergente* se dibuja una superficie gaussiana que tiene forma de un cilindro, como indica la figura. El flujo neto que atraviesa la superficie del cilindro será:

a) positivo, b) cero, c) negativo.



PE-3.05. *¿Cuál superficie gaussiana es apropiada?*

Para determinar el campo eléctrico en un punto exterior a una hoja de carga infinita y uniforme usando la ley de Gauss, se sugieren las cuatro superficies gaussianas mostradas que pasan por dicho punto:



¿Cuál o cuáles superficies son las apropiadas en este caso?

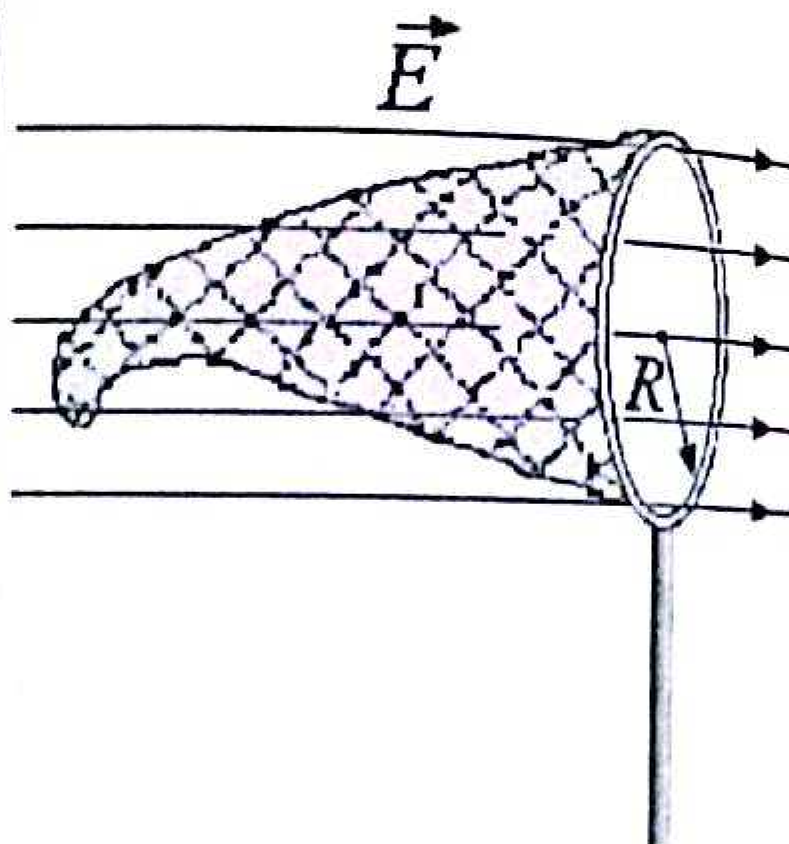
a) Solamente S_2
b) Solamente S_3
c) Solamente S_4
d) S_1, S_2 y S_3
e) S_2 y S_3

PE-3.06. *Flujo en una red de cazar mariposas*

Una red de cazar mariposas está en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$. El aro es una circunferencia de radio R que está perpendicular al campo. El flujo a través de la superficie externa de la red es:

a) $+2\pi R^2 E$, b) $+\pi R^2 E$, c) $2\pi R^2 E$, d) $-\pi R^2 E$

e) Falta conocer la geometría exacta de la red.

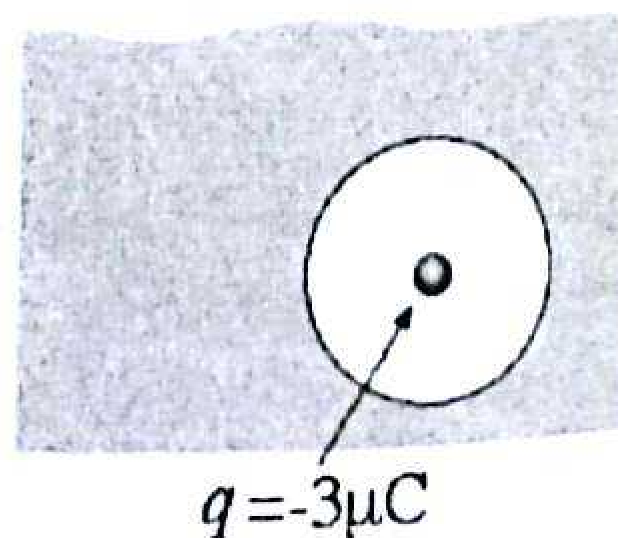


PE-3.07. *Una carga puntual en una cavidad metálica*

Un bloque metálico sólido con una cavidad esférica, tiene una carga neta de +5 μC. Si se coloca una carga puntual de -3 μC en el centro de la cavidad, entonces sobre la superficie externa del metal de haber una carga:

a) cero, b) +2 μC, c) -3 μC, d) +8 μC,

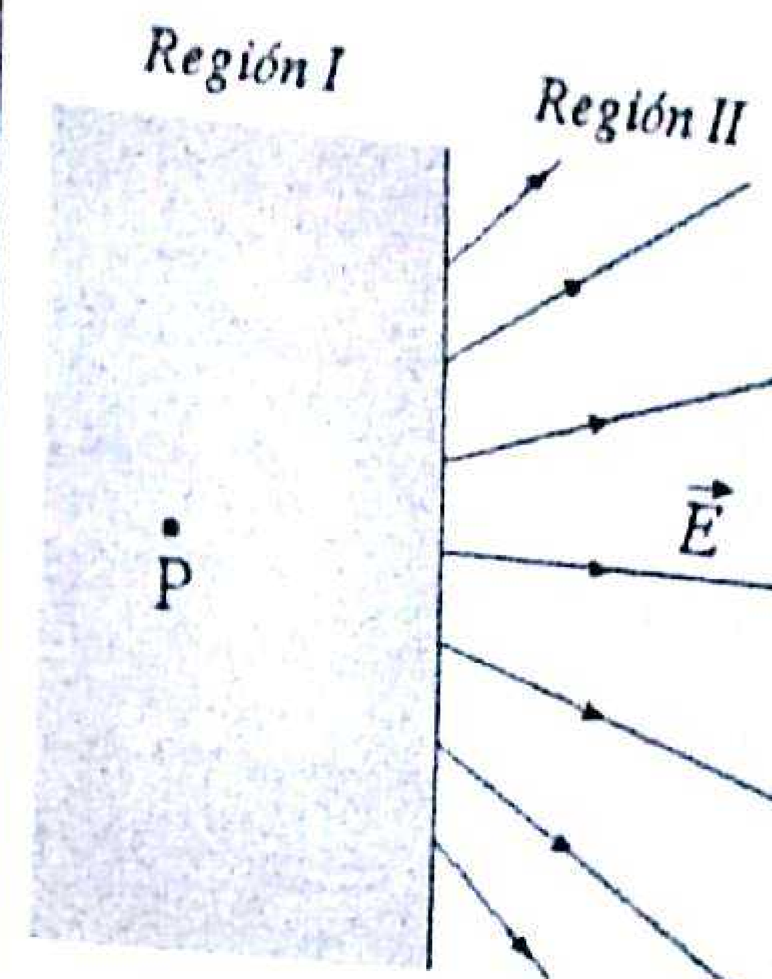
e) ninguna de éstas



PE-3.08. *¿Cuáles cargas generan este campo?*

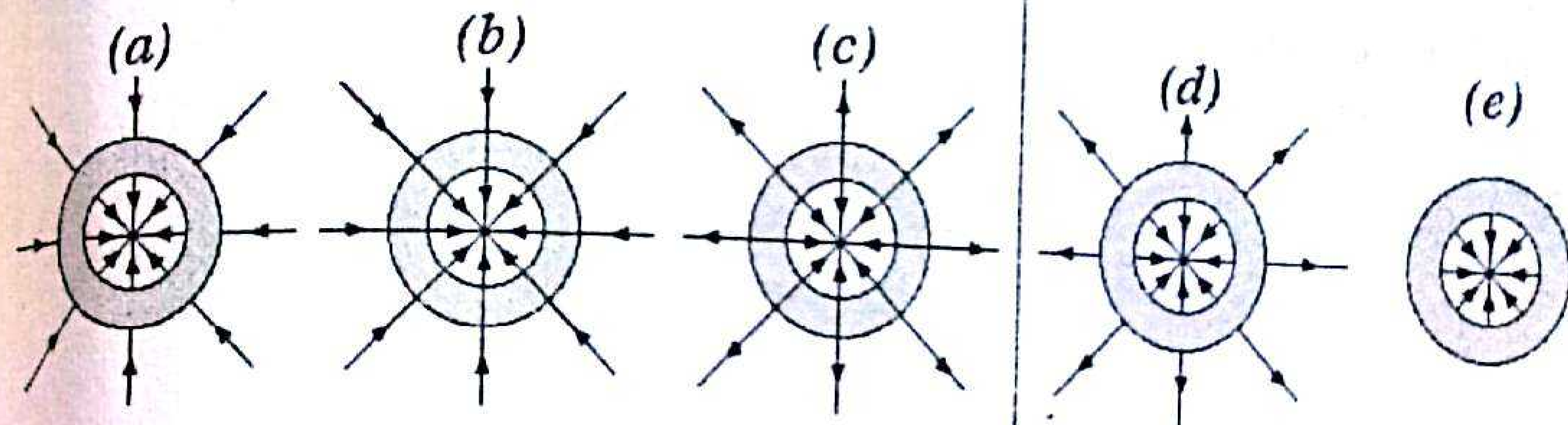
En la región *I* existe una distribución de cargas desconocida que genera el campo eléctrico que mostrado en la región *II*. Las líneas de campo divergen desde un punto *P* en la región *I*. ¿Cuál es esta posible distribución de carga?

a) Una carga puntual.
b) Un cascarón esférico uniforme.
c) Una esfera sólida uniforme.
d) Una nube con simetría esférica.
e) Cualquiera de las anteriores.



PE-3.09. *¿Cuál es el diagrama de líneas de campo?*

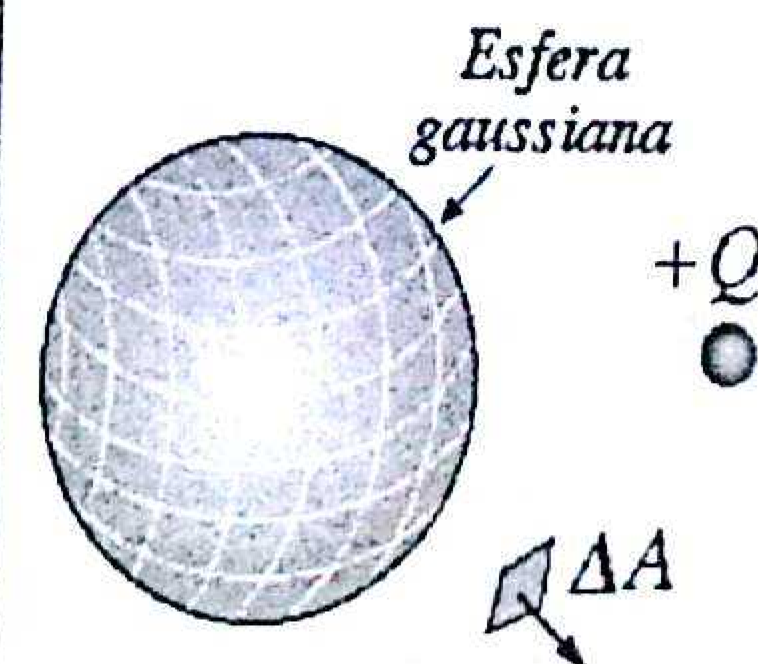
Una carga negativa se coloca en el centro de una esfera conductora hueca que estaba inicialmente sin carga neta. ¿Cuál diagrama representa mejor las líneas de campo eléctrico?



PE-3.10. *Esfera gaussiana dividida en regiones iguales*

Una carga puntual $+Q$ está localizada afuera de una superficie esférica. Se subdivide la superficie esférica en un cierto número de regiones de *igual área* ΔA. Podemos decir que el flujo de $\vec{E}$:

a) tendrá el mismo valor para todas las regiones.
b) varía de una región a otra pero nunca será negativo.
c) varía de una región a otra pero nunca será positivo.
d) será positivo para la mitad de las regiones y negativo para la otra mitad.
e) varía de una región a otra y puede tener valores positivos o negativos.



PE-3.11. *Para los metales se puede decir que........*

a) Todos los electrones de conducción están en la superficie.

b) Si su carga neta es cero, la densidad de carga en cualquier parte de su superficie debe ser cero.

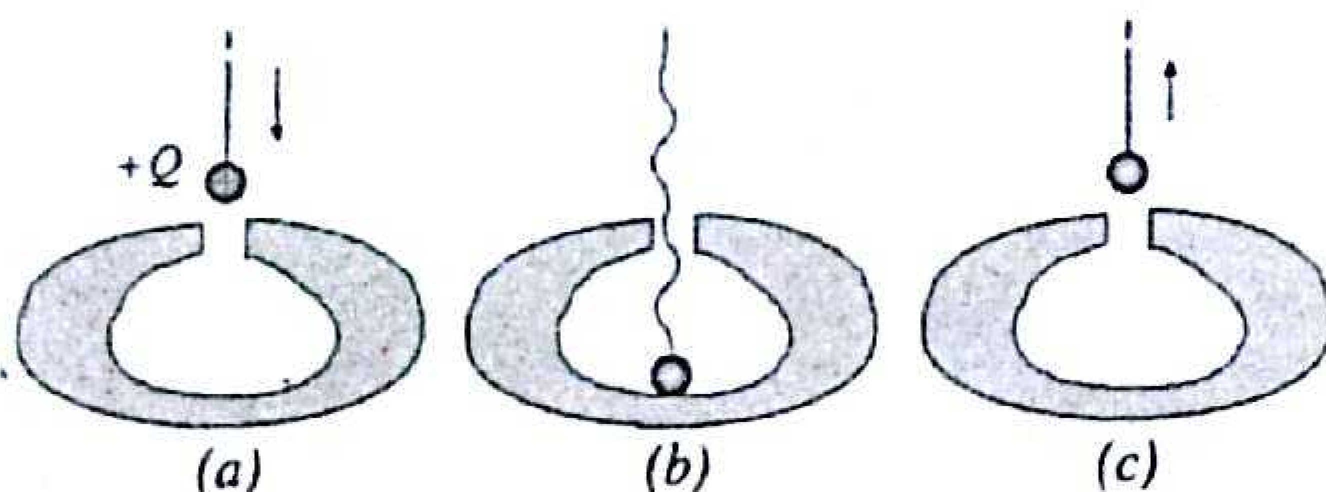
c) Cuando se le aplica un campo externo, el metal *lo detiene* y por lo tanto el campo interno es nulo.

d) Bajo un campo electrostático externo, los electrones se reordenan hasta crear un campo igual y opuesto al externo y así el campo interno resultante es cero.

e) Cualquier exceso de carga se distribuye de manera uniforme en toda su superficie.

PE-3.12. *El experimento del balde de hielo de Faraday*

Una esferita metálica con carga $+Q$ se suspende de un hilo de nylon (Fig. a), y se introduce en un recipiente metálico hueco descargado a través de un pequeño agujero, hasta que toque la superficie interna del metal (Fig. b).



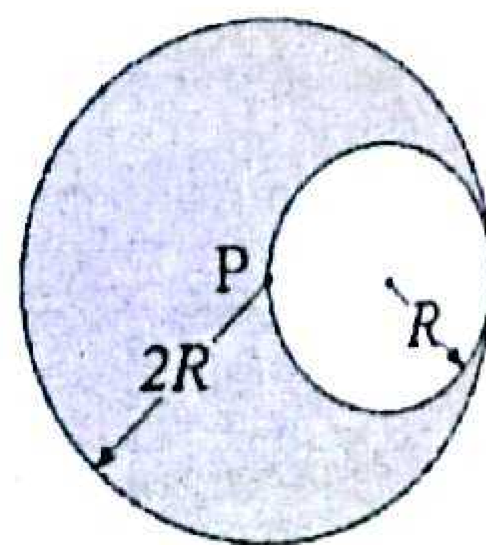
(a) (b) (c)

Después de retirar la esferita de la pared y sacarla del recipiente (Fig. c), la esferita quedará...

a) con carga $-Q$.
b) con carga $-Q/2$.
c) sin carga.
d) con carga $+Q$.
e) con carga $+Q/2$.

PE 3.13. *Campo en el centro de esfera con cavidad*

Una esfera aislante de radio $2R$ tiene una carga Q repartida uniformemente en todo su volumen. Si se le quita una porción esférica de radio R, como indica la figura ¿cuál será la magnitud del campo eléctrico en el punto P en el centro?

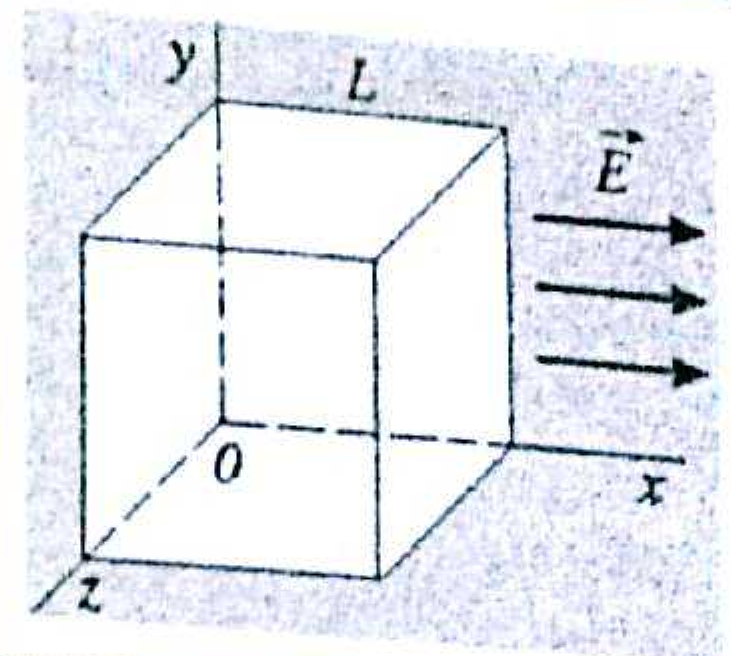


a) *cero*, b) $kQ/2R^2$ c) $kQ/4R^2$

d) $kQ/8R^2$ e) kQ/R^2

PE 3.14. *¿Cuánta carga hay dentro del cubo?*

En una región hay un campo eléctrico no uniforme, $\vec{E} = bx\hat{i}$, siendo b una constante. ¿Cuál será la carga encerrada por el cubo de lado L mostrado?

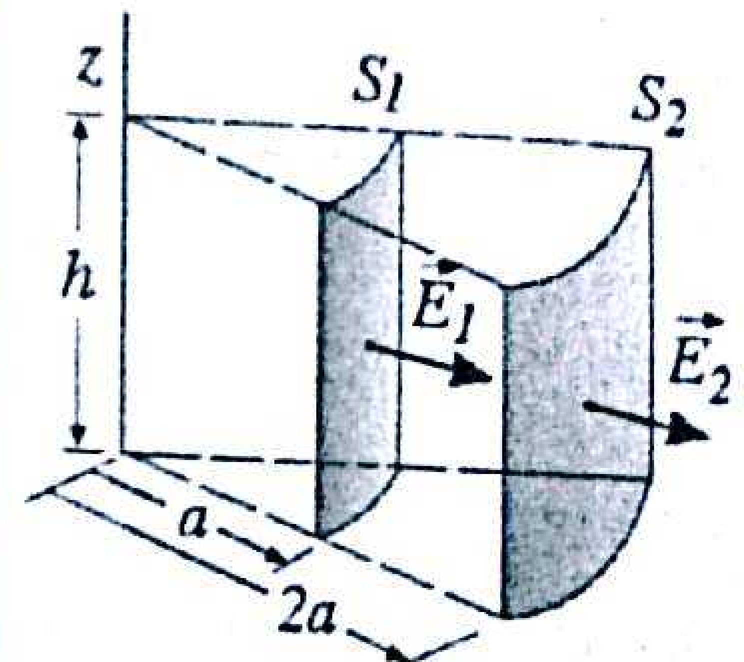


a) cero b) $\varepsilon_0 bL^3$ c) $\varepsilon_0 bL^3/6$

d) $\varepsilon_0 b^2L^2$ e) $\varepsilon_0 bL^2$

PE-3.15. *Relacione los campos eléctricos*

En una región hay un campo eléctrico radial que es perpendicular a al eje z, como se muestra en la figura. Si en los puntos de la superficie S_1 el campo tiene magnitud E_1 ¿Cuál será la magnitud del campo eléctrico E_2 en los puntos de la superficie S_2?

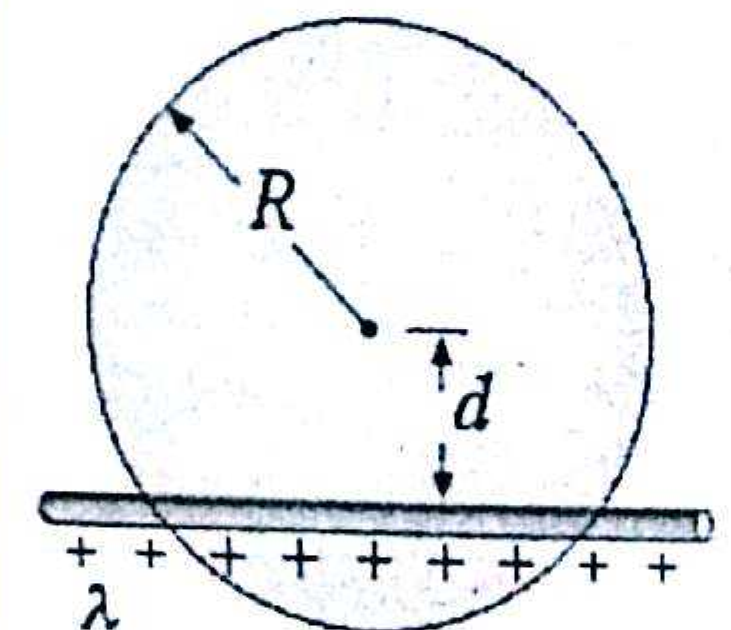


a) $E_2 = E_1$ b) $E_2 = E_1/2$ c) $E_2 = E_1/4$

d) $E_2 = E_1/\sqrt{2}$ e) $E_2 = 2E_1/\sqrt{2}$

PE-3.16. *Esfera atravesada por línea infinita*

Una línea de carga muy larga tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ. Considere una superficie esférica imaginaria de radio R cuyo centro está a una distancia $d < R$ perpendicular a la varilla. ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico a través de la superficie esférica?

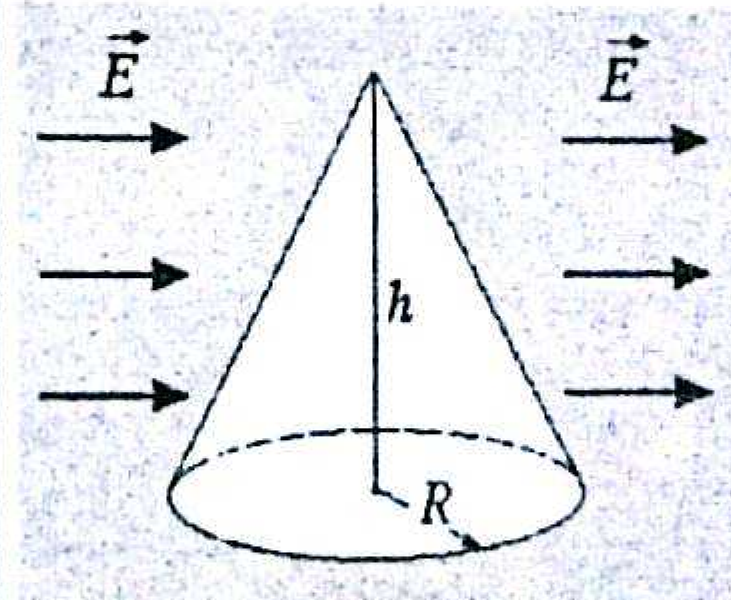


a) $\Phi = \dfrac{2\lambda\sqrt{R^2-d^2}}{\varepsilon_0}$ b) cero c) $\Phi = \dfrac{\lambda R}{\varepsilon_0}$

d) $\Phi = \dfrac{\lambda d}{2\varepsilon_0}$ e) $\Phi = \dfrac{\lambda d}{\varepsilon_0}$

PE-3.17. *Flujo a través de un cono*

Un cono de radio R en la base y altura h, está sobre un plano horizontal, y un campo eléctrico uniforme horizontal penetra el cono, como en la figura. ¿Cuál es el flujo eléctrico que entra al cono?

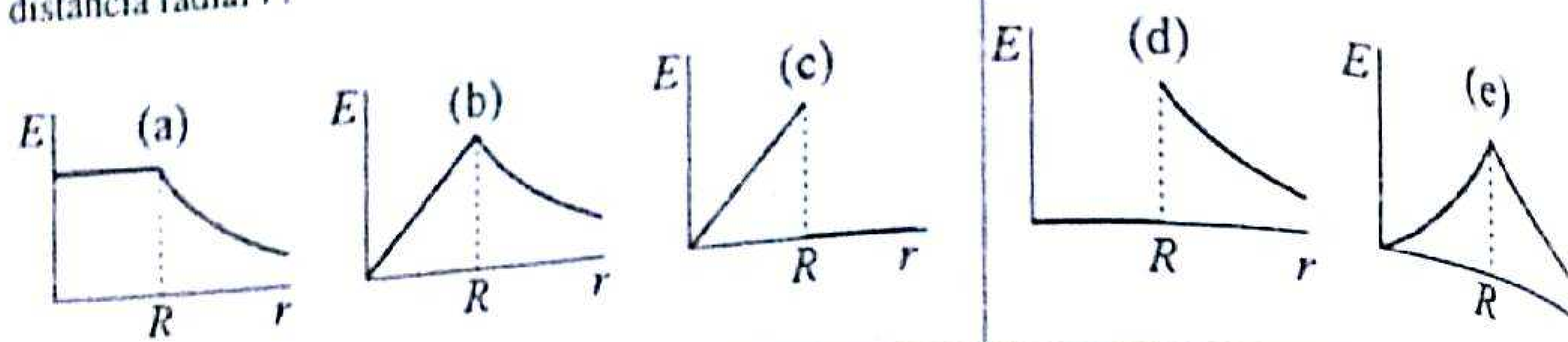


a) $\Phi = EhR$ b) $\Phi = 2EhR$ c) $\Phi = \sqrt{2}EhR$

d) $\Phi = 2\sqrt{2}EhR$ e) $\Phi = EhR/2$

PE-3.18. ***Gráfico de campo E de un cascarón esférico***

Un cascarón esférico de radio R tiene una carga uniforme repartida en su superficie. ¿Cuál de los gráficos mostrados representa la dependencia del campo eléctrico con la distancia radial r?



CAP. 3: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
3.01				✓	
3.03			✓		
3.05					✓
3.07		✓			
3.09	✓				
3.11				✓	
3.13				✓	
3.15		✓			
3.17	✓				

	a	b	c	d	e
3.02			✓		
3.04		✓			
3.06				✓	
3.08					✓
3.10					✓
3.12			✓		
3.14		✓			
3.16	✓				
3.18				✓	

Karl Friedrich Gauss

(1777 - 1855)



Gauss en un billete de 10 marcos alemanes (1989)

Nació en Brunswick (Alemania), niño prodigio de una modesta familia. Su precocidad para las matemáticas se pone de manifiesto en varias anécdotas y se decía en forma de broma que antes que pudiera hablar ya sabía contar. Cuando apenas tenía tres años corrigió un error en las cuentas de su padre. Cuando tenía 7 años, el maestro de aritmética pidió a la clase que hallara la suma de 1+2+3+.....+100, al revisar todos los cuadernos quedaba perplejo al ver que en el de Gauss había un sólo número (5050) y además era el único alumno que tenía la respuesta correcta. Al preguntar a Gauss cómo había llegado a esa respuesta, éste respondió, "fui agrupando por pares los números, partiendo desde los extremos: (1+100), (2+99) hasta llegar a (50+51), obtengo así 50 veces el número 101, es decir 5050". El talento excepcional de Gauss fue prontamente reconocido y en 1792 el Duke de Brunswick le proporcionó ayuda financiera para que continuara su educación, ingresando a los 14 años al Collegium Carolinum de Brunswick y en 1795 a la Universidad de Goettingen. Mientras fue estudiante allí hizo numerosas contribuciones, entre otras, el método de los mínimos cuadrados y la solución de un problema que tenía cerca de 2000 años de antigüedad al construir con una regla y un compás un polígono regular de 17 lados. En su disertación de PhD dio la primera prueba del teorema fundamental del álgebra. En 1801 a la edad de 24 años publicó sus Disquisitiones Arithmeticae su teoría de los números, uno de los mas brillantes logros en la historia de la matemática. Gauss enfocó sus esfuerzos a una variedad de problemas, desde la teoría de los números, pasando por la geometría abstracta hasta los cálculos astronómicos. Gauss siempre tuvo por norma no dar a conocer ningún trabajo sino hasta llevarlo a la máxima perfección, por ello muchos de sus descubrimientos fueron encontrados en sus papeles después de su muerte, tal es el caso del llamado teorema de Cauchy en el análisis de variable compleja. Aunque su mayores logros fueron en el campo de la matemática, Gauss exploró varias áreas de la física: electromagnetismo, mecánica, acústica y óptica. Estableció la ley que lleva su nombre sobre el flujo del campo eléctrico que también se aplica a otros campos vectoriales como los magnéticos y gravitacionales. Desde 1807 hasta su muerte ocupó la dirección del observatorio de Goettingen. Gauss se interesaba tanto en lo puramente teórico como en cuestiones prácticas. Durante este tiempo, junto con Wilhelm Weber construyó el primer magnetómetro. Hizo estudios acerca del magnetismo terrestre, y la medición del tamaño y forma de la Tierra y organizó una red de observadores por toda Europa para medir las variaciones del campo magnético terrestre. En 1833 inventó el primer telégrafo eléctrico con el cual se podían establecer comunicaciones hasta 8 km de distancia. Los impulsos eléctricos transmitidos producían una secuencia de cinco deflexiones de una aguja, a la izquierda o hacia la derecha, (dando un total de 32 posibilidades). Esto ocurría siete años antes de que Samuel Morse patentara su telégrafo.

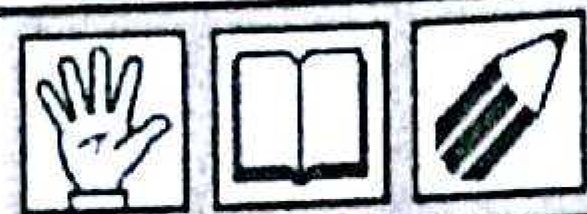
4

EL POTENCIAL ELÉCTRICO

Lo mismo que sucede con la fuerza gravitatoria entre dos masas, la fuerza eléctrica entre dos cargas es conservativa, propiedad ésta que se relaciona con el hecho de que el trabajo de las fuerzas del campo eléctrico, al desplazar una carga no depende de la forma de la trayectoria sino que se determina por los puntos inicial y final. Por lo tanto, como característica energética del campo eléctrico se le puede asociar una energía potencial y una energía potencial por unidad de carga que llamamos potencial eléctrico. Mientras la energía potencial es una propiedad de un sistema de cargas, el potencial es una propiedad de un punto en el espacio que depende solamente de las cargas fuentes. Este enfoque nos permite pasar del lenguaje vectorial de campo eléctrico a un lenguaje escalar del potencial eléctrico, y así disponemos de una manera mas sencilla de analizar los problemas en electrostática y resolverlos con mayor facilidad mediante la aplicación de la conservación de la energía, que si se utilizaran directamente las fuerzas eléctricas. El concepto de potencial en electricidad tiene además un interés de carácter práctico ya que rara vez se miden directamente campos eléctricos; usualmente lo que se mide son diferencias de potencial (en voltios), por lo que frecuentemente se les llama voltajes; y a partir del cual se pueden determinar los campos eléctricos.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

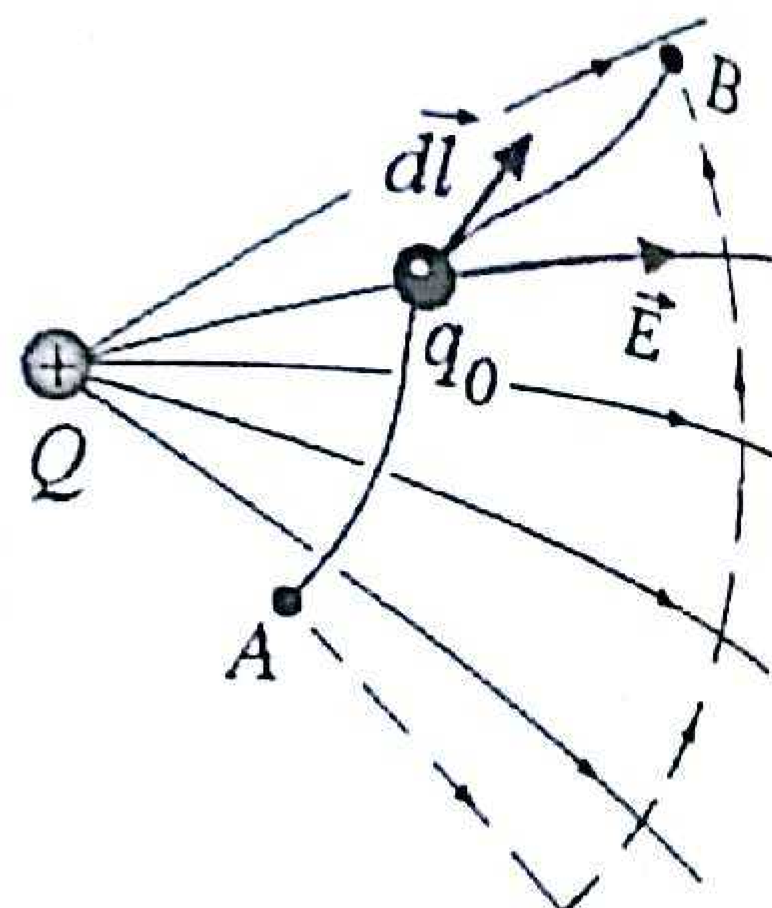
- Energía potencial eléctrica.
- Diferencia de potencial eléctrica.
- Potencial eléctrico en un campo uniforme.
- Potencial eléctrico debido a cargas puntuales.
- Potencial eléctrico debido a distribuciones de cargas.
- Cálculo del campo a partir del potencial eléctrico.
- Potencial eléctrico en conductores.



ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Consideremos una carga de prueba q_o en un punto donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$. El trabajo dW hecho por la fuerza eléctrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ en un desplazamiento $d\vec{l}$ es:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{l} = q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$



El trabajo hecho por una fuerza conservativa se puede representar por una *pérdida* de energía potencial:

$$dU = -dW = -q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Si la carga de prueba se desplaza desde la posición inicial A hasta una posición final, B, la variación total en la energía potencial es:

$$U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Variación en la energía potencial electrostática

$$\Delta U_{A \to B} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Por ser $\vec{E}$ un campo conservativo, la integral de $\vec{E} \bullet d\vec{l}$ es independiente de la trayectoria entre los puntos A y B. En el caso del campo producido por un carga puntual, si se sigue el camino punteado indicado en la figura, constituido por un tramo recto y un arco circular, la integral es nula en el tramo circular donde $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{l}$. La integración el tramo recto donde $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{l}$ dependerá de las distancias radiales.

DIFERENCIA DE POTENCIAL

La variación de la energía potencial es proporcional al valor de la carga testigo, q_0. Para eliminar esta dependencia con q_0, se define la diferencia de potencial entre dos puntos A y B como la variación de la energía potencial por unidad de carga.

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Diferencia de potencial entre A y B

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

POTENCIAL ELÉCTRICO

Se puede escoger arbitrariamente un punto de referencia y especificar simplemente el potencial eléctrico absoluto. Con frecuencia se elige el potencial cero en un punto infinitamente alejado de las cargas que generan el campo, $V_\infty = 0$. Con esta elección podemos definir el potencial eléctrico en un punto P como el trabajo requerido por unidad de carga para llevar una carga de prueba desde el infinito hasta ese punto.

Potencial eléctrico en P ($V_\infty = 0$)

$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

UNIDAD SI DE POTENCIAL ELÉCTRICO

La unidad *SI* de potencial y de diferencia de potencial es el Joule/Coulomb y se denomina Voltio (V). Por esta razón, se acostumbra llamar *voltaje* a la diferencia de potencial.

Unidad de potencial eléctrico

1 voltio
1 V = 1 J/C

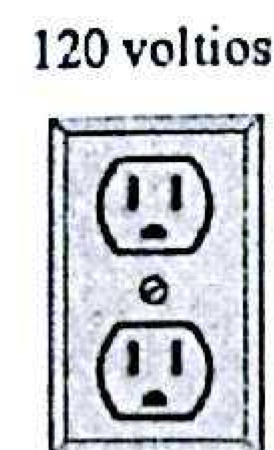
Voltajes típicos

12 voltios

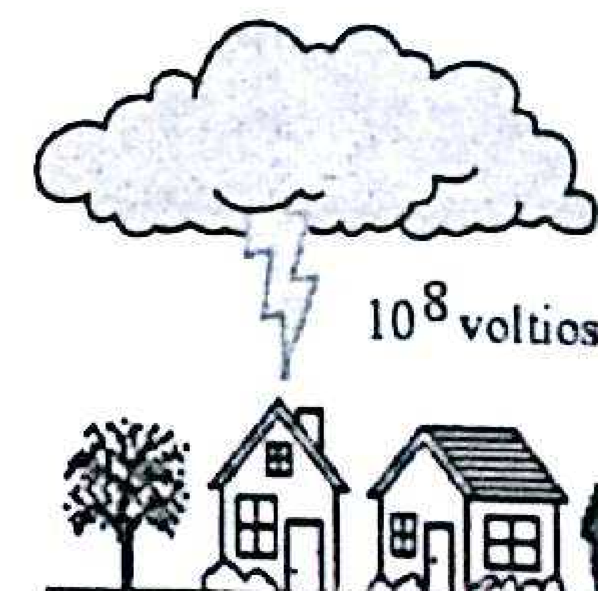


Batería

120 voltios



Tomacorrientes



Nube cargada y suelo

Unidad de campo eléctrico

1 voltio/metro
1 V/m = 1 N/C

MOVIMIENTO DE CARGAS

Si una partícula con carga Q se mueve a través de una diferencia de potencial V_{AB}, su energía potencial cambia en:

$$\Delta U = U_B - U_A = QV_{AB}$$

Aplicando la conservación de la energía ($\Delta K + \Delta U = 0$) podemos expresar la variación de energía cinética ΔK en términos de la diferencia de potencial:

$$\Delta K = -\Delta U = -QV_{AB}$$

El signo de ΔK dependerá de los signos de Q y de V_{AB}. Por ejemplo, si Q es positiva y se mueve en un potencial decreciente ($V_{AB} < 0$), la partícula ganará energía cinética.

Variación de energía potencial
↓
$U_B - U_A = QV_{AB}$
↑
Diferencia de potencial

EL ELECTRÓN-VOLTIO: UNIDAD DE ENERGÍA

En los trabajos a nivel de física atómica o molecular, la unidad SI de energía (el Joule) resulta demasiado grande y en su lugar se utiliza una unidad mas pequeña denominada el electrón-voltio (eV).

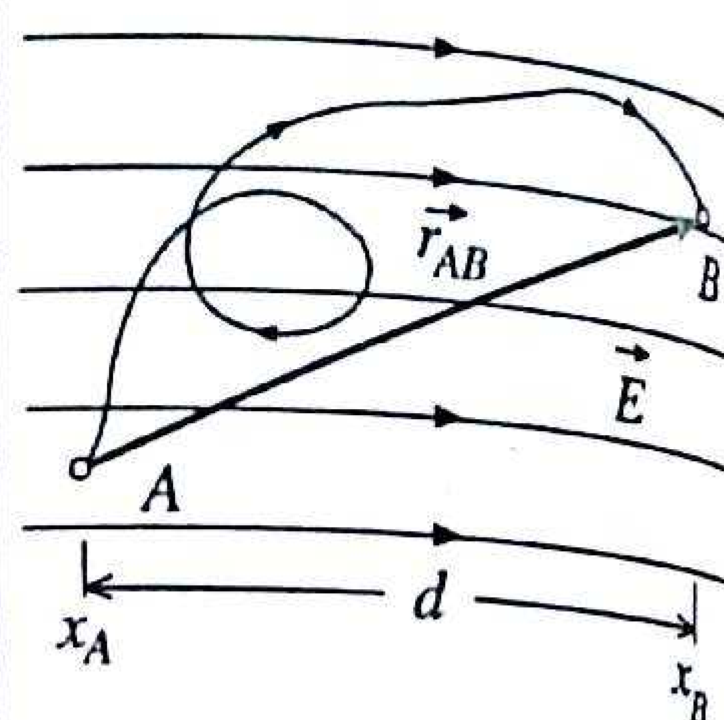
Un electrón-voltio es la energía que adquiere (o pierde) un electrón al moverse a través de una diferencia de potencial de un voltio.

Un electrón-voltio, 1eV = (1,6x10^{-19}C)(1V) = 1,6x10^{-19}J

POTENCIAL EN UN CAMPO UNIFORME

Supongamos un campo eléctrico uniforme ($\vec{E}$=constante) y calculamos la diferencia de potencial entre dos puntos A y B siguiendo un camino arbitrario:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\vec{E} \bullet \int_A^B d\vec{l} = -\vec{E} \bullet \vec{r}_{AB}$$



Donde $\vec{r}_{AB}$ es el vector desplazamiento que resulta de sumar todos los desplazamientos infinitesimales, desde A hasta B.

Si $\vec{E}$ está en la dirección $\hat{x}$, al efectuar el producto escalar, la expresión anterior queda:

$$V_B - V_A = -E(x_B - x_A) = -Ed$$

Es decir, la diferencia de potencial es proporcional al módulo de la componente del desplazamiento d, paralela a las líneas de campo eléctrico.

Diferencia de Potencial en un campo uniforme

$$V_B - V_A = -Ed$$

V decrece linealmente en la dirección de $\vec{E}$

POTENCIAL DE UNA CARGA PUNTUAL

Recordemos que una carga puntual produce un campo eléctrico radial:

$$\vec{E}(r) = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

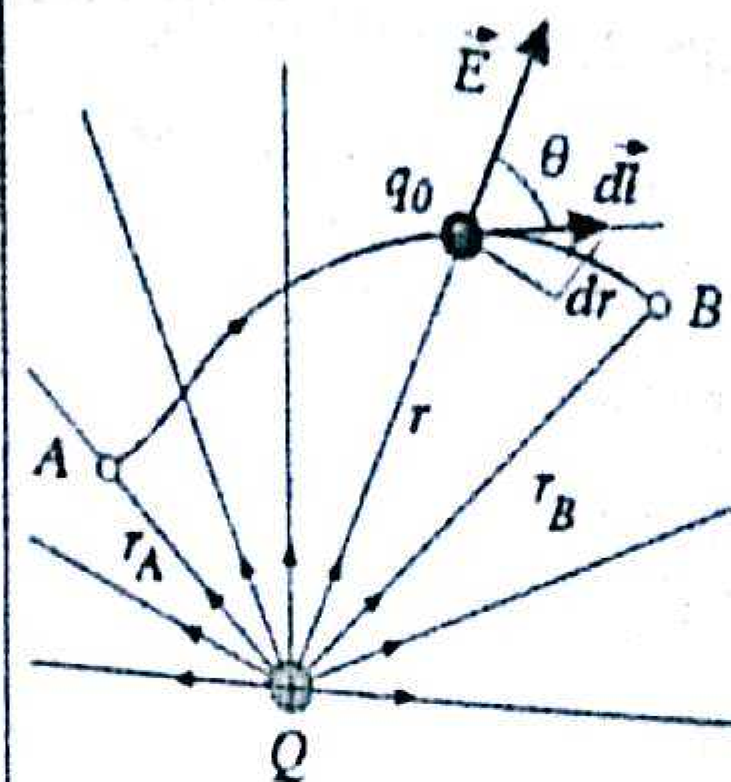
Para hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, A y B, podemos considerar un punto arbitrario ubicado por el vector posición $\vec{r}$ respecto a la fuente y evaluar la integral:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = -kQ\int_A^B \frac{\hat{r} \bullet d\vec{r}}{r^2}$$

El producto escalar: $\hat{r} \bullet d\vec{r} = \hat{r} \bullet \hat{r}dr = dr$, es justamente la proyección dr, del vector desplazamiento en la dirección radial. Por lo tanto:

$$V_B - V_A = -kQ\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -kQ(-\frac{1}{r})\Big|_{r_A}^{r_B} = kQ(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$$

La diferencia de potencial entre dos puntos A y B no depende de la trayectoria seguida sino únicamente de las coordenadas radiales de los puntos inicial y final, r_A y r_B. Esta es una propiedad de los campos *conservativos*.



Diferencia de potencial en el campo de carga puntual

$$V_B - V_A = kQ(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$$

Para calcular el potencial en un punto dado, podemos escoger un punto de referencia. En el caso de una carga puntual, podemos asignar un potencial nulo a una distancia infinita de la carga puntual ($V = 0$ en $r_B = \infty$). El potencial en el punto A a una distancia finita, r_A, será:

$$V_A = k\frac{Q}{r_A}$$

Potencial debido a una carga puntual ($V_\infty = 0$)

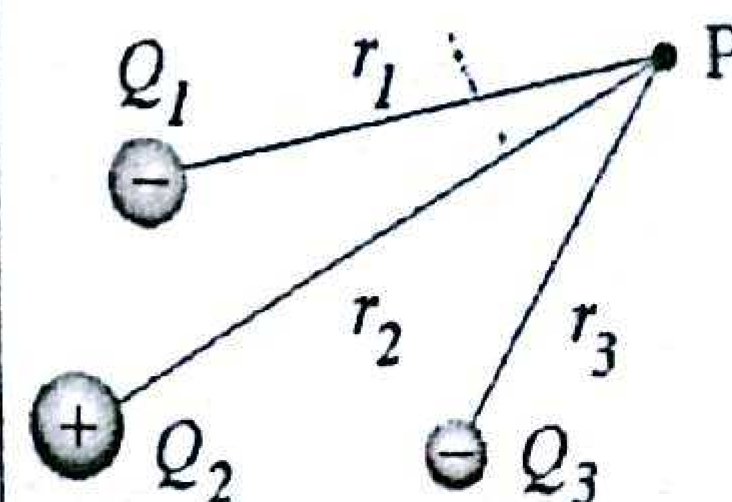
$$V_r = k\frac{Q}{r}$$

POTENCIAL DE CARGAS DISCRETAS

El potencial eléctrico debido a un grupo de N cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga individual (principio de superposición):

$$V = \sum_i^N V_i = k\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}$$

En esta suma deben tomar en cuenta los signos. El potencial para cada carga positiva ($V = kQ/r$) es positivo, mientras que el potencial para cada carga negativa es negativo.



Potencial debido a cargas discretas

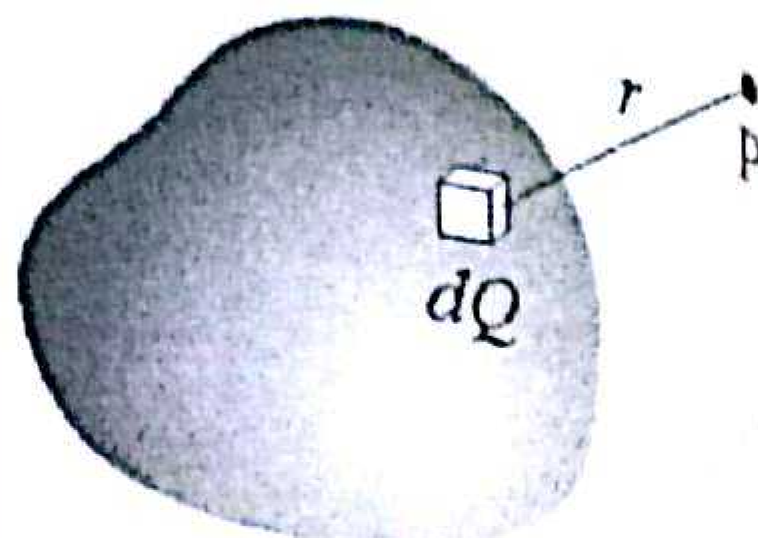
$$V = k\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}$$

POTENCIAL DE DISTRIBUCIÓN CONTINUA

Para hallar el potencial debido a una distribución continua de cargas, se divide esta en elementos suficientemente pequeños como para que se les considere como cargas puntuales. El potencial en el punto P debido a un elemento infinitesimal dQ, a distancia r, será $dV = k\, dQ/r$. Sumando los aportes de todos los elementos, se obtiene el potencial total:

$$V = k\int \frac{dQ}{r}$$

Es importante advertir que en esta expresión el potencial se ha tomado respecto al valor cero en el infinito y es aplicable únicamente *a distribuciones finitas de cargas.*



Potencial de distribución continua

$$V = k\int \frac{dQ}{r}$$

Para realizar la integración resulta conveniente expresar el elemento de carga, dQ, en términos de las correspondientes funciones densidad de carga, $\lambda(r)$, $\sigma(r)$ o $\rho(r)$, según sea el caso.

$dQ = \lambda(r)dr$ *(carga lineal)*

$dQ = \sigma(r)dA$ *(carga superficial)*

$dQ = \rho(r)dV$ *(carga volumétrica)*

DOS MÉTODOS PARA HALLAR EL POTENCIAL

1. Si se conoce el campo eléctrico se puede emplear directamente la expresión de la integral de línea para calcular la *diferencia de potencial* entre dos puntos. Uno de los puntos puede ser asignado como referencia para el potencial.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

2. Si no se conoce $\vec{E}$ y si la distribución de carga no se extiende al infinito, se usa la expresión escalar para calcular el potencial, y está implícito que el potencial es cero en el infinito.

$$V = k\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i} \qquad V = k\int \frac{dQ}{r}$$

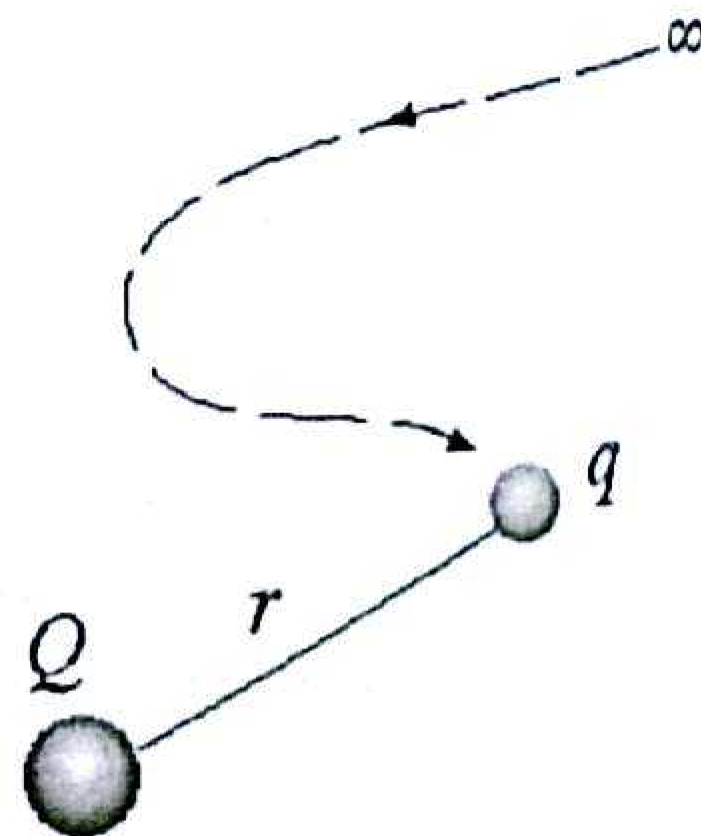
$$(V_\infty = 0)$$

ENERGÍA POTENCIAL DE GRUPOS DE CARGAS

Una carga puntual Q aislada produce un potencial a distancia r:

$$V = k\frac{Q}{r}$$

Para traer una segunda carga puntual q desde el infinito hasta la vecindad de Q a distancia r, es necesario que un agente externo realice un trabajo:



$$U = qV = k\frac{qQ}{r}$$

Esta ecuación expresa la energía potencial de una de las cargas en el campo eléctrico de la otra.

Si Q y q tienen igual signo la energía potencial es *positiva*. Esto significa que el agente externo realizó trabajo para reducir su separación desde el infinito en contra de la fuerza eléctrica repulsiva.

Si Q y q tienen signos opuestos la energía es *negativa*. Esto significa que se realiza trabajo sobre el agente externo ya que la fuerza eléctrica es atractiva.

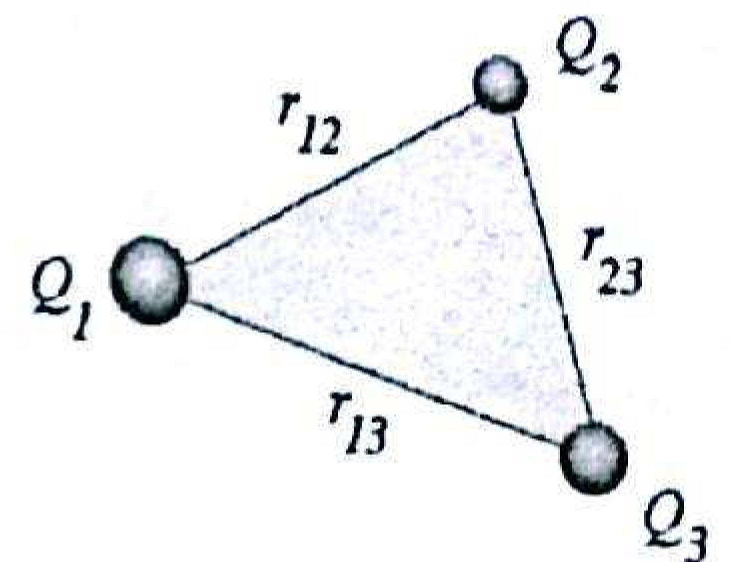
Energía de dos cargas q y Q separadas por distancia r.

$$U = k\frac{qQ}{r}$$

En el caso de un sistema constituido por varias cargas la energía potencial electrostática total es la suma algebraica de términos, sin importar el orden en que se ensambla el sistema. En este caso conviene etiquetar los términos por pares de cargas i y j:

$$U_{ij} = k\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}$$

Cuando sumamos todos los pares de cargas, hay que tener en cuenta que $U_{ij} = U_{ji}$. Por lo tanto, debemos poner en la suma la desigualdad $i < j$ para evitar el conteo de pares más de una vez.

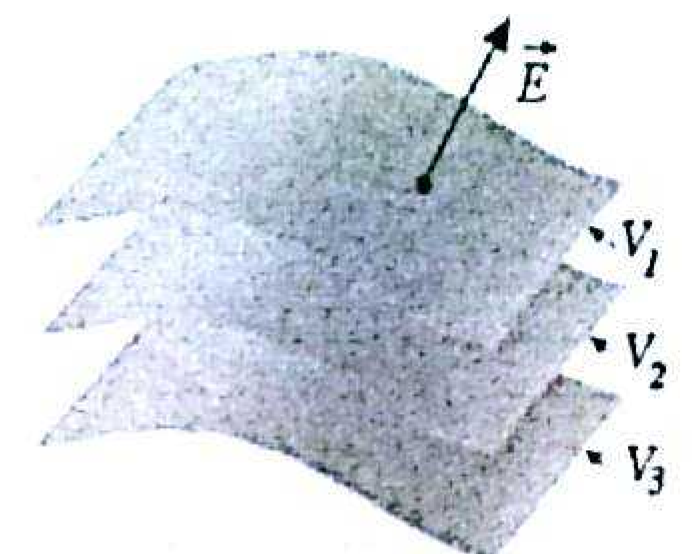


Energía de un sistema de cargas

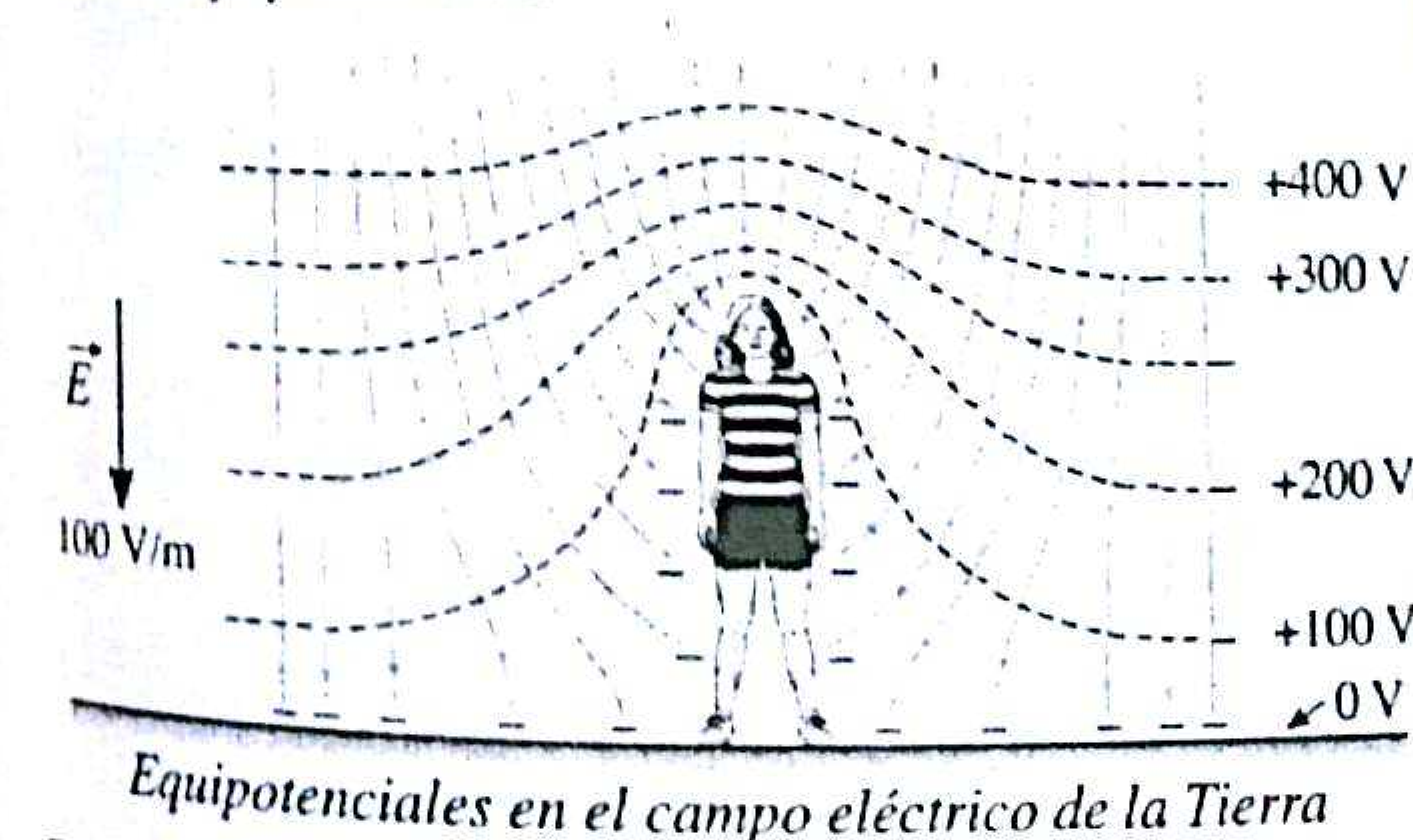
$$U = k\sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

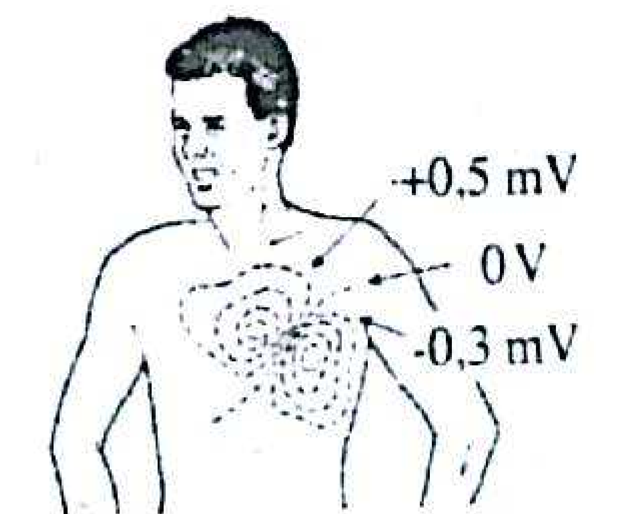
El potencial electrostático $V(r)$ es solamente una función de las coordenadas de posición, y las regiones, en las que el potencial eléctrico tiene valores constantes, se llaman equipotenciales. En tres dimensiones estos lugares son las *superficies equipotenciales*. En dos dimensiones son las *líneas equipotenciales*.



Superficies equipotenciales



Equipotenciales en el campo eléctrico de la Tierra

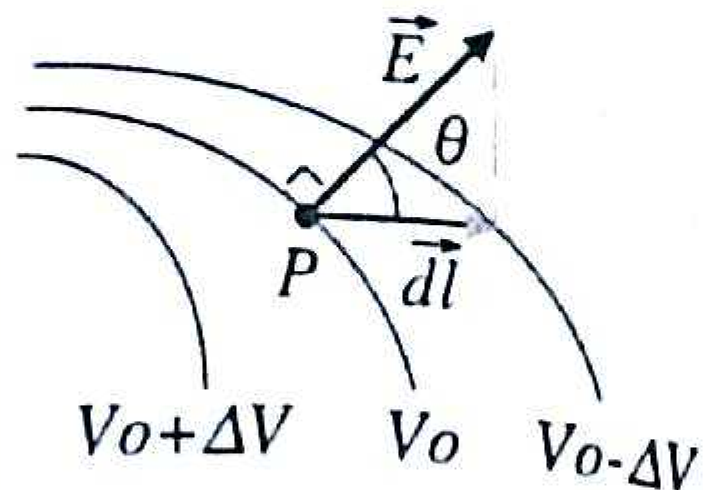


Equipotenciales alrededor del corazón humano

Para mover una partícula sobre una equipotencial, no se realiza trabajo por lo tanto, las líneas de campo eléctrico son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales y apuntan en la dirección de mayor a menor potencial eléctrico.

CÁLCULO DE $\vec{E}$ A PARTIR DE V

Sabemos como calcular potenciales a partir de campos eléctricos. Recíprocamente es posible también, determinar el vector $\bar{E}$ si se conoce la función potencial escalar $V(r)$. En efecto, la diferencia de potencial entre dos puntos separados por un desplazamiento infinitesimal $d\bar{l}$ es:



$$dV = -\bar{E} \bullet d\bar{l} = -E\cos\theta dl$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\bar{E}$ y $d\bar{l}$. Por lo tanto:

$$E\cos\theta = E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

El negativo de la derivada del potencial es la componente del campo en esa dirección.

La dirección para la cual la derivada presenta su máximo valor en el punto P, es claramente la dirección de $\bar{E}$, o sea la dirección de la normal a la superficie equipotencial:

$$|\bar{E}| = \left.\frac{dV}{dl}\right|_{max}$$

El campo $\bar{E}$ apunta en la dirección más corta entre dos equipotenciales.

Componentes de $\bar{E}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

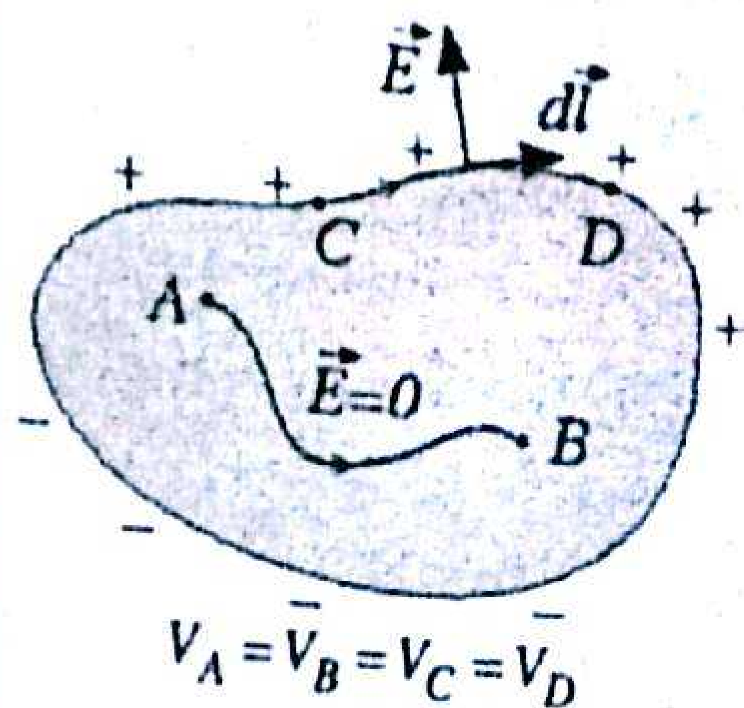
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

CONDUCTORES Y POTENCIAL ELÉCTRICO

Sabemos que, en una situación estática, el campo eléctrico en un conductor es cero. Si consideramos una trayectoria que conecte dos puntos A y B en el interior del conductor, la integral de $\bar{E} \bullet d\bar{l}$ es cero y la diferencia de potencial entre esos puntos será cero.

De la misma manera, si consideramos una trayectoria entre dos puntos C→D, a lo largo de su superficie, el vector $\bar{E}$ es perpendicular a la superficie y el producto escalar $\bar{E} \bullet d\bar{l}$ es cero. Por lo tanto, la integral de $\bar{E} \bullet d\bar{l}$ también será cero y el potencial V será constante en toda la superficie.



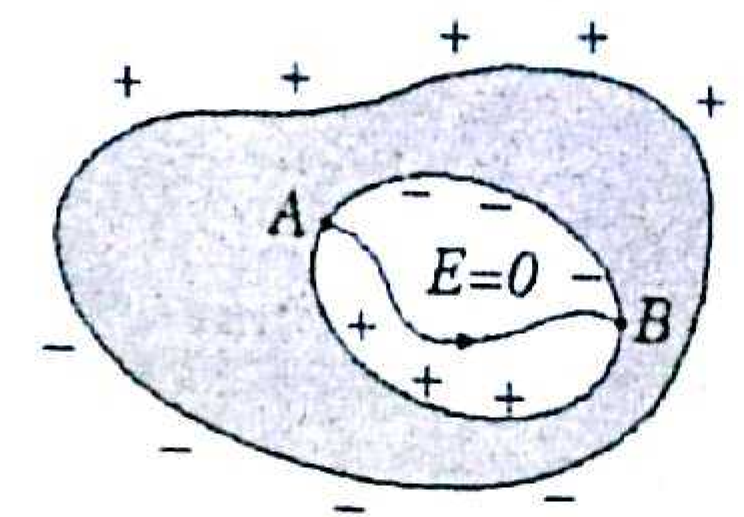
El potencial es constante en todo los puntos de un conductor

El potencial eléctrico de todos los puntos de un conductor homogéneo, incluyendo los puntos de su superficie es constante.

El conductor podría tener una carga neta o podría estar ubicado en un campo eléctrico externo.

BLINDAJE ELECTROSTÁTICO

El hecho de que un conductor es un cuerpo equipotencial permite demostrar que si el conductor tiene una cavidad vacía, el campo allí también debe ser cero. En efecto, si el campo no fuera cero, sería posible hallar una ruta entre A y B en la cavidad que vaya a lo largo de la dirección de $\bar{E}$, y para la cual $\bar{E} \bullet d\bar{l}$ será siempre un número positivo y así la integral también debería ser positiva. Pero como sabemos que $V_B = V_A$, entonces la integral debe ser cero. Se concluye entonces que $\bar{E} = 0$ dentro de la cavidad, en tanto no existan cargas en su interior.

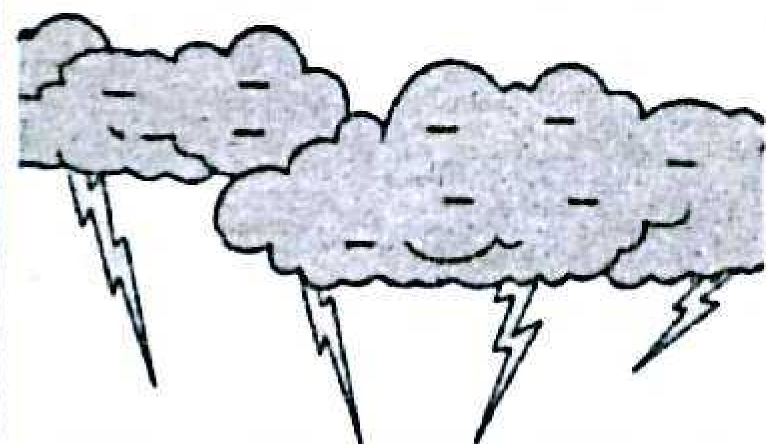


El campo es cero en una cavidad vacía de un conductor

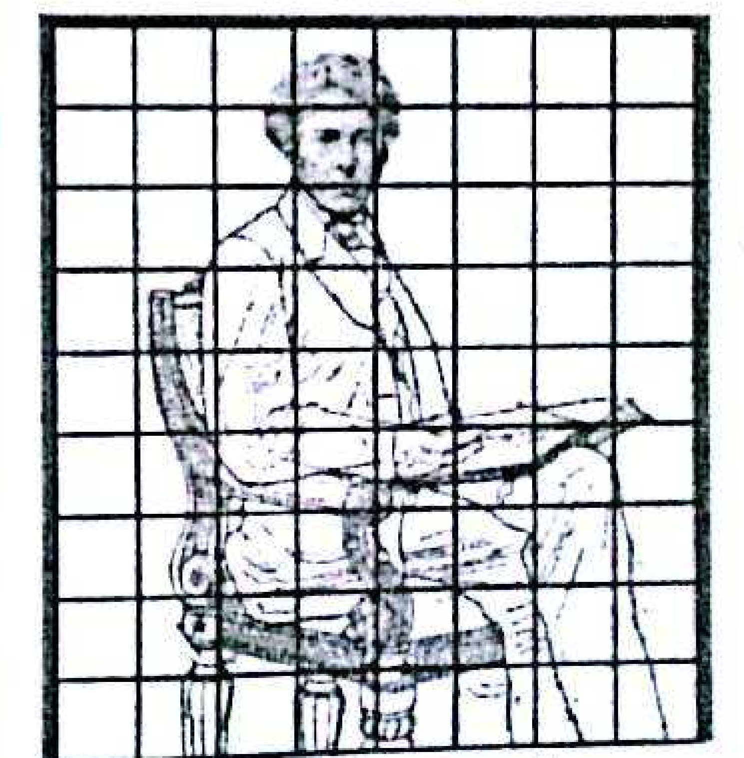
LA JAULA DE FARADAY

El resultado anterior tiene aplicaciones prácticas muy interesantes:

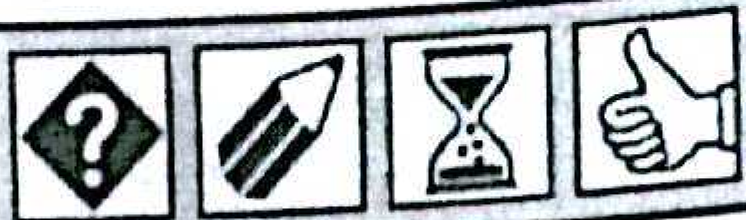
Es posible proteger un sistema, de los efectos de campos eléctricos externos, rodeándolo con paredes conductoras.



Fue Michael Faraday quien se arriesgó a demostrar por vez primera el poder de blindaje electrostático, colocándose en el interior de una jaula metálica, sosteniendo en sus manos un electroscopio. Cuando su ayudante procedió a electrizar la jaula con un elevado voltaje, Faraday no sufrió ni tampoco percibió efecto alguno sobre las hojas del electroscopio, a pesar de que la superficie de la jaula metálica protectora no era continua.



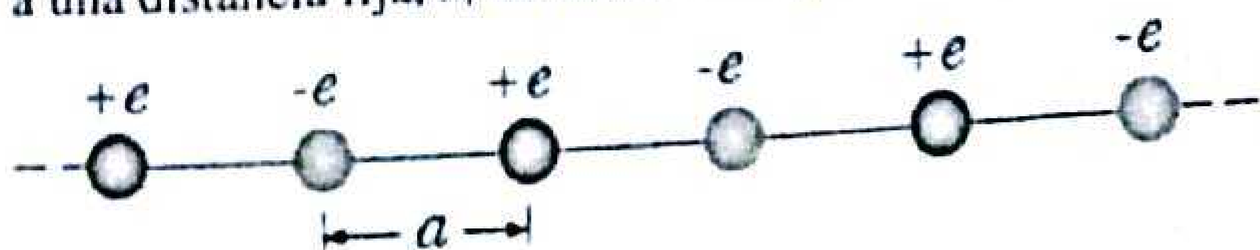
La Jaula de Faraday



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-4.01. *Potencial eléctrico en una cadena de iones*

Un análogo uni-dimensional de un cristal iónico (como el NaCl) consiste de una fila de un número muy grande de cargas de igual magnitud e y signos alternantes, separadas a una distancia fija, a, de sus dos cargas contiguas.



a) Determine el potencial eléctrico en el lugar de una carga que está muy distante de los extremos.
b) Calcule la energía potencial coulombiana.

Solución: a) El potencial en el sitio de un ión $+e$ es la suma de los potenciales debido a los N iones a cada lado:

$$V = 2\left(-\frac{ke}{a}+\frac{ke}{2a}+\frac{ke}{3a}+...\right) = 2\frac{ke}{a}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...\right)$$

Para N suficientemente grande, la suma:

$$s = \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}.....\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\ln(1+x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}....$$

es justamente el desarrollo en serie de la función $\ln(1+x)$ para $x=1$. Por lo tanto, el potencial es:

$$V = -\frac{ke}{a}2\ln 2$$

b) La energía potencial se obtiene multiplicando el potencial por el valor de la carga:

$$U = eV = -\frac{ke^2}{a}2\ln 2$$

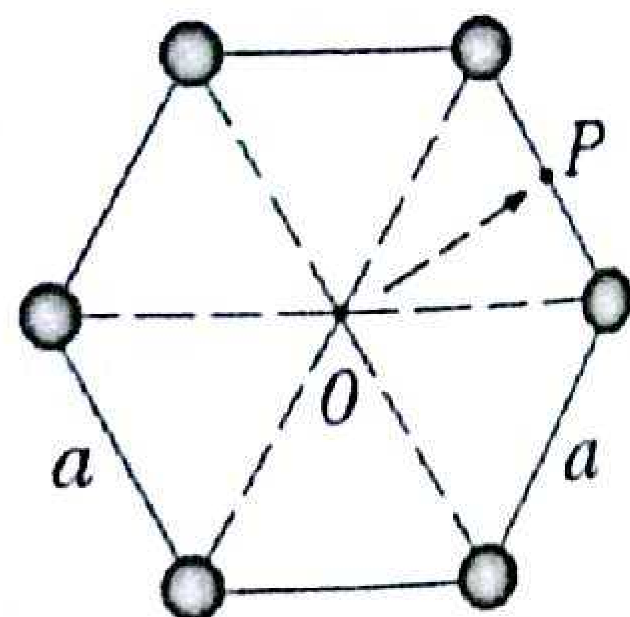
Respuesta:

a) $V = -\dfrac{ke}{a}2\ln 2$

b) $U = -\dfrac{ke^2}{a}2\ln 2$

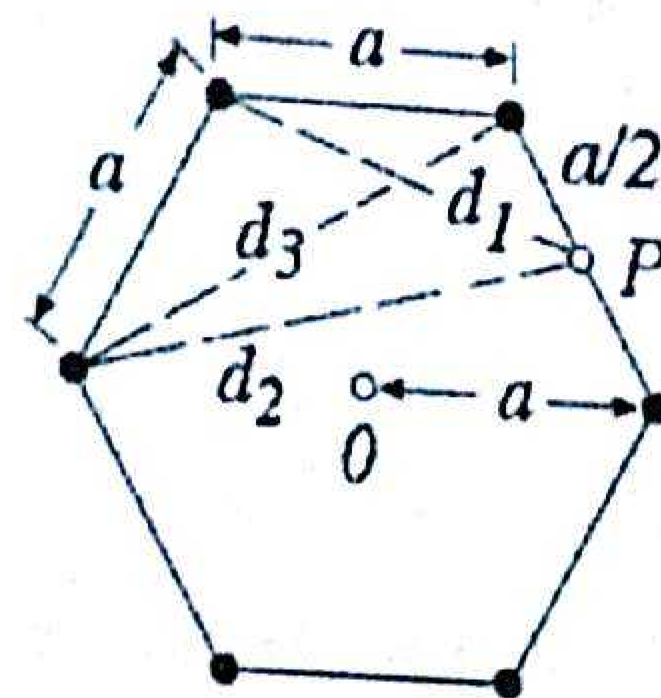
PR-4.02. *Trabajo para trasladar carga en un hexágono*

Seis cargas iguales, $+Q$, están fijas en las esquinas de un hexágono de lado a.
a) Calcule el potencial eléctrico en el centro O del hexágono y en el punto medio entre dos cargas (punto P).
b) Calcule el trabajo que hay que realizar para mover una carga Q_o desde el centro O hasta el punto P.



Solución: a) Desde cada una de las seis esquinas del hexágono hasta el centro O, la distancia es a. Por lo tanto el potencial eléctrico del punto O es:

$$V_0 = 6\frac{kQ}{a}$$



Para determinar las distancias entre cada una de las cargas y el punto P, se observa que el ángulo entre dos lados adyacentes del hexágono es 120°. Considerando los triángulos mostrados en la figura, las distancias pertinentes son:

$$d_1 = \sqrt{a^2+(a/2)^2-2a(a/2)\cos 120^0} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$d_3 = \sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos 120^0} = \sqrt{3}a$$

$$d_2 = \sqrt{d_3^2+(a/2)^2} = \sqrt{3a^2+(a/2)^2} = \frac{\sqrt{13}a}{2}$$

Agrupando los pares de cargas que equidistan del punto P, encontramos el potencial en ese punto:

$$V_P = 2\frac{kQ}{a/2}+2\frac{kQ}{a\sqrt{7}/2}+2\frac{kQ}{a\sqrt{13}/2} = \frac{4kQ}{a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$$

b) El trabajo que hay que realizar para mover una carga Q_o desde el centro O hasta el punto P es:

$$W_{O\to P} = Q_0(V_P-V_O) = \frac{2kQQ_0}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{13}}-1\right)$$

Respuesta:

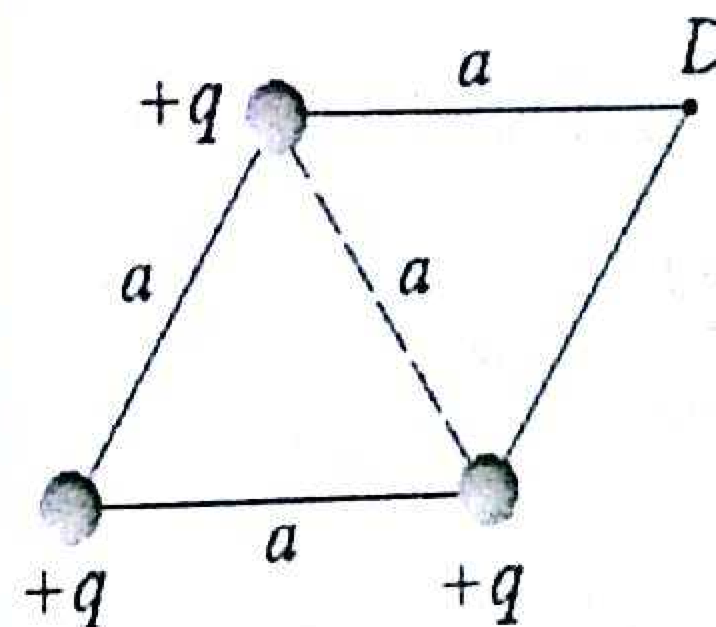
a) $V_0 = 6\dfrac{kQ}{a}$

$V_P = \dfrac{4kQ}{a}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)$,

b) $W_{O\to P} = \dfrac{2kQQ_0}{a}\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{13}}-1\right)$

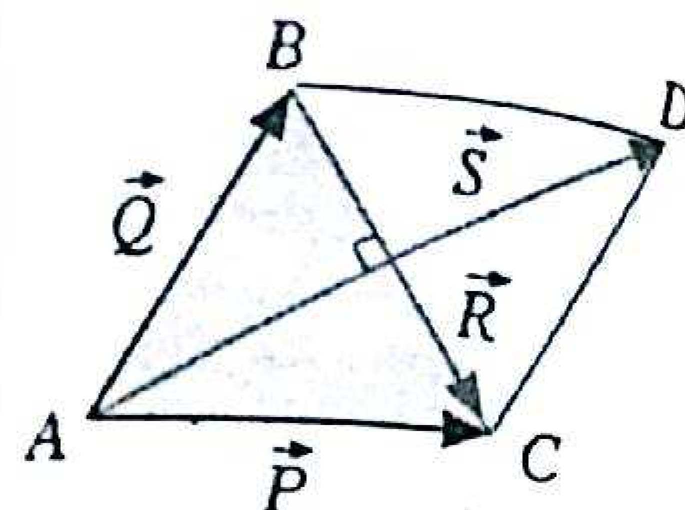
PR-4.03. *Trabajo para colocar cargas en un rombo*

Tres partículas de carga q están en esquinas de un rombo que tiene sus lados y una diagonal de igual longitud, a.
a) Determine el potencial electrostático en la esquina vacante del rombo (punto D).
b) Halle el trabajo que debe realizar un agente externo para traer una cuarta partícula de igual carga q, desde el infinito en reposo y colocarla en reposo en el punto D?
c) ¿Cuál será la energía potencial electrostática de la configuración final de las cuatro cargas?



Solución: a) Para calcular el potencial eléctrico en la esquina vacante del rombo, debemos conocer todas las distancias a las cargas. La diagonal mayor $\overline{AD}$ se determina, considerando el diagrama vectorial en el cual los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ representan dos lados adyacentes y los vectores $\vec{R}$ y $\vec{S}$ representan las diagonales del rombo. Siendo.

$$|\vec{P}|=|\vec{Q}|=|\vec{R}|=a$$



Los vectores de las diagonales $\vec{R}$ y $\vec{S}$ vienen dados:

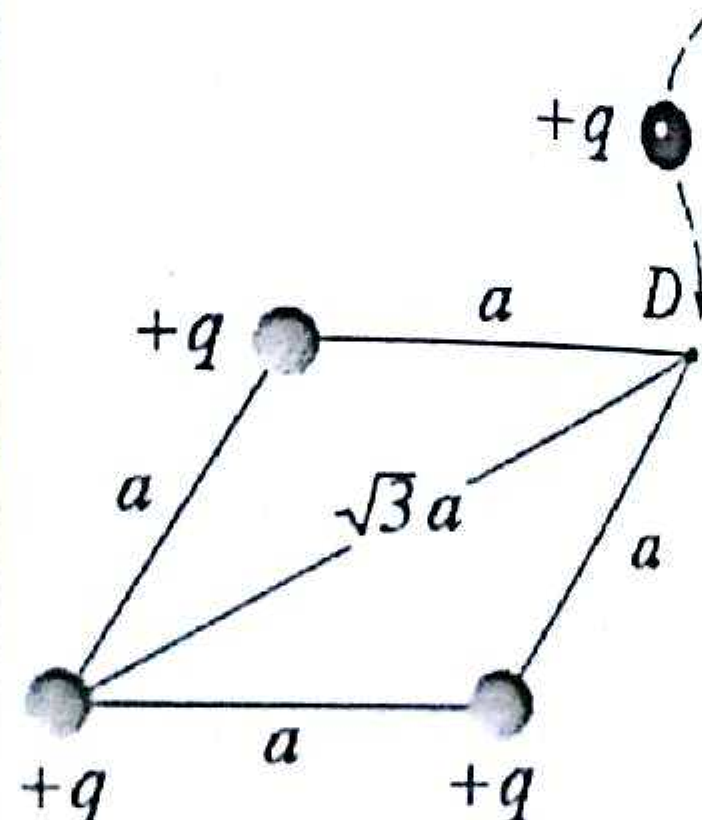
$$\vec{R}=\vec{P}-\vec{Q} \quad \text{y} \quad \vec{S}=\vec{P}+\vec{Q}$$

Efectuando el producto escalar:

$$\vec{R}\bullet\vec{S}=(\vec{P}-\vec{Q})\bullet(\vec{P}+\vec{Q})=|\vec{P}|^2-|\vec{Q}|^2=0$$

Como $\vec{R}\bullet\vec{S}=0$ concluimos que estos vectores son ortogonales. Tomando en cuenta que las diagonales se intersecan en sus puntos medios, para hallar la magnitud de $\vec{S}$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\frac{1}{2}|\vec{S}|=\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad\Rightarrow\quad |\vec{S}|=\sqrt{3}a$$



El potencial electrostático en el punto D, debido a las tres cargas y tomando como referencia $V(\infty)=0$, es:

$$V_D=\sum_{i=1}^{3}k\frac{q_i}{r_i}=2k\frac{q}{a}+k\frac{q}{\sqrt{3}a}=(2+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq}{a}$$

b) El trabajo requerido para traer la cuarta carga, Q, desde el infinito a este sitio vacante es:

$$W_{\infty\to D}=q(V_D-V_\infty)=qV_D=(2+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq^2}{a}$$

c) La energía potencial electrostática total de las cuatro cargas es la energía electrostática de la configuración inicial de las tres cargas en el triángulo equilátero $(3kq^2/a)$, más el trabajo que debe realizar un agente externo para traer la cuarta carga:

$$U=3\frac{kq^2}{a}+(2+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq^2}{a}=(5+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq^2}{a}$$

Respuesta:

a) $V_D=(2+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq}{a}$

b) $W_{\infty\to D}=(2+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq^2}{a}$

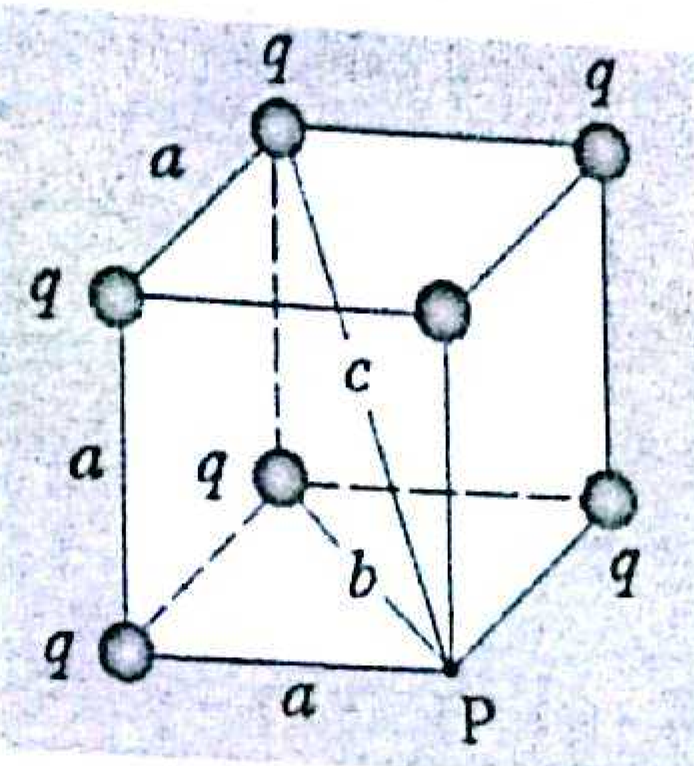
c) $U=(5+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kq^2}{a}$

PR-4.04. *Energía electrostática de 8 cargas en un cubo*

a) Siete partículas de igual carga q están fijas en esquinas de un cubo de lado a. ¿Cuál es el potencial eléctrico en la esquina vacante?

b) ¿Cuánto trabajo se requiere para colocar ocho cargas en las esquinas de un cubo de lado a?

Solución: En el cubo, podemos determinar la longitud b de las diagonales de las caras y la longitud c de las diagonales del cubo, en términos del lado a. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:



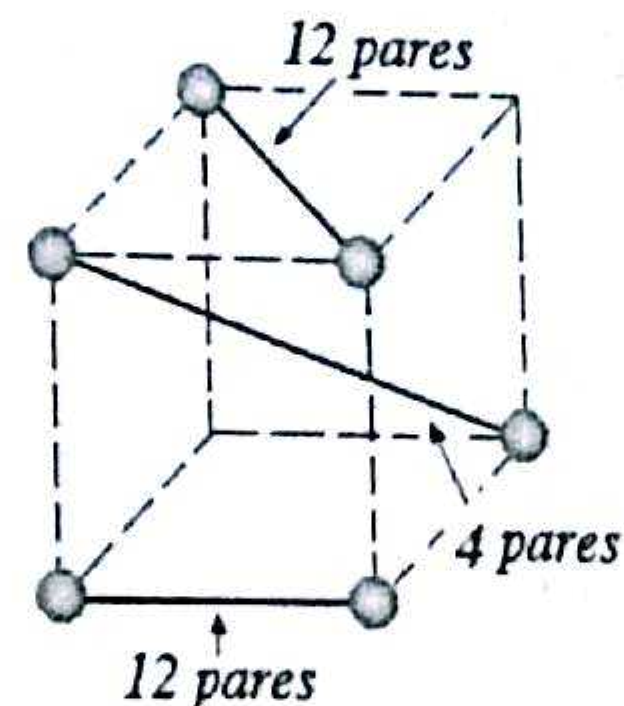
$$b=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+2a^2}=\sqrt{3}a$$

Desde el sitio vacante P existen: tres cargas a distancia a, tres cargas a distancia b y una carga a distancia c. Por lo tanto, el potencial en P es:

$$V_P=\sum_{i=1}^{7}\frac{kq_i}{r_i}=3\frac{kq}{a}+3\frac{kq}{\sqrt{2}a}+\frac{kq}{\sqrt{3}a}$$

$$V_P=\frac{kq}{a}(3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}})$$



b) El trabajo para traer las cargas desde el infinito y ensamblar el cubo es la suma de las energías de todos los pares de cargas:

$$W=U=k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

Donde la desigualdad $i<j$ evita el conteo de pares mas de una vez. Hay 12 pares con separación a, 12 pares con separación $\sqrt{2}a$ y 4 pares con separación $\sqrt{3}a$. El trabajo total es:

$$W=U=\frac{kq^2}{a}[12+\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}]$$

También podríamos haber calculado esta energía, partiendo del potencial obtenido en la parte a, que es igual para las ocho partículas:

$$U=\frac{1}{2}(8qV_P)=4\frac{kq^2}{a}(3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Respuesta:

$V_P=\frac{kq}{a}(3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}})$

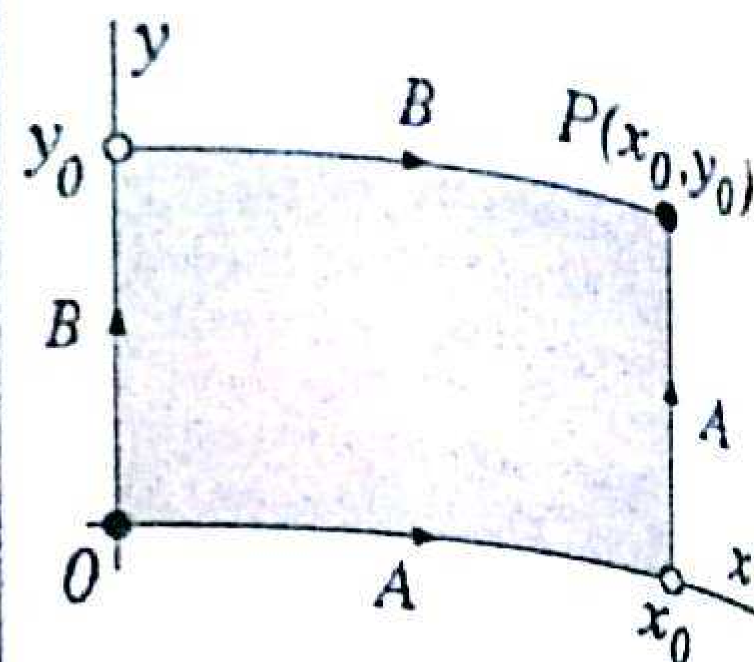
$W=U=\frac{kq^2}{a}[12+\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}]$

PR-4.05. *Diferencia de potencial no depende de la ruta*

En una región del espacio existe un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = 2xy\hat{x} + (x^2 - y^2)\hat{y}$$

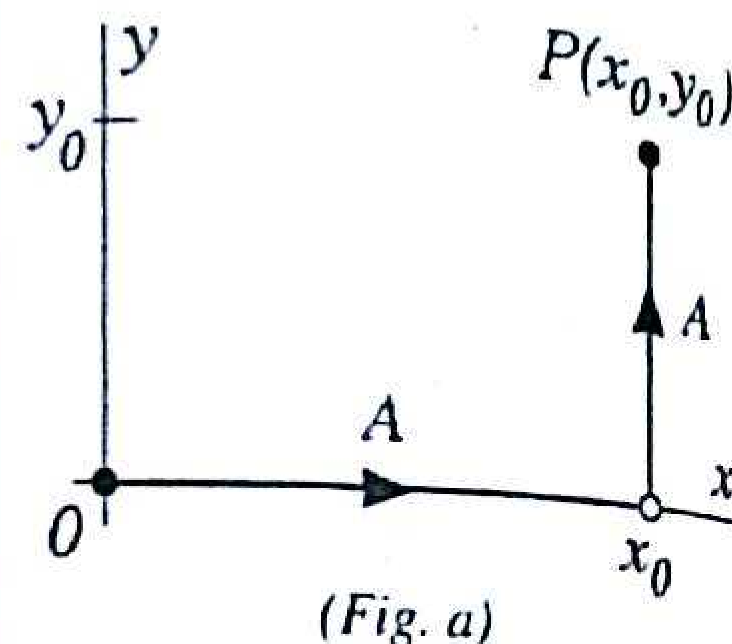
a) Determine la diferencia de potencial entre el punto $P(x_o, y_o)$ y el origen O, y compruebe que el resultado es el mismo para las trayectorias A y B indicadas en la figura.
b) Fijando el potencial en el origen a un valor V_o, haga la operación inversa, es decir, determine el campo eléctrico.



Solución: a) En cada una de las rutas solo interesa la componente del campo $\vec{E}$ que es paralela al desplazamiento $d\vec{l}$. Integrando por el camino A (Fig. a), encontramos:

$$V_P - V_0 = -\int_0^P \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_0^{x_0} E_x(x,0)dx - \int_0^{y_0} E_y(x_0, y)dy$$

$$V_P - V_0 = 0 - \int_0^{y_0} (x_0^2 - y^2)dy = -x_0^2 y_0 + \frac{y_0^3}{3}$$

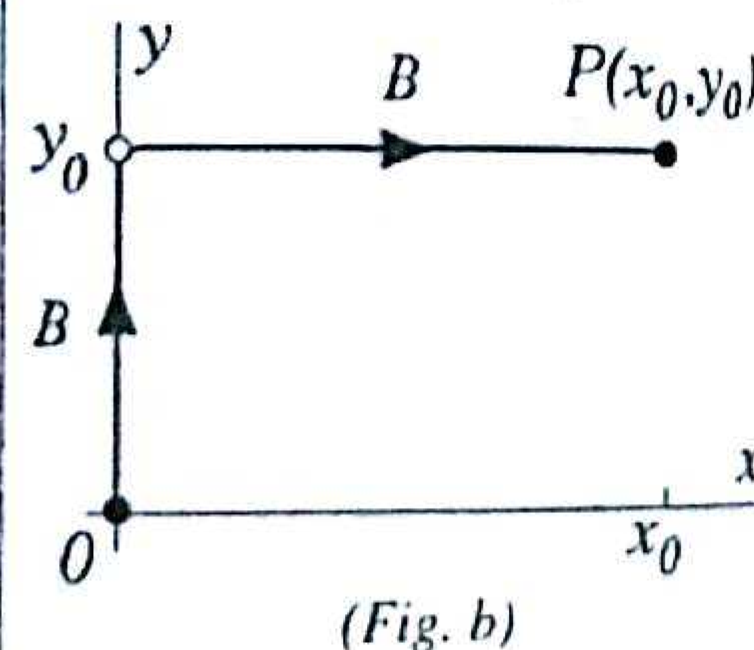


(Fig. a)

Mientras que la integral por el camino B (Fig. b), resulta:

$$V_P - V_0 = -\int_0^P \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_0^{y_0} E_y(0,y)dy - \int_0^{x_0} E_x(x, y_0)dx$$

$$V_P - V_0 = -\int_0^{y_0} (0 - y^2)dy - \int_0^{x_0} 2xy_0 dx = +\frac{y_0^3}{3} - x_0^2 y_0$$



(Fig. b)

Vemos que en las dos rutas el cálculo de las integrales arrojan el mismo resultado, y se verifica así que la diferencia de potencial entre los dos puntos es independiente de la trayectoria.

b) Si fijamos el potencial en el origen en un cierto valor constante V_o, el potencial en un punto arbitrario de coordenadas (x,y) será:

$$V(x,y) - V_0 = \frac{y^3}{3} - x^2 y$$

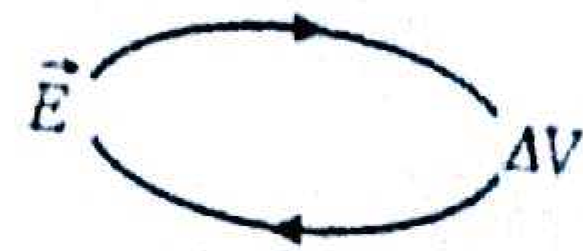
$$V(x,y) = V_0 + \frac{y^3}{3} - x^2 y$$

Tomando las derivadas parciales de esta función, se obtienen las componentes respectivas del campo eléctrico:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V(x,y)\Big|_y = +2xy$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y} V(x,y)\Big|_x = x^2 - y^2$$

Resultado que coincide con la función $\vec{E}(x,y)$ original.



Respuesta:

$$V_P - V_0 = \frac{y_0^3}{3} - x_0^2 y_0$$
Igual para ambos caminos

PR-4.06. *Trabajo para elevar una carga suspendida*

Una esferita de masa m y carga positiva q está suspendida por un hilo aislante de masa despreciable (*Fig. a*).

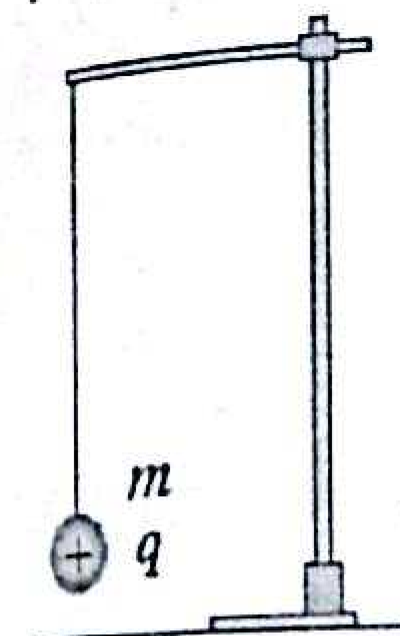


Fig. a

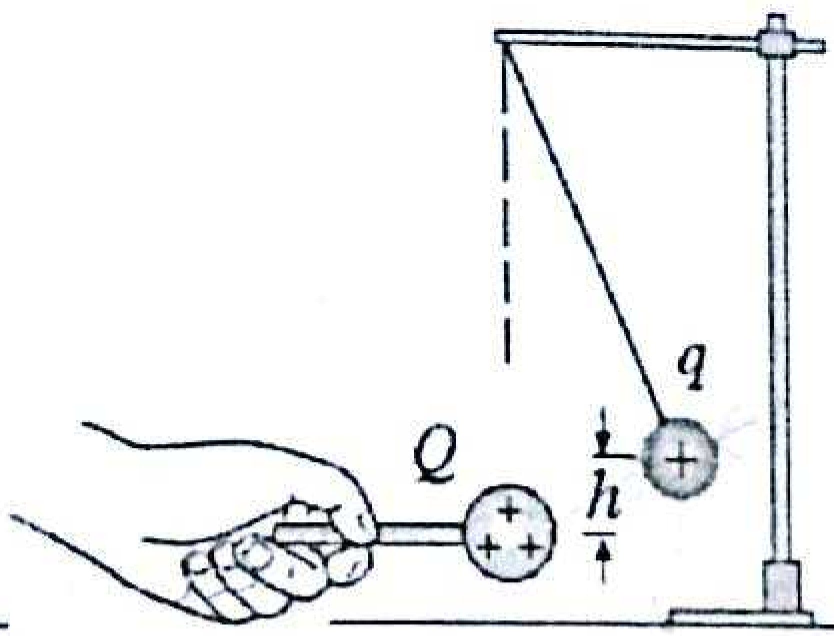


Fig. b

Desde una gran distancia se le va acercando lentamente otra esferita con carga positiva Q hasta ocupar la posición original de la esferita suspendida (*Fig. b*). Como resultado, la esferita de carga q se ha elevado una altura h. Calcule el trabajo que ha sido realizado y demuestre que este no depende de las magnitudes de las cargas Q y q.

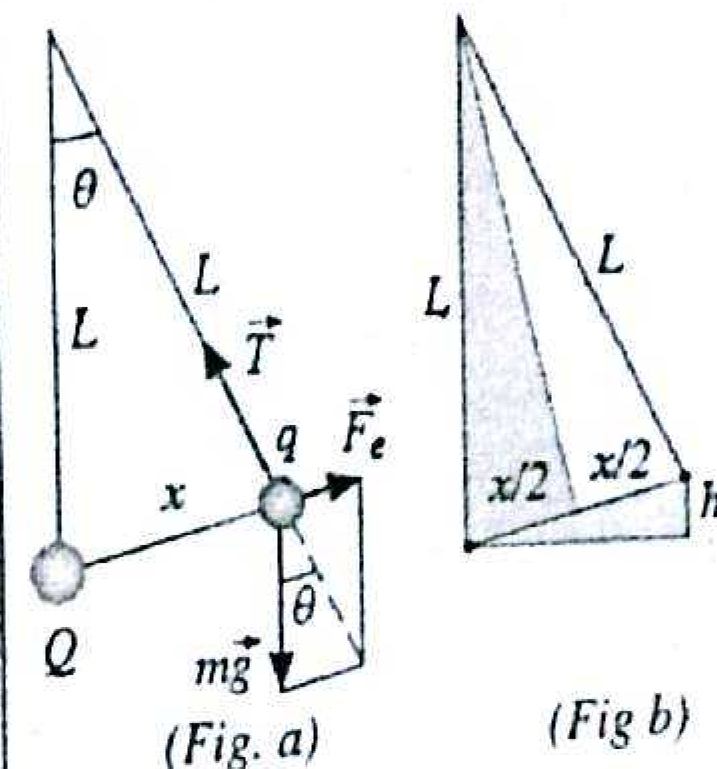
Solución: La esferita de carga q estará en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas: el peso $m\vec{g}$, la tensión de la cuerda $\vec{T}$ y la repulsión eléctrica $\vec{F}_e$. En términos de la separación x entre las esferitas, la fuerza eléctrica es:

$$F_e = \frac{kqQ}{x^2}$$

Por la similitud de los triángulos formados en las *Figs. a* y b, se tiene, respectivamente:

$$\frac{mg}{F_e} = \frac{L}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{x/2}{L} = \frac{h}{x}$$

Combinando estas tres ecuaciones, encontramos la separación x:



(Fig. a) (Fig b)

$$x = k\frac{qQ}{2mgh}$$

A esta separación, la energía electrostática del sistema es:

$$U_e = k\frac{qQ}{x} = k\frac{qQ}{(kqQ/2mgh)} = 2mgh$$

El trabajo neto realizado para elevar la esferita hasta la altura h será la suma de la energía electrostática mas el incremento de su energía gravitacional:

$$W = U_e + U_g = 2mgh + mgh = 3mgh$$

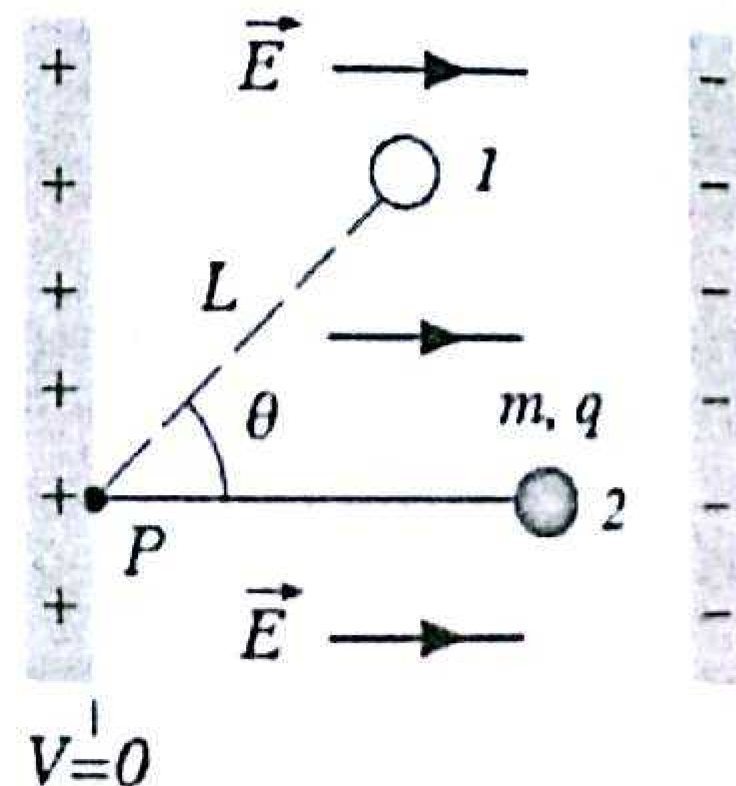
Observe que este trabajo no depende de las magnitudes de las cargas involucradas, q y Q.

Respuesta: $W = 3mgh$

PR-4.07. *Rotación de partícula en un campo uniforme*

Una partícula de masa m y carga q está atada a un hilo aislante de longitud L sobre una mesa horizontal sin fricción. La partícula se suelta desde reposo cuando la cuerda forma un ángulo θ con un campo eléctrico uniforme, $\bar{E}$. Halle la velocidad de la partícula en el instante en que la cuerda es paralela al campo eléctrico.

Solución: Si tomamos como referencia $V = 0$, en la equipotencial que pasa por el pivote del hilo, entonces el potencial eléctrico en la posición inicial 1 es $V_1 = -\vec{E}\bullet\vec{d}_1 = -ELcos\theta$, mientras que en la posición final 2 será: $V_2 = -\vec{E}\bullet\vec{d}_2 = -EL$. Entre estas dos posiciones se conserva la energía (cinética + potencial):



$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$qV_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = qV_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$-qELcos\theta + 0 = -qEL + \frac{1}{2}mv_2^2$$

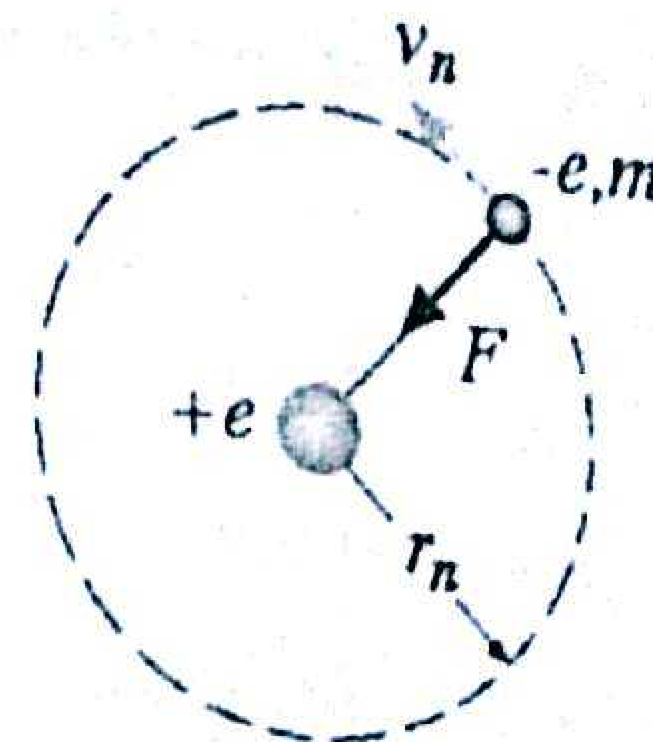
Por lo tanto, la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición 2 es:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qEL}{m}(1 - cos\theta)}$$

Respuesta: $v_2 = \sqrt{\frac{2qEL}{m}(1 - cos\theta)}$

PR-4.08. *Energías en el átomo de Bohr*

En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón gira alrededor del núcleo, únicamente en ciertas órbitas. El radio de cada órbita circular permitida es $r_n = n^2 r_0$, donde $n = 1,2,3,$ y $r_0 = 0{,}053$nm es el radio de Bohr.
a) Calcule las energía potencial eléctrica, cinética y total cuando el electrón esta en la n-sima órbita.
b) Calcule la energía total en el estado fundamental $n = 1$.
c) ¿Cuánta energía hay que suministrarle al átomo en su estado fundamental para ionizarlo?



Solución: a) A una distancia r_n del protón (carga $+e$), el potencial eléctrico es: $V = ke/r_n$, y la energía potencial es:

$$U_n = qV = -e(\frac{ke}{r_n}) = -\frac{ke^2}{r_n}$$

El electrón (masa m y carga $-e$) se mueve en la órbita circular bajo la influencia de la fuerza de atracción eléctrica, y si aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = ma_r \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{e^2}{r_n^2} = m\frac{v_n^2}{r_n}$$

De esta ecuación se deduce que la energía cinética del electrón es:

$$K_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n}$$

La energía total del átomo de hidrógeno es:

$$E_n = U_n + K_n = -\frac{ke^2}{r_n} + \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n}$$

b) En el estado fundamental, $n = 1$, la energía total es:

$$E_1 = -\frac{1}{2}\frac{(9{,}0x10^9 N.m^2/C^2)(1{,}6x10^{-19}C)^2}{(5{,}30x10^{-11}m)} = -2{,}17x10^{-18} J$$

El átomo estará ionizado cuando el electrón y el protón están completamente separados ($r_n = \infty$), y si tienen energías cinéticas nulas, la energía total es cero ($E_\infty = 0$). Por lo tanto, al menos una energía de $2{,}17x10^{-18}$J hay que suministrarle al átomo para ionizarlo.

Respuesta:

a) Potencial: $U_n = -\frac{ke^2}{r_n}$

Cinética: $K_n = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n} = -\frac{1}{2}U_n$

Total: $E_n = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n} = \frac{1}{2}U_n$

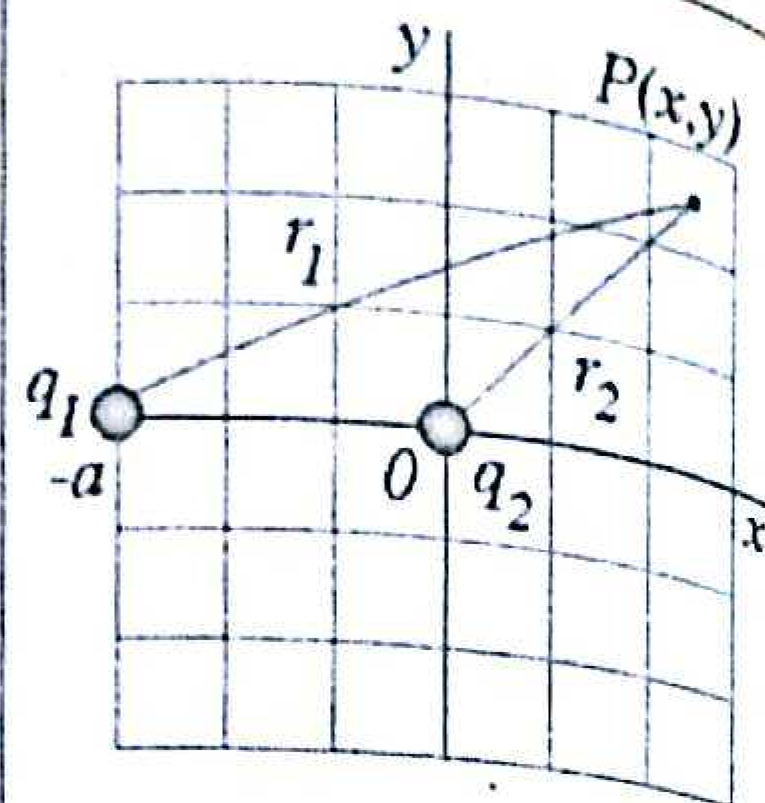
b) $E_1 = -2{,}17x10^{-18}$J

c) $E_{ion} = +2{,}17x10^{-18}$J

PR-4.09. *Determine la curva de la equipotencial*

Sean dos partículas cargadas en el plano x-y. Una tiene carga $q_1 = +2Q$ y está situada en el punto $(-a, 0)$ y la otra con carga $q_2 = -Q$ está situada en el origen de coordenadas (0, 0). Determine la expresión (y en función de x) para los puntos cuyo potencial sea cero.

Tómese el potencial de referencia $V = 0$ para $r = \infty$.



Solución: El potencial en un punto arbitrario $P(x,y)$ es la suma de los potenciales debidos a ambas cargas:

$$V(x,y) = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{k(2Q)}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{-kQ}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Estamos interesados en una curva equipotencial con un valor $V(x,y) = 0$, por lo tanto:

$$\frac{2kQ}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Elevando al cuadrado y simplificando, tenemos:

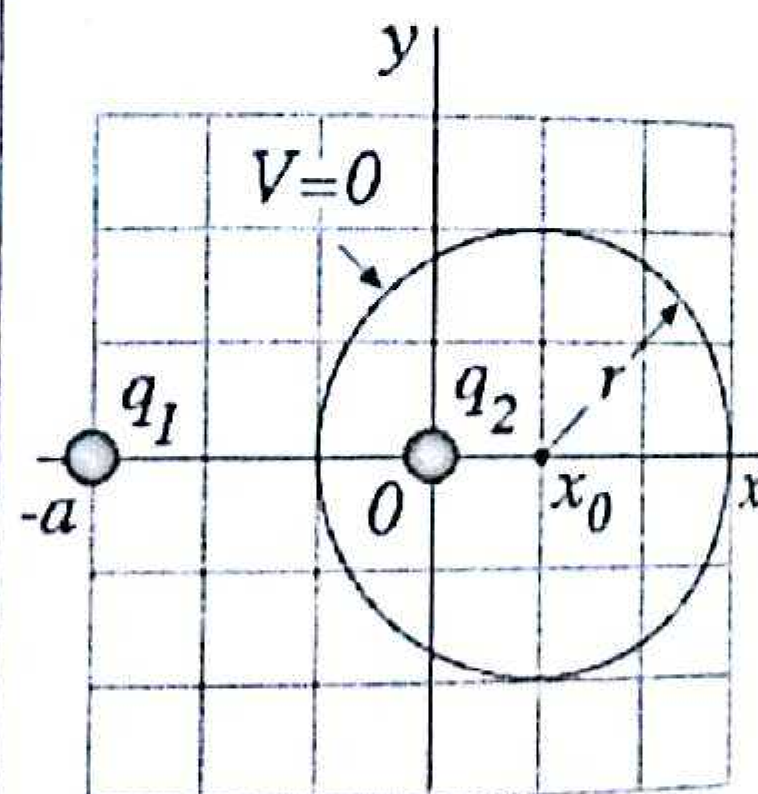
$$4(x^2 + y^2) = (x+a)^2 + y^2$$

$$3x^2 - 2ax - a^2 + 3y^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}ax + y^2 = \frac{1}{3}a^2$$

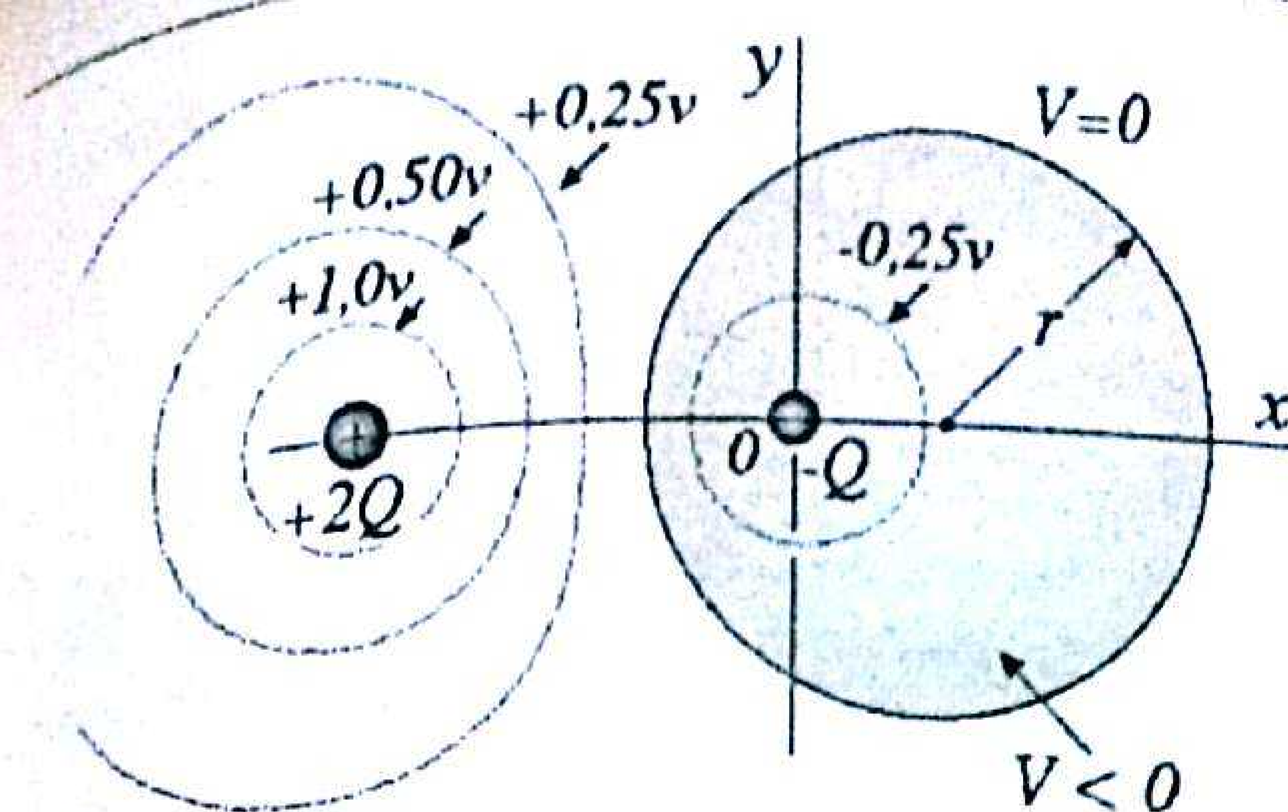
Esta última expresión puede escribirse en la forma:

$$(x - \frac{a}{3})^2 + y^2 = (\frac{2}{3}a)^2$$



Esto significa que el lugar geométrico de todos los puntos del plano xy donde $V = 0$ es una circunferencia de radio $r = 2a/3$ que está entrada en el punto $x_0(a/3, 0)$.

A continuación hemos graficado algunas superficies equipotenciales para valores específicos de las cargas y las distancias. La superficie de potencial cero envuelve la región sombreada donde los potenciales son negativos.



Respuesta:

Circunferencia
$$(x - \frac{a}{3})^2 + y^2 = (\frac{2}{3}a)^2$$

PR 4.10. *Superficies equipotenciales de un dipolo*

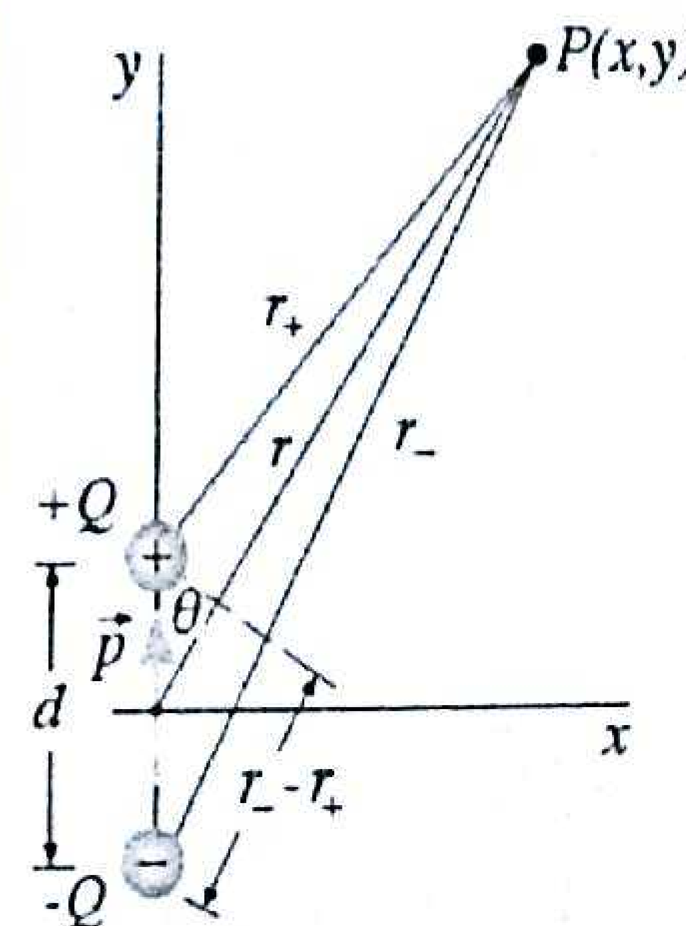
Un dipolo eléctrico consiste de dos partículas puntuales de cargas iguales y opuestas, $+q$ y $-q$, separadas por una distancia fija d.

a) Calcule el potencial debido a un dipolo en un punto arbitrario en términos de su momento dipolar p.

b) Determine las componentes radial y transversal del campo eléctrico.

Solución: Sean r_+ y r_- las distancias respectivas de las cargas $+Q$ y $-Q$ al punto P. El potencial total producido por las dos cargas es:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kQ}{r_+} - \frac{kQ}{r_-} = kQ(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}) = kQ(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+})$$



Como quiera que en la naturaleza, son las moléculas las que usualmente poseen dipolos, podemos considerar un dipolo de tamaño suficientemente pequeño ($d << r$) y usar aproximaciones para la diferencia y el producto de las distancias r_+ y r_-:

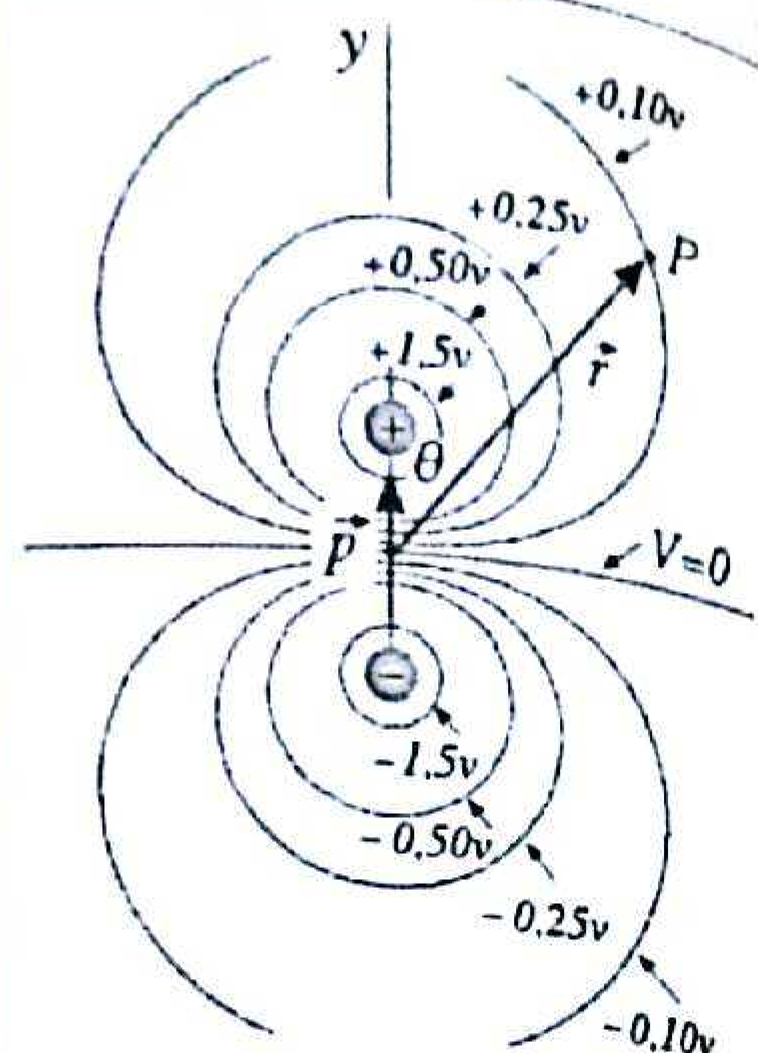
$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta \quad \text{y} \quad r_- r_+ \approx r^2$$

Con estas aproximaciones, la expresión para el potencial queda:

$$V(r) = kQ(\frac{d\cos\theta}{r^2}) = k\frac{\vec{p} \bullet \hat{r}}{r^2} \qquad r >> d$$

Donde hemos introducido el momento dipolar: $\vec{p} = Qd\hat{y}$.

La geometría del dipolo tiene simetría cilíndrica de modo que esta expresión es válida para cualquier punto definido por el vector $\bar{r}$ en el espacio tri-dimensional. Observe que el potencial del dipolo para puntos muy alejados decrece en función de r^{-2}, en comparación con la dependencia con r^{-1} para una carga puntual.



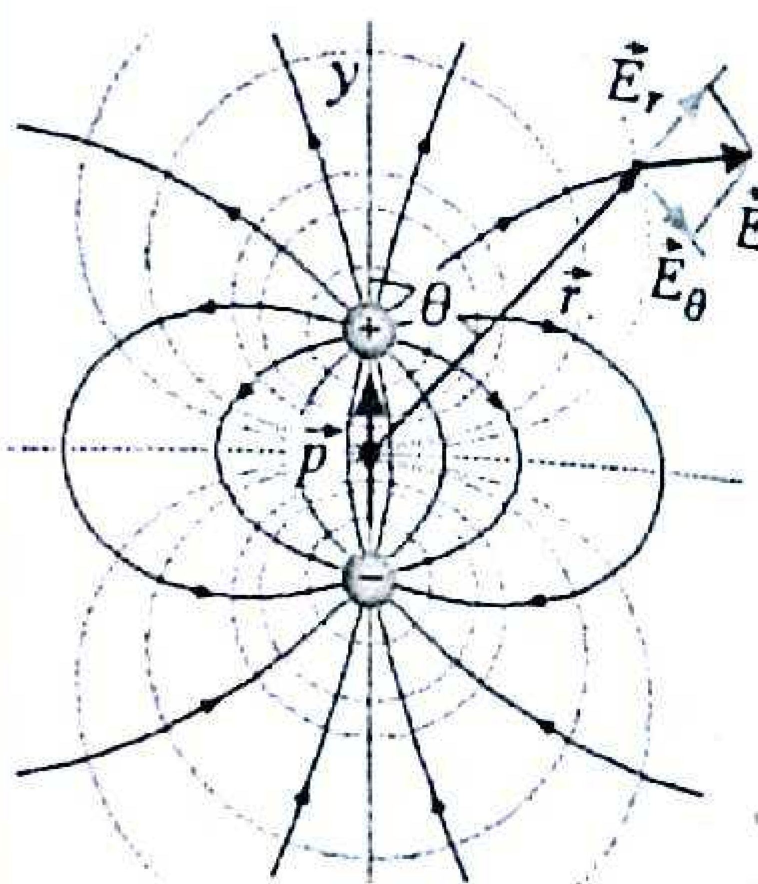
En la figura mostrada hemos trazado algunas de las superficies equipotenciales calculadas para ciertos valores numéricos de los parámetros. Note que en la vecindad de una carga puntual las superficies se aproximan a esferas centradas en ella. En el plano intermedio entre las dos cargas, el potencial es nulo, $V = 0$. En la zona superior predomina $+Q$ y los potenciales resultan positivos, mientras que en la zona inferior predomina $-Q$ y los potenciales son negativos.

b) Para calcular las componentes del campo eléctrico a partir del potencial, recordemos que en coordenadas polares un desplazamiento en dirección radial es simplemente dr, mientras que un desplazamiento transversal es $rd\theta$. Por lo tanto, la componente radial es:

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}V(r,\theta) = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}$$

y la componente transversal:

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\,sen\theta}{r^3}$$



En la figura se muestran algunas líneas de campo eléctrico (líneas sólidas) alrededor del dipolo. Se observa que las líneas de campo son normales a las superficies equipotenciales (líneas punteadas) y siempre apuntan hacia las superficies de potencial decreciente.

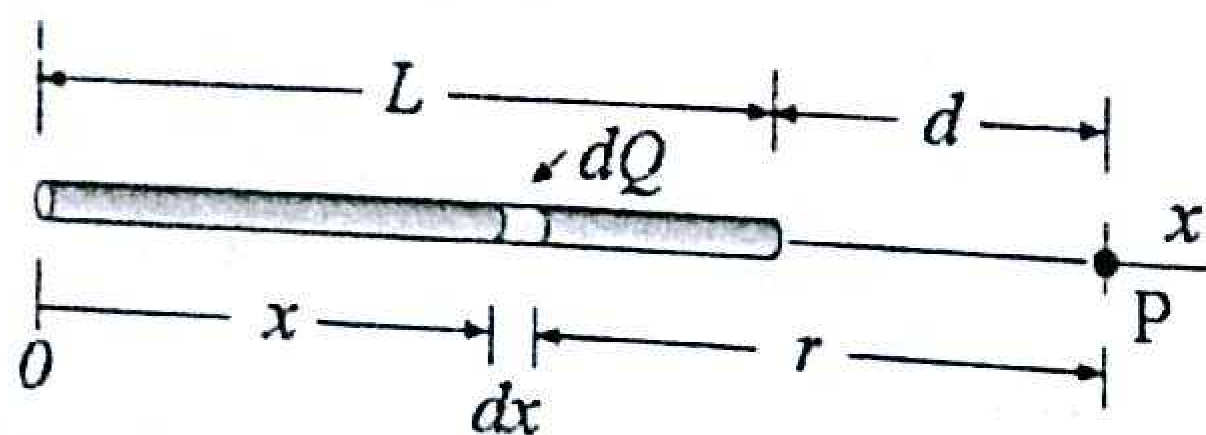
Respuesta:

a) $V(r) = \frac{kQd\cos\theta}{r^2} = k\frac{\bar{p}\bullet\hat{r}}{r^2}$

b) $E_r = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = \frac{kp\,sen\theta}{r^3}$

PR 4.11. *Potencial de una barra con carga uniforme I*

Una barra aislante recta y delgada de longitud L, tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ.



a) Halle el potencial en un punto P sobre el eje a distancia d de un extremo, tomando $V(\infty) = 0$.
b) Verifique su resultado tomando el caso límite $d >> L$.
c) Calcule la componente x del campo eléctrico $\bar{E}$ en el punto P.
d) Se podría hallar la componente perpendicular de $\bar{E}$?

Solución: a) Para un elemento infinitesimal de longitud dx, la carga será $dQ = \lambda dx$. El potencial eléctrico en el punto P debido a este elemento es:

$$dV = k\frac{dQ}{r} = k\frac{\lambda dx}{L+d-x}$$

Para hallar el potencial total en P debido a toda la varilla, integramos sobre los valores de x desde d hasta $(d + L)$:

$$V = \int dV = k\lambda\int_0^L \frac{dx}{L+d-x}$$

$$V = -k\lambda ln(L+d-x)\Big|_0^L = k\lambda\, ln(\frac{L+d}{d})$$

b) Para puntos lejanos $(d >> L)$, el término que contiene el logaritmo toma el valor aproximado:

$$ln(\frac{d+L}{d}) = ln(1+\frac{L}{d}) \approx \frac{L}{d} \quad \text{para } L/d << 1$$

$$ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

Sustituyendo esta expresión en el potencial y tomando en cuenta que $\lambda = Q/L$, donde Q es la carga total sobre la varilla tenemos:

$$V \approx k(\frac{Q}{L})\frac{L}{d} = k\frac{Q}{d} \quad \text{para } d >> L$$

Es decir, a grandes distancias la barra se comporta como una carga puntual.

c) Para calcular la componente x del campo eléctrico, ponemos el origen de coordenadas en la punta de la varilla y sustituimos d con x en la expresión del potencial:

$$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[k\lambda\, ln(1+\frac{L}{x})]$$

$$E_x = -k\lambda(\frac{-L/x^2}{1+L/x}) = k\lambda\frac{L}{x(L+x)}$$

d) La dirección del campo eléctrico en P debido a cualquier elemento de carga queda en el eje x, y obviamente $E_y = 0$. Este resultado no puede ser obtenido derivando el potencial, ya que este vale solo para $y = 0$.

Respuesta:

a) $V = k\lambda\, ln(\frac{d+L}{d})$

b) $V \approx k\frac{Q}{d}$ para $d >> L$

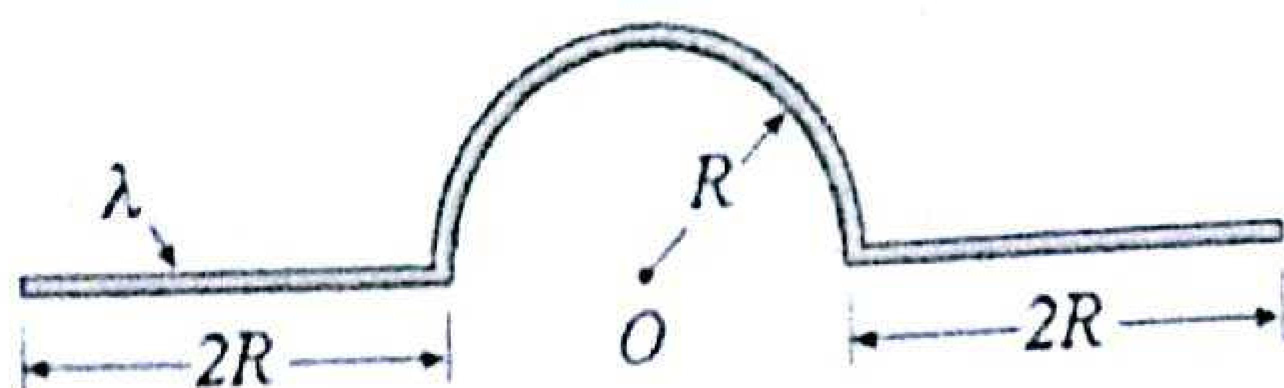
c) $E_x = \frac{k\lambda L}{x(L+x)}$

d) No se puede determinar derivando el potencial

PR-4.12. *Carga en un semicírculo y dos tramos rectos*

Una carga está distribuida con densidad lineal λ, en dos tramos rectos de longitud $2R$ y un semicírculo de radio R.

Determine el potencial eléctrico en el punto medio O.



Solución: El potencial eléctrico en el punto O es la suma de los potenciales debidos a los dos tramos rectos y el potencial debido al semicírculo: $V_O = 2V_- + V_\cap$. Para el potencial debido a un tramo recto podemos utilizar el resultado del problema anterior con $L = 2R$ y $d = R$:

$$V_- = k\lambda \ln(\frac{2R+R}{R}) = k\lambda \ln 3$$

Toda la carga del semicírculo equidista del punto O y el potencial que produce es:

$$V_\cap = \int_\cap k\frac{dQ}{R} = \int_\cap k\frac{\lambda dl}{R} = \frac{k\lambda}{R}(\pi R) = k\lambda\pi$$

Por lo tanto, el potencial total en el punto O es:

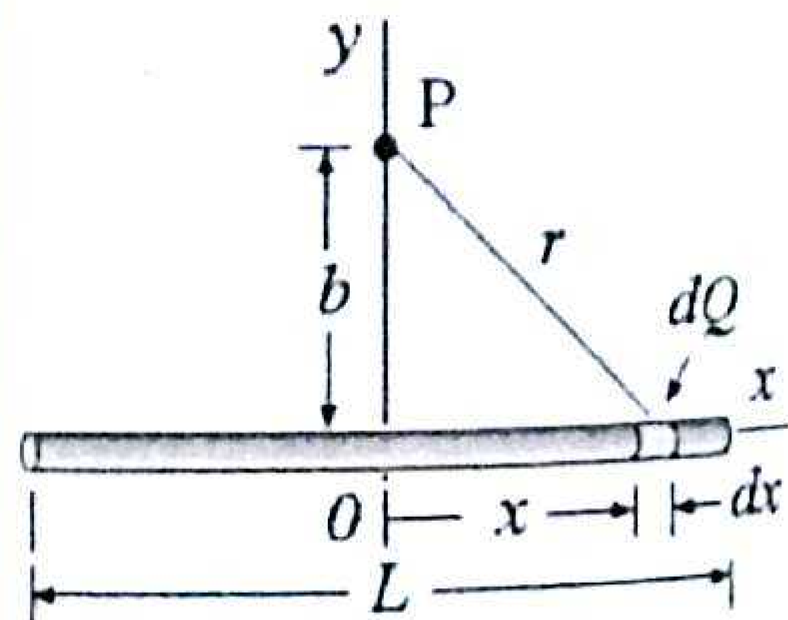
$$V_O = 2(k\lambda \ln 3) + k\lambda\pi = k\lambda(2\ln 3 + \pi)$$

Respuesta:

$$V_O = k\lambda(2\ln 3 + \pi)$$

PR-4.13. *Potencial de una varilla con carga uniforme II*

Una varilla delgada aislante de longitud L tiene una densidad de carga uniforme λ. Tómese V=0 en el infinito.
a) Determine el potencial eléctrico en un punto P sobre la mediatriz de la varilla, a una distancia b del eje x.
b) Si la línea de carga fuera infinita, ¿se podría obtener el potencial a partir de la expresión obtenida en la parte a?



Solución: a) Tomemos un elemento infinitesimal de carga $dQ = \lambda dx$, como indica la figura. Para obtener el potencial en el punto P debido a la varilla entera, debemos integrar sobre todas las contribuciones de los elementos dQ:

$$V = \int k\frac{dQ}{r} = k\lambda\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = 2k\lambda\int_0^{+L/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \ln[\,x+\sqrt{x^2+b^2}\,]$$

Integrando:

$$V = 2k\lambda \ln[\,x+\sqrt{x^2+b^2}\,]\Big|_0^{L/2} = 2k\lambda \ln[\,\frac{L}{2b}+\sqrt{(\frac{L}{2b})^2+1}\,]$$

b) Si la varilla fuera infinita, al tomar el límite de esta expresión para ($L\to\infty$), el potencial V resulta infinito. Este es un inconveniente que siempre se presenta en el caso de distribuciones de carga de extensión *infinita*, y es consecuencia de haber usado la expresión para el potencial que es válida cuando se asigna a priori el valor de referencia del potencial $V = 0$ en $r = \infty$.

Respuesta:

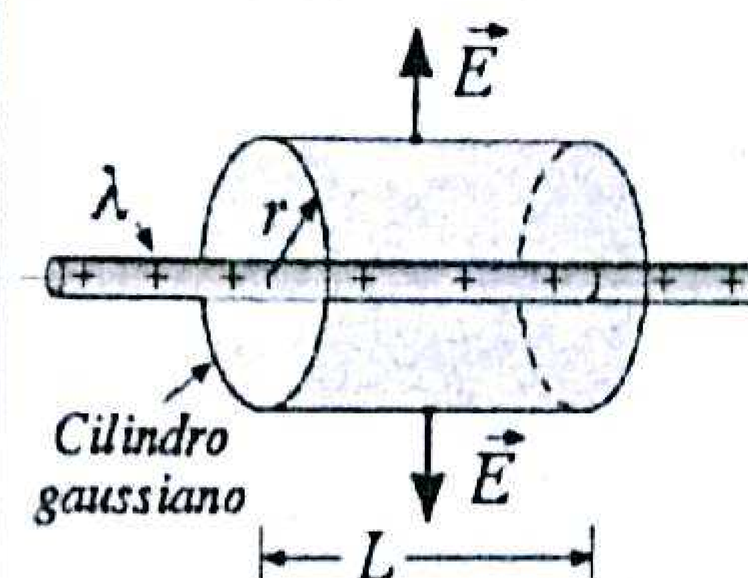
a) $V = 2k\lambda \ln[\,\frac{L}{2b}+\sqrt{(\frac{L}{2b})^2+1}\,]$

b) Para la varilla infinita, no se puede usar esta expresión de V.

PR-4.14. *Potencial de una varilla infinita de carga*

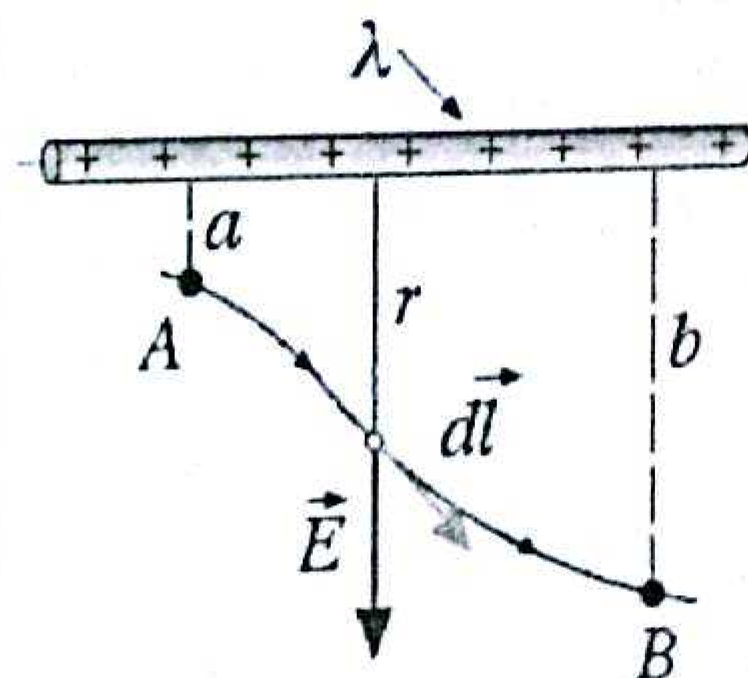
Considere una varilla recta infinitamente larga con carga uniforme con densidad λ (C/m). Determine el potencial eléctrico a una distancia r de la varilla.

Solución: El campo eléctrico debido a una línea de carga de densidad lineal λ (C/m) es radial y se obtiene aplicando la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio r y longitud L. En las tapas planas el flujo es nulo y en la cara curva vale $(2\pi rLE)$. Igualando el flujo con la carga neta encerrada (λL) dividida por ε_O, se obtiene:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_O r}\hat{r}$$

A partir del campo eléctrico, calcularemos la diferencia de potencial entre dos puntos A y B situados a distancias radiales a y b de la línea de carga.



$$V_B - V_A = -\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{l}$$

Como el campo es radial, $\vec{E}\bullet d\vec{l} = E\hat{r}\bullet d\vec{r}$ y el producto escalar $\hat{r}\bullet d\vec{r}$ es justamente la proyección dr del vector desplazamiento en la dirección radial, $\vec{E}\bullet d\vec{l} = Edr$. Por lo tanto:

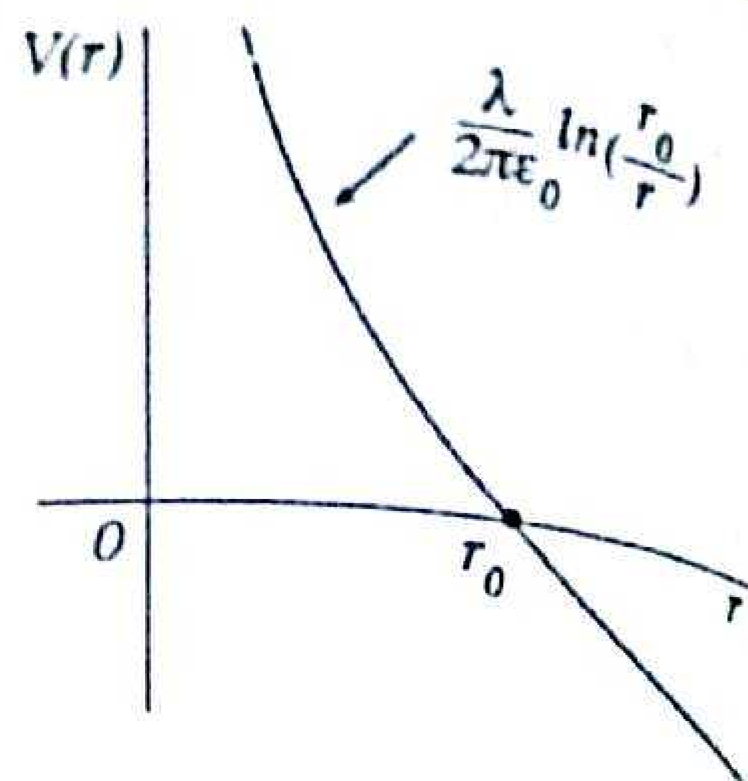
$$V_B - V_A = -\int_a^b E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{b}{a})$$

Si en esta expresión tomamos el punto B en el infinito ($b = \infty$) y ponemos $V_B = 0$, entonces el potencial en el punto A resultaría infinito!

$$V_A = V_B + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{b}{a}) \quad \Rightarrow \quad V_A = 0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{\infty}{a}) = \infty$$

Por esta razón conviene escoger como referencia $V = 0$ en un punto arbitrario situado a distancia finita $b = r_0$. De esta manera el potencial a cualquier otra distancia, $a = r$ viene dado por:

$$V_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_0}{r})$$

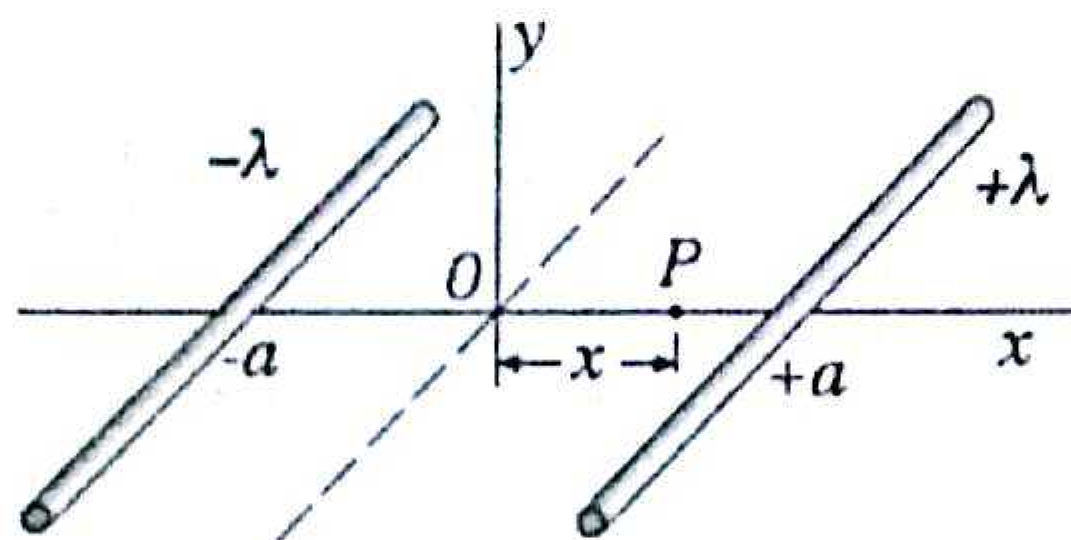


Respuesta:

$$V_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_0}{r})$$
Donde $V = 0$ en $r = r_0$

PR-4.15. *Potencial entre dos rectas de carga paralelas*

Dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas tienen densidades de carga lineal iguales y opuestas ($\pm\lambda$).

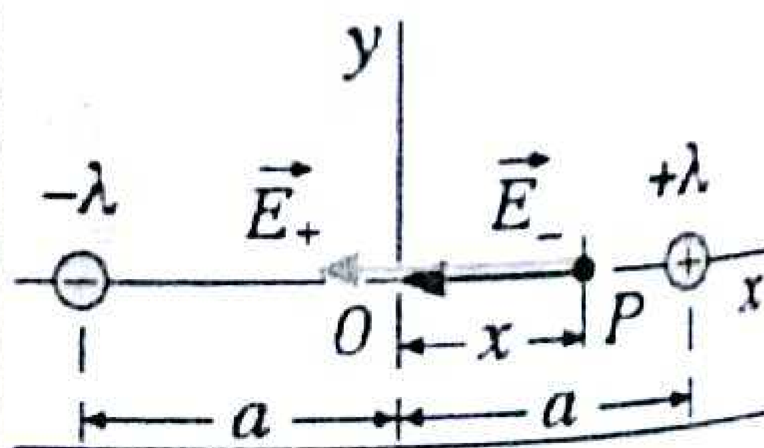


Calcular la expresión para el potencial en un punto entre las líneas, ubicado en su plano común, respecto del punto medio O.

Solución: Primero se determina el campo eléctrico en el punto P producido por cada varilla por separado, aplicando la ley de Gauss a cilindros gaussianos concéntricos.

$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(a-x)}(-\hat{x})$$

$$\vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(a+x)}(-\hat{x})$$



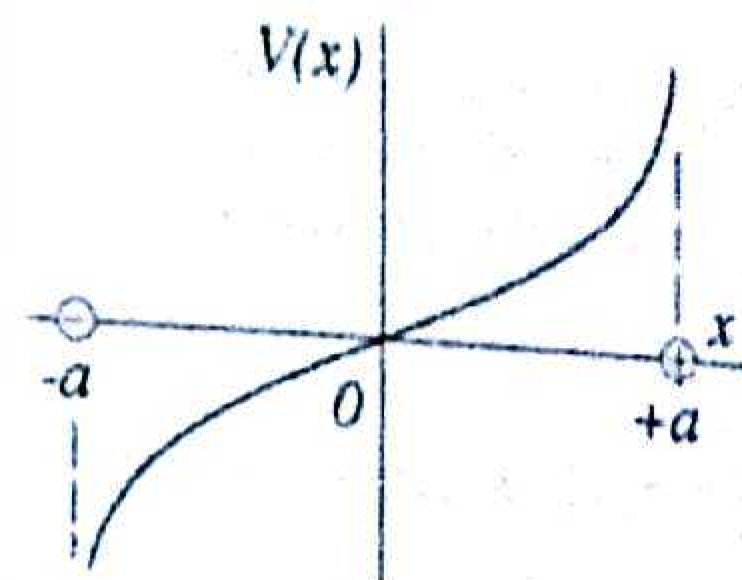
El campo resultante en P es la suma vectorial de los campos de cada varilla:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}](-\hat{x})$$

Se calcula la diferencia de potencial ΔV mediante la integral de línea de $\vec{E}$:

$$V(x) - V_0 = -\int_0^x \vec{E}\bullet d\vec{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\int_0^x \frac{dx}{a+x} + \int_0^x \frac{dx}{a-x}]$$

$$V(x) - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln(a+x) - \ln(a-x)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{a+x}{a-x})$$



Respuesta:

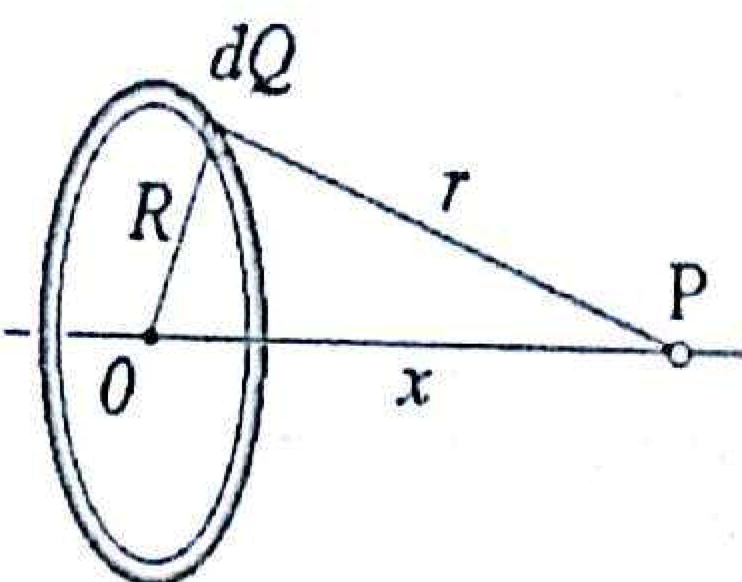
$$V(x) - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{a+x}{a-x})$$

PR-4.16. *Potencial sobre el eje de un anillo uniforme*

Considere un anillo de radio R, con carga total Q uniformemente repartida.

a) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado en el eje del anillo, a distancia x de su centro.

b) A partir del potencial eléctrico, halle una expresión para el campo eléctrico en el eje del anillo.



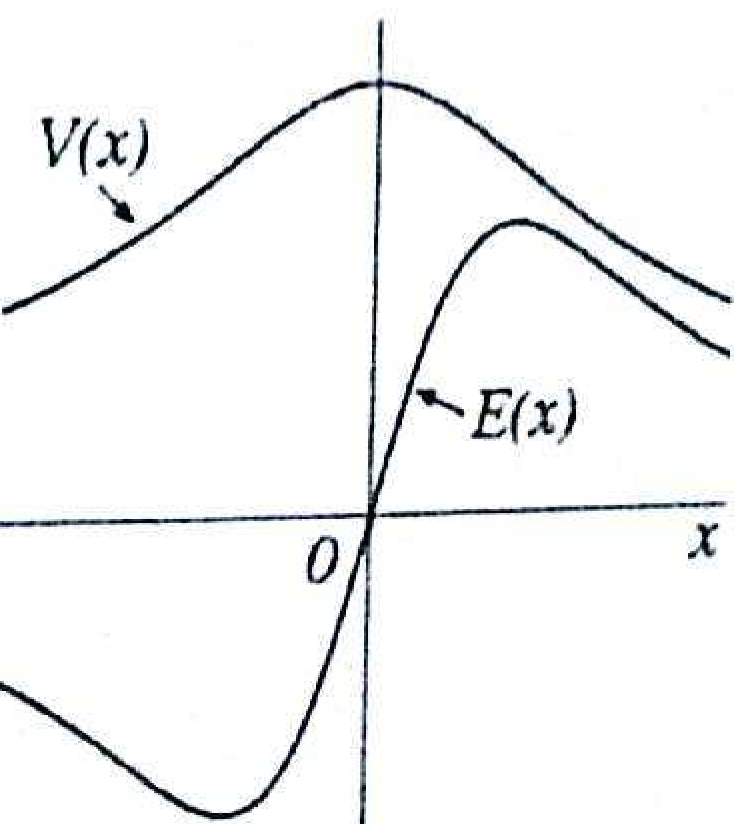
Solución: a) Todos los elementos de carga dQ en el anillo están a igual distancia, r, del punto P y por lo tanto, el potencial total en ese punto debido a todo el anillo es:

$$V = \int \frac{kdQ}{r} = \frac{k}{r}\int dQ = \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

b) Esta expresión para $V(x)$ se restringe únicamente a puntos sobre el eje x. Por otra parte, de la simetría de la distribución de cargas, se deduce que el campo eléctrico $\vec{E}$ sólo puede tener componente en la dirección x.

La componente x del campo eléctrico en el punto P se calcula tomando la derivada negativa del potencial con respecto a la coordenada x:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{kQ}{2}(x^2+R^2)^{-3/2}(2x)$$



$$E_x = \frac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Este resultado coincide con la expresión obtenida anteriormente para el campo eléctrico del anillo utilizando directamente la ley de Coulomb.

Respuesta:

a) $V = \dfrac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$

b) $E_x = \dfrac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

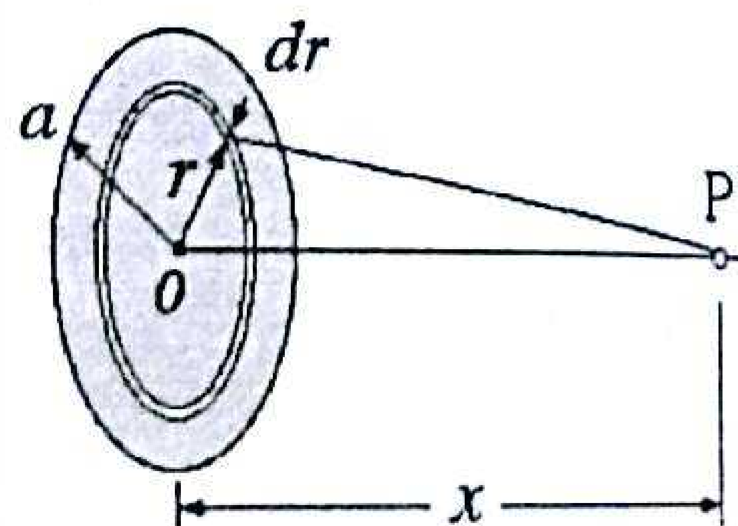
PR-4.17. *Potencial sobre el eje de un disco uniforme*

Sea un disco de radio a, y carga uniforme con densidad σ.
a) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado en el eje, a distancia x de su centro.
b) Verifique que el resultado anterior se reduce a la expresión esperada en el caso extremo en que la distancia del punto P al disco sea muy grande ($x >> a$).
c) A partir de la expresión del potencial eléctrico, determine el campo eléctrico en función de x.

Solución: a) El problema se simplifica considerando el disco como una serie de anillos concéntricos. Para un anillo de radio r y anchura dr, el área es $dA = 2\pi r dr$ y su carga es:

$$dQ = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

De acuerdo al resultado del problema anterior, el potencial en el punto P debido a este anillo es:



$$dV = \frac{kdQ}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

El potencial total en P se halla sumando las contribuciones de todos los anillos desde $r = 0$ hasta $r = a$.

$$V(x) = k\sigma\pi \int_0^a \frac{2rdr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

Por lo tanto;

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$u = x^2 + r^2, \quad n = -1/2$$

$$V(x) = k\sigma\pi \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{1/2}\Bigg|_0^a = 2\pi k\sigma[\sqrt{x^2+a^2} - x]$$

b) Para puntos lejanos ($x >> a$) podemos usar la aproximación:

$$\sqrt{x^2+a^2} = x(1+\frac{a^2}{x^2})^{1/2} \approx x(1+\frac{a^2}{2x^2}) = x + \frac{a^2}{2x}$$

Tomando en cuenta que la densidad de carga es $\sigma = Q/\pi a^2$, la expresión para el potencial se reduce a:

$$V(x) \approx 2\pi k \frac{Q}{\pi a^2}\frac{a^2}{2x} = \frac{kQ}{x}$$

Como era de esperar, a grandes distancias ($x >> a$) el disco se comporta como una carga puntual.

c) Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto axial tomamos la derivada negativa de V con respecto a x:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi k\sigma \frac{\partial}{\partial x}[\sqrt{x^2+a^2} - x]$$

$$E_x = 2\pi k\sigma[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}]$$

Este resultado concuerda con el que obtuvimos en el capítulo 2, directamente a partir de la ley de Coulomb.

Respuesta:

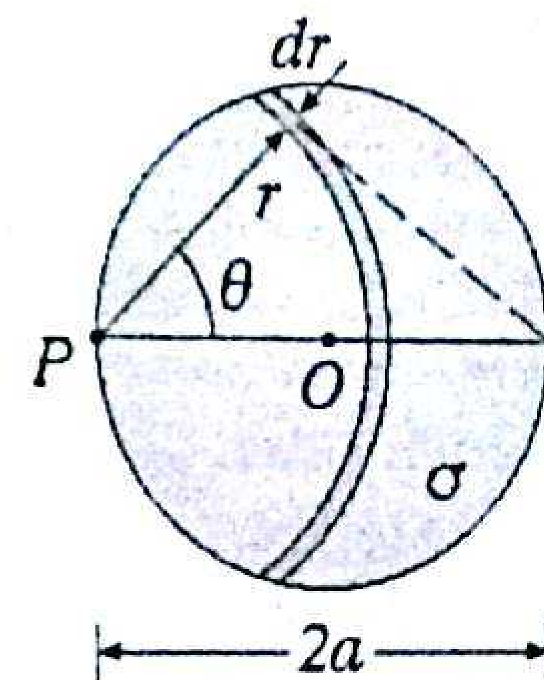
a) $V(x) = 2\pi k\sigma[\sqrt{x^2+a^2} - x]$

b) $V(x) = \dfrac{kQ}{x}$ $(x>>a)$

c) $E_x = 2\pi k\sigma[1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}]$

PR-4.18. *Potencial en el borde de un disco uniforme*

Sea un disco de radio a, y carga uniforme con densidad σ.
a) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado en el borde del disco.
b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto P del borde y el centro O del disco?



Solución: Consideramos un anillo de radio r centrado en el punto P. Utilizando coordenadas polares, la carga en este segmento de anillo es: $dQ = \sigma dA = \sigma(2r\theta dr)$ y su contribución al potencial en el punto P es:

$$dV_P = k\frac{dQ}{r} = k\frac{\sigma(2r\theta dr)}{r} = 2k\sigma\theta dr$$

Considerando el triángulo rectángulo de la figura, podemos escribir para la distancia r:

$$r = 2a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dr = -2a\,sen\theta d\theta$$

Si tomamos el ángulo θ como variable de integración, el disco es barrido entre $\theta=\pi/2$ y $\theta=0$. El potencial total es:

$$V_P=\int k\frac{dQ}{r}=\int_{\pi/2}^{0}2k\sigma\theta dr=\int_{\pi/2}^{0}2k\sigma\theta(-2asen\theta d\theta)$$

$$V_P=-4k\sigma a\int_{\pi/2}^{0}\theta sen\theta d\theta=-4k\sigma a[\,sen\theta-\theta cos\theta\,]_{\pi/2}^{0}$$

$$V_P=-4k\sigma a(-1)=4k\sigma a$$

$$\int xsenxdx=senx-x\cos x$$

(Integración por partes)

b) Utilizando el resultado del problema anterior para el potencial en el eje del disco con $x=0$, encontramos:

$$V_0=2\pi k\sigma[\sqrt{0^2+a^2}-0]=2\pi k\sigma a$$

y la diferencia de potencial entre el centro y la orilla del disco es:

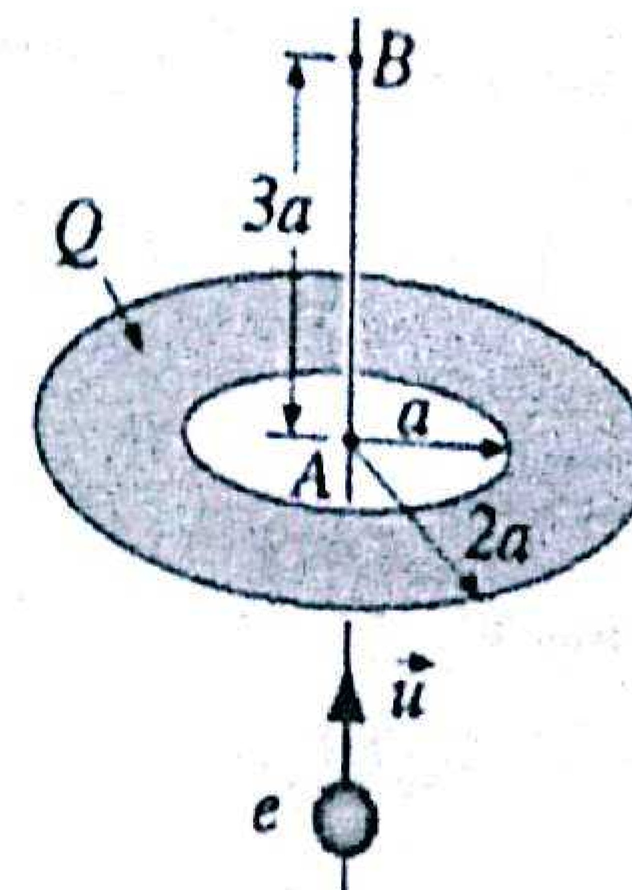
$$V_0-V_P=2\pi k\sigma a-4k\sigma a=2k\sigma a(\pi-2)$$

Respuesta:

a) $V_P=4k\sigma a$
b) $V_0-V_P=2k\sigma a(\pi-2)$

PR-4.19. *Electrón moviéndose en el eje de un anillo*

Un anillo circular tiene una carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie que está comprendida dentro los radios a y $2a$. Un electrón se aproxima en el eje del anillo pasando por el centro A con una rapidez u_A. Si el electrón alcanza una posición máxima B a distancia $3a$ del centro y se devuelve. ¿Con qué rapidez había pasado por el centro del anillo?



Solución: Para hallar el potencial en el eje del disco, se procede como en el problema anterior, a considerar el disco hueco constituido por anillos delgados:

$$V(z)=\int_a^{2a}\frac{kdQ}{\sqrt{z^2+r^2}}=k\sigma 2\pi\int_a^{2a}d\sqrt{z^2+r^2}$$

$$V(z)=k\sigma 2\pi\sqrt{z^2+r^2}\Big|_a^{2a}=k\sigma 2\pi[\sqrt{z^2+4a^2}-\sqrt{z^2+a^2}\,]$$

En este caso, la carga por unidad de área es:

$$\sigma=\frac{Q}{\pi[(2a)^2-a^2]}=\frac{Q}{3\pi a^2}$$

Los potenciales en los puntos de interés son:

$z=0$: $\quad V_A=k\sigma 2\pi a$

$z=3a$: $\quad V_B=k\sigma 2\pi a[\sqrt{13}-\sqrt{10}\,]$

Aplicando el principio de conservación de la energía y tomando en cuenta que la velocidad en B es nula se tiene:

$$U_A+K_A=U_B+K_B$$

$$qV_A+\frac{1}{2}mu_A^2=qV_B+\frac{1}{2}mu_B^2$$

$$-ek\sigma 2\pi a+\frac{1}{2}mu_A^2=-ek\sigma 2\pi a[\sqrt{13}-\sqrt{10}\,]$$

Finalmente, despejando u_A encontramos:

$$u_A=\sqrt{\frac{ek\sigma 4\pi a}{m}[1-\sqrt{13}+\sqrt{10}\,]}$$

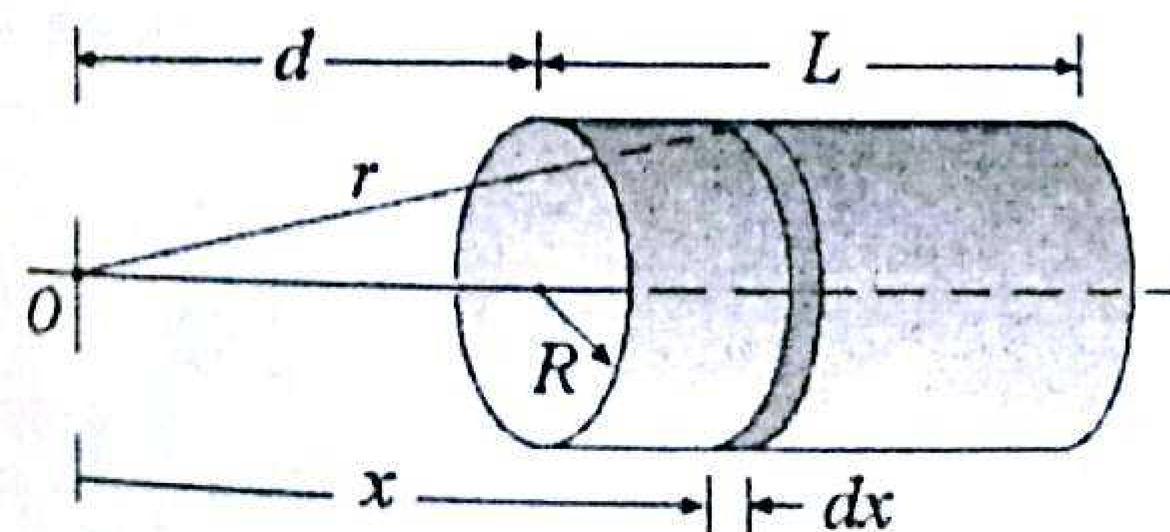
Respuesta:

$$u_A=\sqrt{\frac{eQ}{3\pi\varepsilon_0 ma}[1-\sqrt{13}+\sqrt{10}\,]}$$

PR-4.20. *Potencial en el eje de un cascarón cilíndrico*

Un cascarón cilíndrico de radio R y largo L tiene una carga uniforme Q.

Determine el potencial eléctrico a una distancia d de un lado del cilindro



Solución: Tomamos el origen en el punto donde se desea encontrar el potencial y consideramos el cascarón como una colección de anillos. Un anillo a distancia x, de ancho dx tiene una carga $dQ = Qdx/L$ y produce un potencial en O:

$$dV=\frac{kdQ}{r}=\frac{k(Qdx/L)}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

El potencial eléctrico producido por todos los anillos es:

$$V = \int_{cilindro} dV = \int_d^{d+L} \frac{k(Qdx/L)}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{kQ}{L}\int_d^{d+L} \frac{dx}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$V = \frac{kQ}{L} ln(x+\sqrt{x^2+R^2}\Big|_d^{d+L}$$

$$V = \frac{kQ}{L} ln[\frac{d+L+\sqrt{(d+L)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}]$$

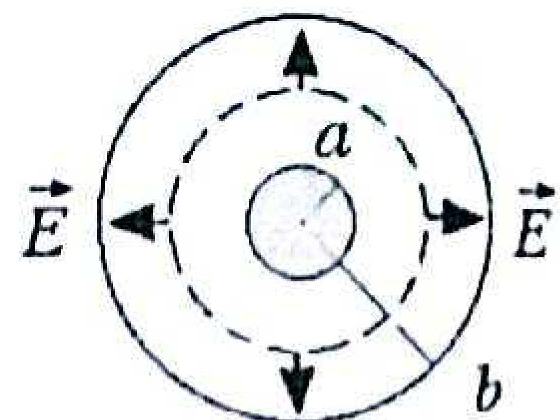
Respuesta:

$$V = \frac{kQ}{L} ln[\frac{d+L+\sqrt{(d+L)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}]$$

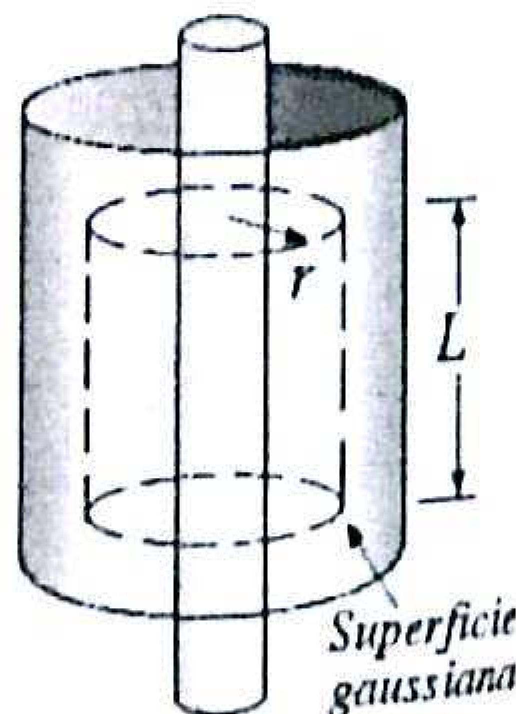
PR-4.21. ***Cilindro metálico concéntrico con alambre***

Un contador Geiger-Muller es un típico detector de radiación que consiste esencialmente de un cilindro metálico hueco de radio b (el cátodo) a lo largo de cuyo eje se extiende un alambre de radio a (el ánodo). Si se aplica una diferencia de potencial ΔV, determine el campo eléctrico en la región entre el alambre y el cilindro, en función de la distancia radial, r.

Solución: El procedimiento a seguir es aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo eléctrico con la densidad lineal de carga λ, que es desconocida. Luego se emplea esta expresión para encontrar la diferencia de potencial entre el cilindro y el alambre en términos de λ. Finalmente se despeja λ y se sustituye en la expresión del campo $\vec{E}$.



Consideremos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L, concéntrica con el alambre. El campo $\vec{E}$ es normal y constante en la superficie curva y es nulo en las tapas planas. El flujo eléctrico es $\Phi = (2\pi rL)E$, y la carga encerrada, $Q = \lambda L$. Aplicando la ley de Gauss:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Como el campo es radial, $\vec{E}\bullet d\vec{r} = Edr$ y la diferencia de potencial entre el alambre de radio a y el cilindro de radio b es:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\bullet d\vec{r} = -\int_b^a Edr = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(\frac{a}{b}) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(\frac{b}{a})$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 \Delta V}{ln(b/a)}$$

Al sustituir λ se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\Delta V}{r\,ln(b/a)}\hat{r}$$

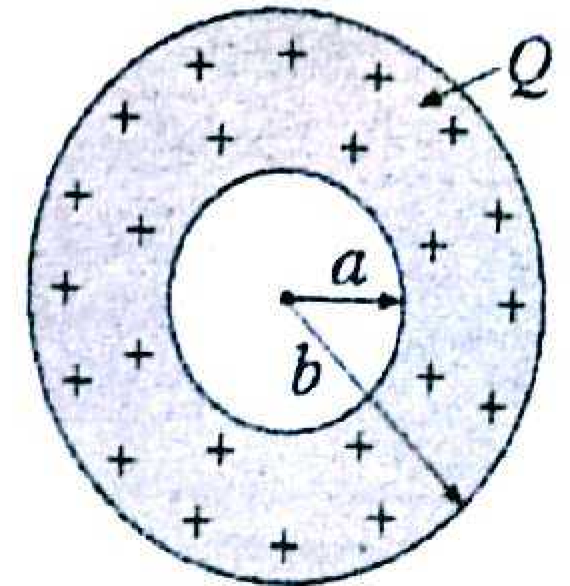
Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{\Delta V}{r\,ln(b/a)}\hat{r}$$

PR-4.22. ***Potencial de una cascarón esférico.***

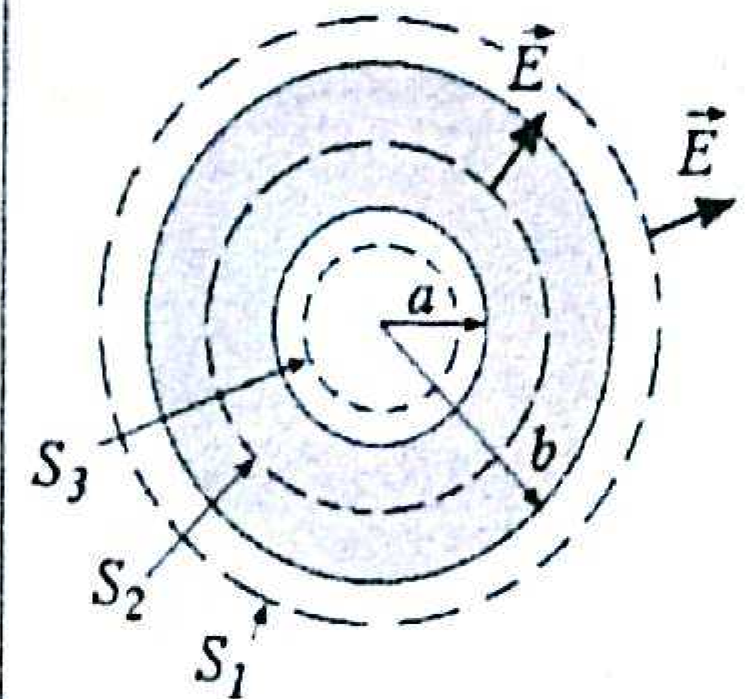
Una esfera sólida aislante de radio interior a y radio exterior b tiene una carga Q repartida uniformemente. Determine el potencial en función de la distancia r desde el centro. Considere las tres regiones:

a) $r > b$, b) $a < r < b$, c) $r < a$



Solución: a) En la región exterior $r > b$ hallamos el campo eléctrico tomando una esfera gaussiana S_1 de radio r. El campo es radial y de valor constante, de modo que el flujo es $\Phi = 4\pi r^2 E$ y aplicando la ley de Gauss:

$$\vec{E} = (kQ/r^2)\hat{r}$$



Tomando el valor $V(\infty) = 0$, el potencial a distancia r es:

$$V(r) = V_\infty - \int_\infty^r \vec{E}\bullet d\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{kQ}{r^2}dr = \frac{kQ}{r}$$

b) En la región intermedia $a < r < b$, para determinar $\vec{E}$ tomamos la esfera gaussiana S_2 que encierra una carga:

$$Q_{enc} = (\frac{Q}{4\pi(b^3-a^3)/3})\frac{4\pi}{3}(r^3-a^3) = Q(\frac{r^3-a^3}{b^3-a^3})$$

Dividiendo esta carga por ε_0 e igualando al flujo: $\Phi = 4\pi r^2 E$, se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}(\frac{r^3-a^3}{b^3-a^3})\hat{r} \qquad a < r < b$$

La diferencia de potencial entre un punto a distancia radial r y un punto en la superficie exterior es:

$$V(r)-V_b=-\int_b^r Edr=-\frac{kQ}{b^3-a^3}\int_b^r(r-\frac{a^3}{r^2})dr$$

$$V(r)-V_b=-\frac{kQ}{b^3-a^3}[\frac{r^2-b^2}{2}+a^3(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})]$$

Debido a la continuidad del potencial el valor de V_b es el mismo que el de los puntos exteriores, es decir: $V_b=kQ/b$. Reemplazando y reagrupando términos:

$$V(r)=\frac{kQ}{b^3-a^3}[\frac{3b^2}{2}-\frac{a^3}{r}-\frac{r^2}{2}] \qquad a<r<b$$

c) Para la región interior $r<a$ se toma una esfera Gaussiana S_3. Como la carga encerrada es cero, la ley de Gauss predice que el campo es nulo y por lo tanto el potencial es constante en esta región interna. Su valor se obtiene sustituyendo ($r=a$) en la expresión anterior:

$$V(r)=V_a=kQ\frac{3(b^2-a^2)}{2(b^3-a^3)} \qquad r<a$$

Respuesta:

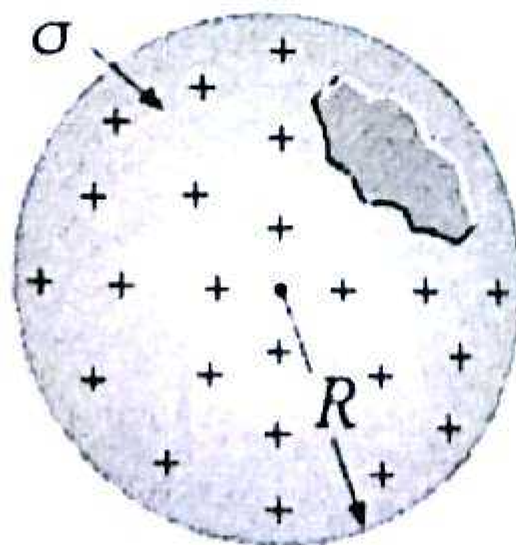
a) $r>b$: $V(r)=\frac{kQ}{r}$

b) $a<r<b$: $V(r)=\frac{kQ}{b^3-a^3}[\frac{3b^2}{2}-\frac{a^3}{r}-\frac{r^2}{2}]$

c) $r<a$: $V(r)=kQ\frac{3(b^2-a^2)}{2(b^3-a^3)}$

PR-4.23. *Cálculo directo de V para una esfera hueca*

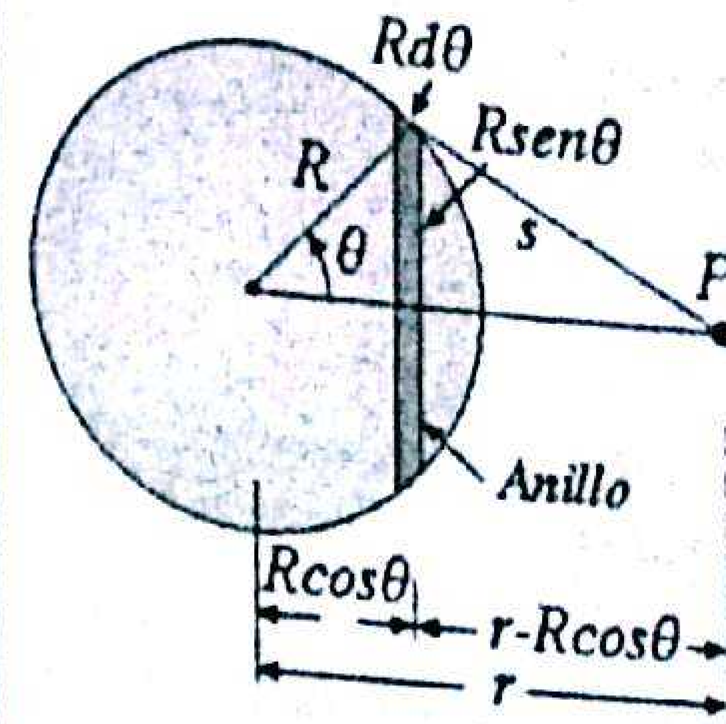
Un cascarón esférico de pared delgada y radio R tiene una carga con densidad superficial uniforme σ. Calcule mediante integración directa, el potencial eléctrico para puntos fuera de la esfera a distancia radial r.



Solución: Consideremos la esfera como constituida por una serie de anillos circulares. Un anillo de radio $Rsen\theta$ y espesor $Rd\theta$ cubre un área: $dA=(2\pi Rsen\theta)Rd\theta$ y de aquí que su carga es: $dQ=2\pi\sigma R^2 sen\theta d\theta$. Toda la carga de este anillo está a la misma distancia s del punto P y el potencial allí será:

$$dV=\frac{kdQ}{s}=\frac{k2\pi\sigma R^2 sen\theta d\theta}{\sqrt{(Rsen\theta)^2+(r-Rcos\theta)^2}}$$

$$dV=\frac{k2\pi\sigma R^2 sen\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2rRcos\theta}}$$



El potencial debido a toda la esfera se obtiene integrando por todos los valores del ángulo θ desde 0 hasta π.

$$V=\int dV=k2\pi\sigma R^2\int_0^\pi\frac{sen\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2rRcos\theta}}$$

$$V=k2\pi\sigma R^2\frac{\sqrt{R^2+r^2-2rRcos\theta}}{rR}\Bigg|_0^\pi$$

$$V=\frac{k2\pi\sigma R}{r}[\sqrt{(r+R)^2}-\sqrt{(r-R)^2}]=\frac{k2\pi\sigma R}{r}[2R]$$

$$V=\frac{k4\pi\sigma R^2}{r}=\frac{k4\pi(Q/4\pi R^2)R^2}{r}=\frac{kQ}{r}$$

En el interior de la esfera, como $E=0$, el potencial es constante, independiente de la distancia r y tiene un valor igual a kQ/r.

Respuesta:

$r>R$: $V=\frac{kQ}{r}$

$r<R$: $V=\frac{kQ}{R}$

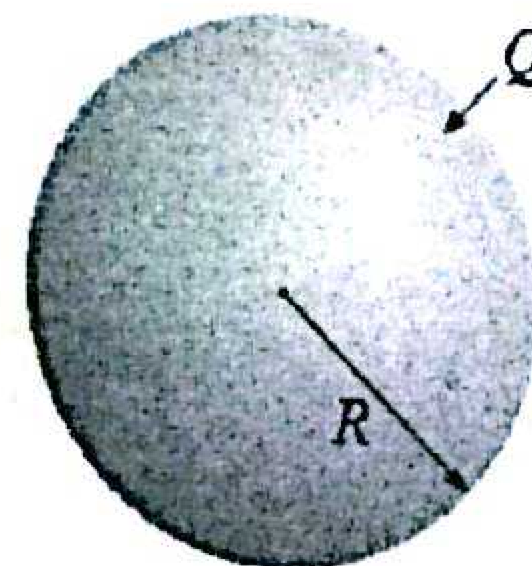
PR-4.24. *Potencial eléctrico de una esfera sólida*

Una esfera sólida aislante de radio R tiene una carga total uniforme Q. Considerando el potencial cero en $r=\infty$, determine el potencial en las dos regiones:

a) Fuera de la esfera ($r>R$)

b) Dentro de la esfera ($r<R$)

c) Haga una gráfica del potencial contra la distancia r desde el centro de la esfera.



Solución: a) Para la región externa ($r>b$) a partir de la ley de Gauss, hemos encontrado que el campo eléctrico de la esfera (o de cualquier distribución con simetría esférica) es:

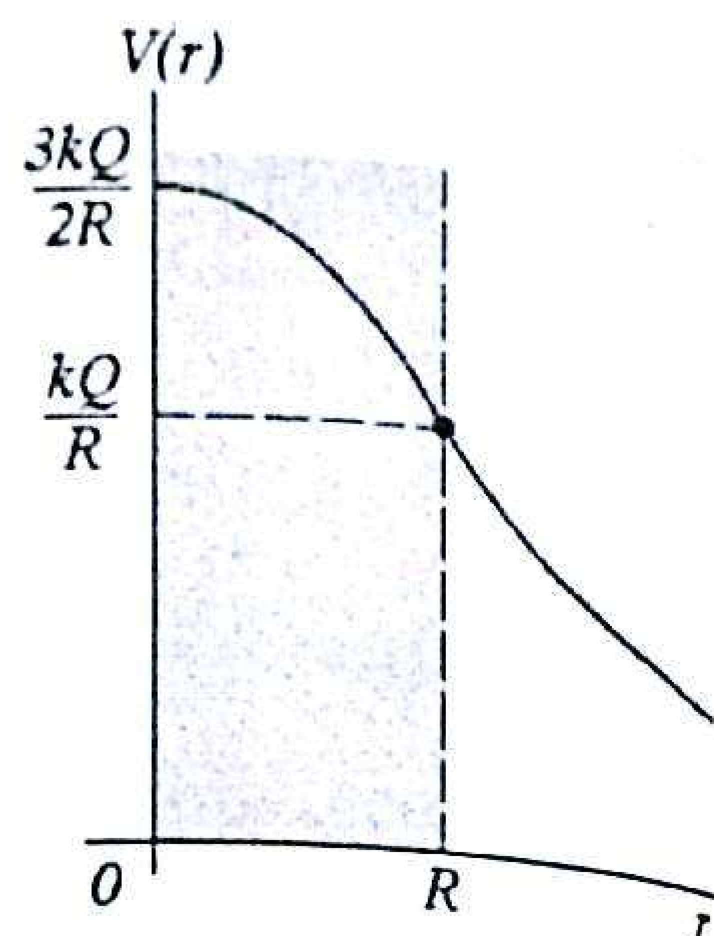
$$\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

De modo que el potencial a distancia r respecto al infinito es:

$$V(r)=V_\infty-\int_\infty^r\vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_\infty^r\frac{kQ}{r^2}dr=\frac{kQ}{r} \qquad (r>R)$$

b) Para la región interna ($r < R$), a partir de la ley de Gauss se obtiene el campo:

$$\bar{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} \qquad (r < R)$$



La diferencia de potencial entre un punto interior a distancia r y un punto en la frontera (a distancia R)es:

$$V(r) - V_R = -\int_R^r \bar{E} \bullet d\bar{r} = -\int_R^r \frac{kQr}{R^3} dr = -\frac{kQ}{2R^3}(r^2 - R^2)$$

Sustituyendo el valor del potencial en la frontera: $V_R = kQ/R$, obtenemos:

$$V(r) = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R^3}(r^2 - R^2) = \frac{kQ}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

Podíamos haber obtenido este resultado considerando que la esfera sólida es un caso especial de la esfera hueca del problema anterior con el radio interior $a = 0$ y el radio exterior $b = R$.

Respuesta:

$$V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad (r > R)$$

$$V(r) = \frac{kQ}{2R^3}(3R^2 - r^2) \qquad (r < R)$$

PR-4.25. ***Gotas cargadas que se unen.***

Sean $N = 27$ gotas esféricas de mercurio de radio r que tienen cargas iguales y están muy separadas entre sí. Las gotas están a un potencial $V_o = 1$ V y se unen para formar una sola gota. ¿Cuál será el potencial de la gota así formada?

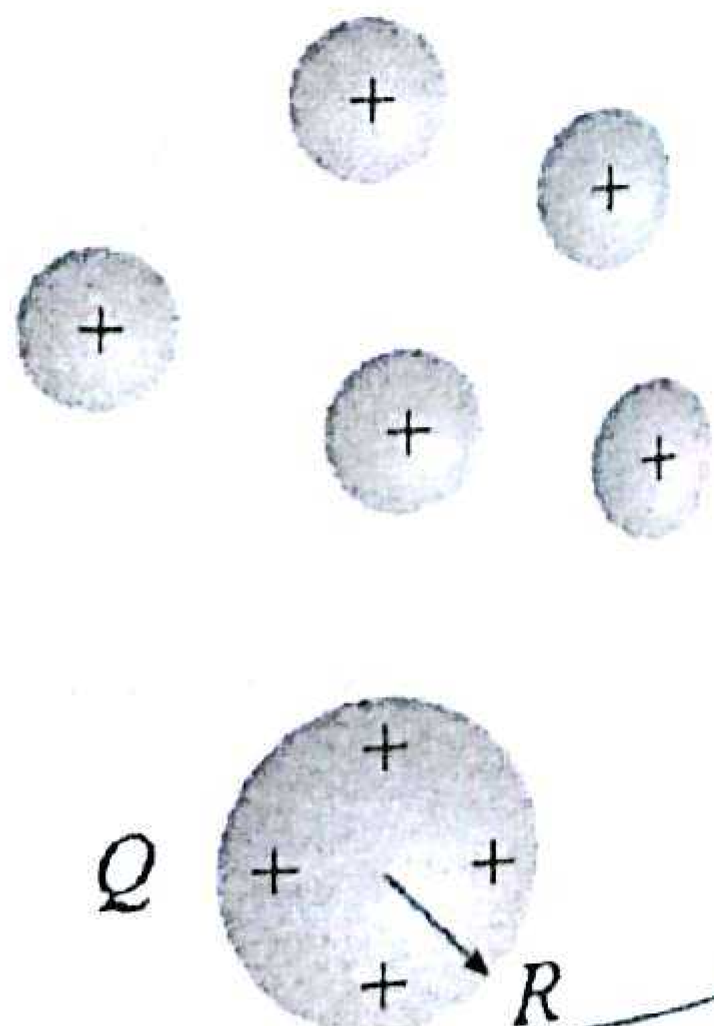
Solución: El volumen resultante de la gota grande debe ser igual a la suma de los volúmenes de las gotas individuales:

$$V = \sum_{i=1}^{N} v_i = N(\frac{4}{3}\pi r^3) = (\frac{4}{3}\pi R^3)$$

De modo que el radio R de la gota grande es:

$$R = N^{1/3} r$$

La carga total se conserva de modo que carga de la gota grande es igual a la suma de las cargas de todas las gotas pequeñas ($Q = Nq$).



Como las gotas de mercurio son buenas conductoras, tal que la carga en ellas se reparte uniformemente sobre su superficie, el potencial de la gota esférica grande es:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i = N(\frac{4}{3}\pi r^3) = (\frac{4}{3}\pi R^3)$$

De modo que en términos del potencial ($V_0 = kq/r$) de las gotas individuales, el potencial en la superficie de la gota grande es:

$$V = N^{2/3} V_0 = 27^{2/3}(1\text{v}) = 9\text{v}$$

Respuesta:

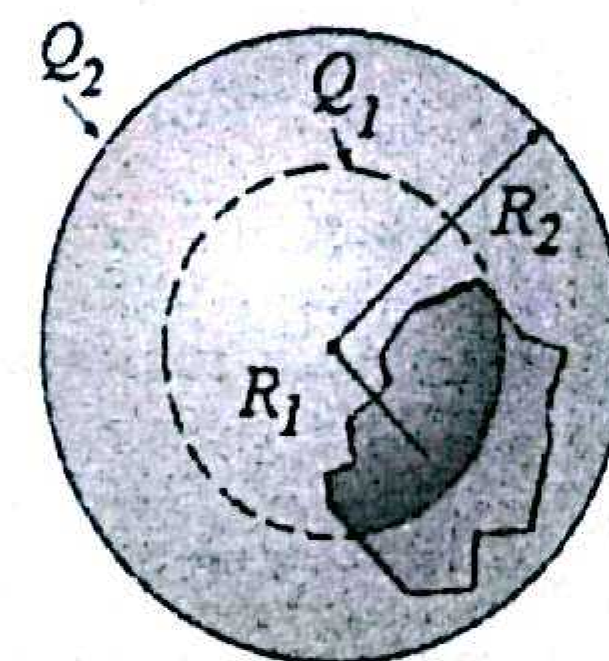
$$V = N^{2/3} V_0 = 9\text{v}$$

PR-4.26. ***Superposición de potenciales de esferas***

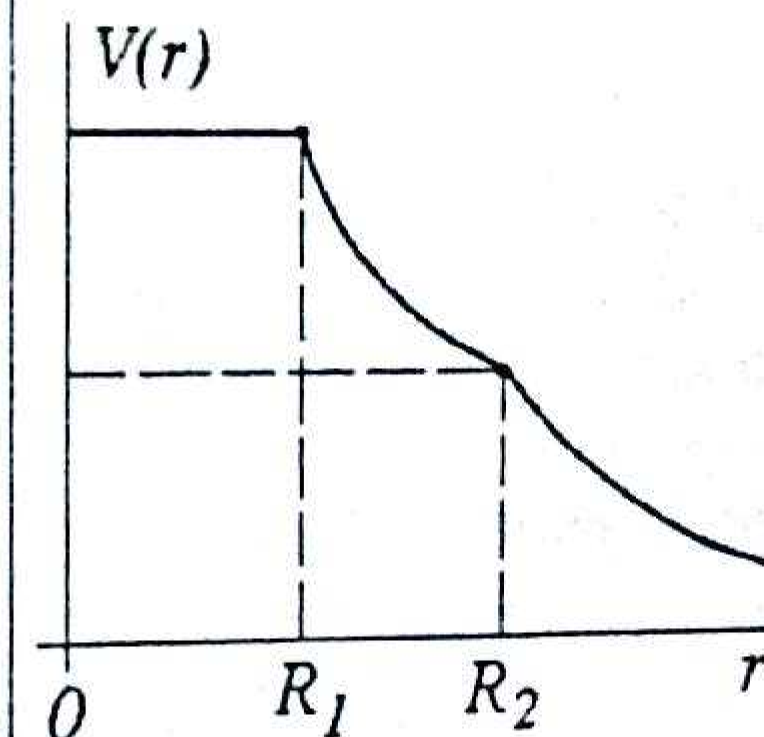
Dos conchas esféricas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 tienen cargas Q_1 y Q_2 respectivamente.

a) Determine el potencial eléctrico en todas las regiones, suponiendo $V = 0$. en $r = \infty$.

b) ¿Cual es la diferencia de potencial entre las dos esferas?



Solución: El principio de superposición nos permite calcular el potencial resultante en cada punto sumando los dos potenciales conocidos: 1) El potencial debido a la esfera interna como si la externa no existiese. 2) El potencial debido a la esfera externa como si la interna no existiese.



a) Debido a la simetría, las cargas en las esferas conductora se distribuyen uniformemente. Para la región exterior ($r>R_2$) las esferas se comportan como cargas puntuales y los potenciales por separado son: $V_1 = kQ_1/r$ y $V_2 = kQ_2/r$. La suma es:

$$V(r) = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{r} = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r} \qquad r>R_2$$

Para la región intermedia ($R_1<r<R_2$), los potenciales por separado son $V_1 = kQ_1/r$ y $V_2 = kQ_2/R_2$ = constante. La suma es:

$$V(r) = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{R_2} \qquad R_1<r<R_2$$

Para la región interior ($r < R_1$), ambos potenciales son constantes: $V_1 = kQ_1/R_1$ y $V_2 = kQ_2/R_2$, respectivamente. La suma es:

$$V = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} \qquad r < R_1$$

b) Para hallar la diferencia de potencial entre las dos esferas, usamos la expresión de $V(r)$ para la región intermedia:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} \qquad V_2 = \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2}\right) - \left(\frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2}\right) = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Respuesta:

a) $V(r) = \dfrac{k(Q_1 + Q_2)}{r} \qquad r > R_2$

$V(r) = \dfrac{kQ_1}{r} + \dfrac{kQ_2}{R_2} \qquad R_1 < r < R_2$

$V = k\left(\dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{R_2}\right) \qquad r < R_1$

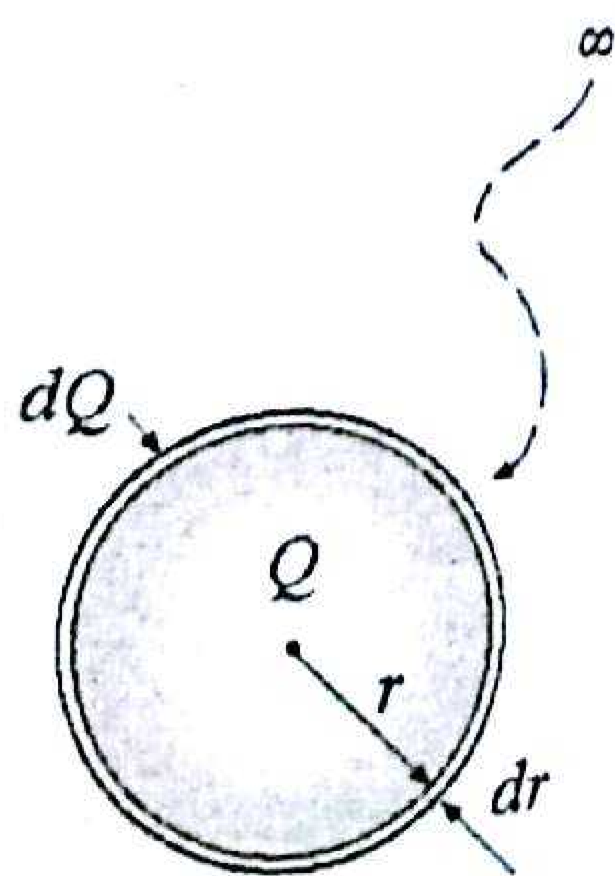
b) $V_1 - V_2 = kQ_1\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$

PR-4.27. *Energía de una esfera y radio del electrón*

Una esfera sólida de radio R tiene una carga uniforme Q.
a) Calcule la energía potencial electrostática de la esfera.
b) Según la teoría de la relatividad, una partícula en reposo tiene una energía $E = m_0c^2$, donde m_0 es su masa y c la velocidad de la luz. Imagine que esta es la energía electrostática del electrón con carga uniforme en todo su volumen y halle el radio clásico de un electrón.

Solución: a) Imaginemos que la esfera es construida añadiendo capas sucesivas de cascarones concéntricos. Supongamos que en una cierta etapa del proceso tengamos una esfera sólida de radio r con carga uniforme $Q(r)$. El potencial eléctrico en la superficie de esta esfera es:

$$V(r) = k\frac{Q(r)}{r} = k\frac{(4/3)\pi r^3\rho}{r}$$



Donde ρ es la densidad volumétrica de cargas. Si ahora traemos desde el infinito un cascarón esférico de radio r y carga dQ, el trabajo para realizar esta operación es:

$$dW = V(r)dQ = \left[k\frac{(4/3)\pi r^3\rho}{r}\right]\left[\rho 4\pi r^2 dr\right]$$

$$dW = \frac{16}{3}k\rho^2\pi^2 r^4 dr$$

De modo que el trabajo total para construir la esfera completa por incrementos de sus radios desde $r = 0$ hasta $r = R$ es:

$$W = \int_0^R \frac{16}{3}k\rho^2\pi^2 r^4 dr = \frac{16}{3}k\rho^2\pi^2\frac{R^5}{5}$$

$$W = \frac{16}{3}k\left[\frac{Q}{(4/3)\pi R^3}\right]^2\pi^2\frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R}$$

$m_0 = 9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg
$e = 1{,}6\text{x}10^{-19}$ C
$c = 3\text{x}10^8$ m/s
$k = 9\text{x}10^9$ Nm²/C²

b) Para hallar el radio clásico del electrón igualamos el trabajo hecho en construirlo eléctricamente, con su energía relativista en reposo:

$$\frac{3}{5}\frac{ke^2}{r_e} = m_0c^2$$

Despejando r_e y sustituyendo los valores numéricos de las constantes, encontramos:

$$r_e = \frac{3}{5}\frac{ke^2}{m_0c^2} = \frac{3(9\text{x}10^9)(1{,}6\text{x}10^{-19})^2}{5(9{,}1\text{x}10^{-31})(3\text{x}10^8)^2} = 1{,}69\text{x}10^{-15}\text{m}$$

✍ Como dato curioso, diez años antes de que Einstein publicara su teoría de la relatividad, J. J. Thomson propuso que el electrón debía estar constituido por pequeñas partes que interactúan eléctricamente y sugirió que su energía era m_0c^2.

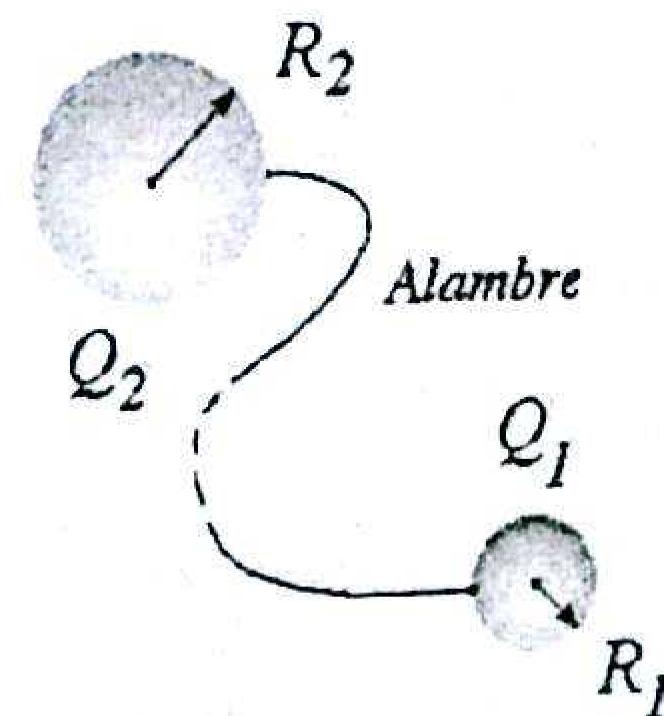
Respuesta:

a) $U = \dfrac{3}{5}\dfrac{kQ^2}{R}$

b) $r_e = 1{,}69\text{x}10^{-15}$m

PR-4.28. *Repartición de carga y el efecto de puntas en los conductores*

Dos conductores esféricos de radios distintos, R_1 y R_2 están separados por una distancia muy grande y se conectan mediante un alambre conductor delgado, compartiendo una carga total Q.
a) Halle la razón entre los campos eléctricos en las superficies de las esferas.
b) ¿Por qué es importante evitar puntas afiladas en los conductores que se utilizan en equipos de alto voltaje?



Solución: a) Si las esferas están muy alejadas una de la otra, y después de conectarlas la carga queda repartida en Q_1 y Q_2, los potenciales respectivos de las esferas son: $V_1 = kQ_1/R_1$ y $V_2 = kQ_2/R_2$. Por estar las esferas conectadas mediante un alambre, estarán al mismo potencial:

$$V_1 = V_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Como la carga total es:

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 + (R_2/R_1)Q_1$$

las cargas individuales serán:

$$Q_1 = Q\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad Q_2 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Podemos suponer que estas cargas son uniformes por estar las esferas muy separadas y no influye mucho una a la otra. Por lo tanto, los campos en las superficies de las esferas son:

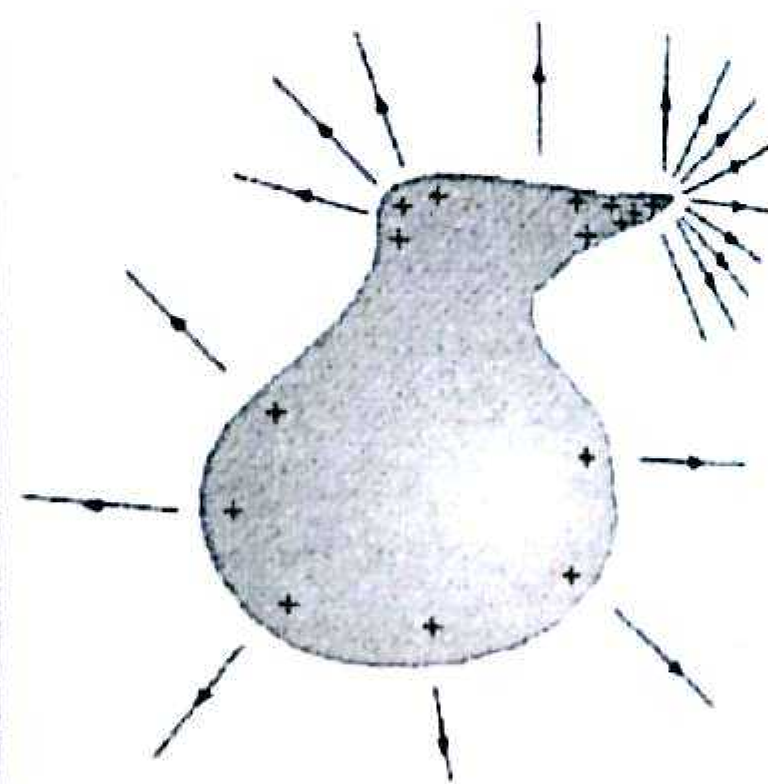
$$E_1 = k\frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{kQ}{R_1(R_1 + R_2)} \qquad E_2 = k\frac{Q_2}{R_2^2} = \frac{kQ}{R_2(R_1 + R_2)}$$

De modo que la razón entre los campos eléctricos es:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\dfrac{kQ}{R_1(R_1 + R_2)}}{\dfrac{kQ}{R_2(R_1 + R_2)}} = \frac{R_2}{R_1}$$

En conclusión, *el campo eléctrico en la superficie del conductor (y la densidad de carga) es mayor donde el radio de curvatura local es menor.*

b) Como las cargas tienden a concentrarse en las zonas de menor radio de curvatura, es necesario evitar regiones puntiagudas en conductores que son usados en equipos de alto voltaje. Cuando E alcanza valores muy grandes (> 3×10^6 V/m), los electrones de las moléculas del aire circundante tienden a desprenderse (ionización) y se producen *chispazos* o descarga corona. Entre las aplicaciones del efecto de puntas, podemos mencionar: el pararrayos, las pinturas electrostáticas y los filtros electrostáticos para el humo de las chimeneas en las plantas industriales.



El campo eléctrico es muy intenso en las regiones puntiagudas de un conductor

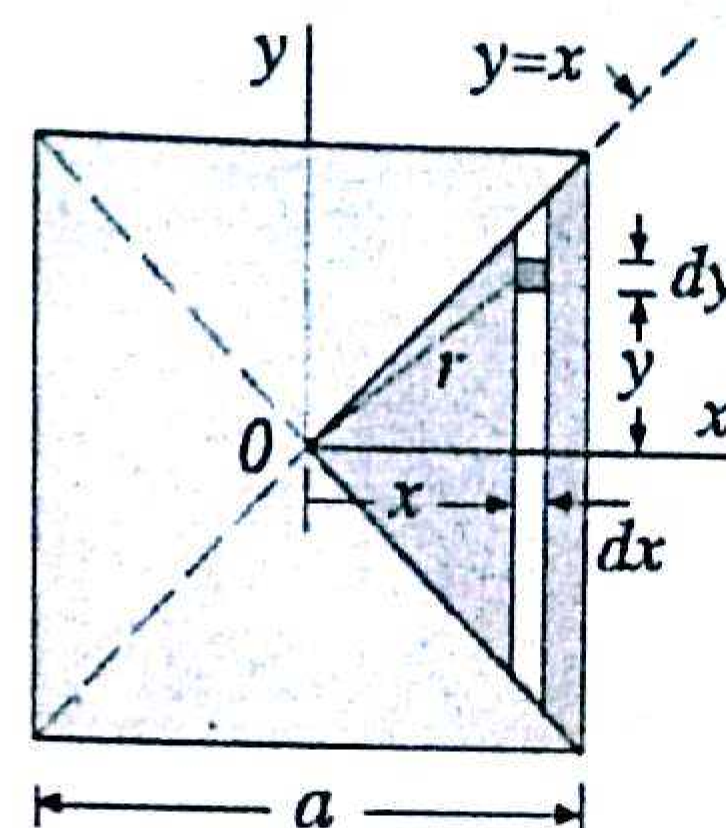
Respuesta:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

PR-4.29. Potencial en el centro de una placa cuadrada

Determine el potencial eléctrico en el centro de una placa cuadrada de lado a, que tiene una densidad de carga uniforme σ (C/m^2)

Solución: Para hallar el potencial en el centro de la placa se procede en varias etapas: 1) Se divide el cuadrado en cuatro regiones triangulares. 2) Se selecciona una franja delgada de ancho dx a distancia x del centro y se calcula su potencial. 3) Se suman los potenciales de todas las franjas que llenan la zona triangular. 4) Finalmente, el potencial total en el centro O será cuatro veces el potencial debido a una zona triangular.



Un elemento de área $dA = dxdy$ tendrá una carga $\sigma dxdy$ y su contribución al potencial en el punto central es:

$$dV = k\frac{\sigma dxdy}{r} = k\frac{\sigma dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

El potencial debido a la tira completa de largo $2y = 2x$ es:

$$V_{tira} = \int_{-x}^{+x} \frac{k\sigma dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2k\sigma dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V_{tira} = 2k\sigma dx[ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})]\Big|_0^x$$

$$V_{tira} = 2k\sigma dx\, ln(\frac{x + \sqrt{2}x}{x}) = 2k\sigma dx\, ln(1 + \sqrt{2})$$

El potencial debido a toda la sección triangular es la suma de los potenciales de todas las tiras ubicadas entre $x = 0$ y $x = a/2$:

$$V_{triang} = \int_0^{a/2} 2k\sigma\, ln(1 + \sqrt{2})dx = k\sigma a\, ln(1 + \sqrt{2})$$

Finalmente, como la placa cuadrada está formada por cuatro de tales secciones triangulares, el potencial total en el centro de la placa es:

$$V_{cuadr} = 4V_{triang} = 4k\sigma a\, ln(1 + \sqrt{2})$$

Respuesta

$$V = 4k\sigma a\, ln(1 + \sqrt{2})$$

PR-4.30. *¿Cómo está distribuida esta carga?*

Una distribución esférica de cargas desconocida produce los potenciales eléctricos siguientes:

Región $r \le R$: $V(r)=\frac{kQ_0}{R}[4(\frac{r}{R})^2-3]$

Región $r > R$: $V(r)=\frac{kQ_0}{r}$

a) Determine el campo eléctrico para $r \le R$ y para $r > R$.
b) Determine la distribución de cargas que produce este potencial.

Solución: a) Debido a la simetría esférica el campo eléctrico tiene solo componente radial y podemos obtenerlo derivando el potencial:

$$\vec{E}(r)=-(\partial V/\partial r)\hat{r}$$

Por lo tanto:

$$E(r)=-\frac{\partial}{\partial r}\frac{kQ_0}{R}[4(\frac{r}{R})^2-3]=-8\frac{kQ_0}{R^3}r \qquad r\le R$$

$$E(r)=-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{kQ_0}{r})=\frac{kQ_0}{r^2} \qquad r>R$$

b) Aplicamos la ley de Gauss a una esfera gaussiana interna S_1 de radio $r<R$:

$$\oint_{S_1}\vec{E}\bullet d\vec{A}=E(4\pi r^2)=\frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$Q(r)=\varepsilon_0(-8\frac{kQ_0}{R^3}r)(4\pi r^2)=-8Q_0(\frac{r}{R})^2$$

Por lo tanto, la carga encerrada justamente por debajo de la superficie esférica de radio R es:

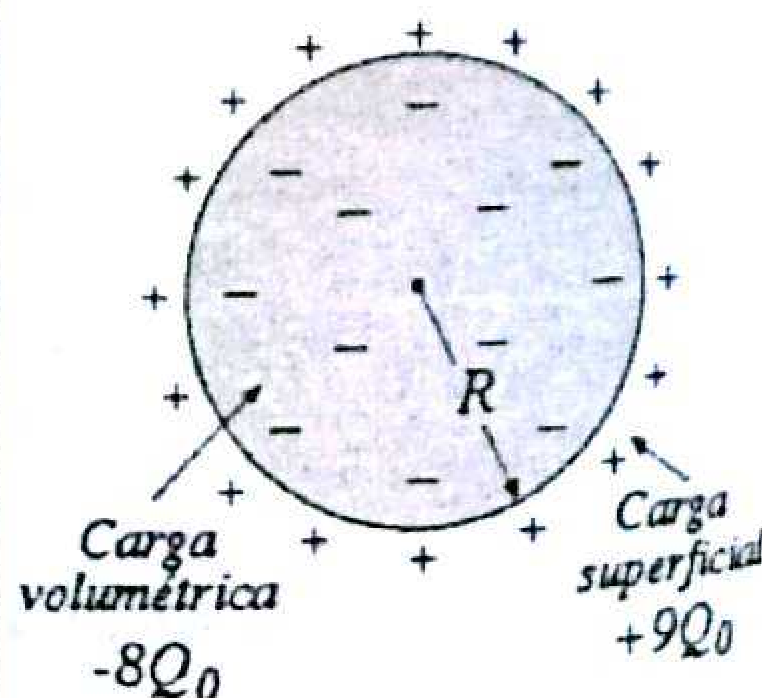
$$Q(r<R)=-8Q_0$$

Para hallar la carga total de la distribución, consideramos la superficie gaussiana exterior S_2. Aplicando la ley de Gauss:

$$\oint_{S_2}\vec{E}\bullet d\vec{A}=E(4\pi r^2)=\frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$Q(r\ge R)=\varepsilon_0(\frac{kQ_0}{r^2}r)(4\pi r^2)=Q_0$$

Es decir, para cualquier esfera imaginaria de radio arbitrario, la carga encerrada tiene el valor Q_0.



Esto significa que la carga debe llegar solo hasta la superficie esférica $r=R$ y la carga externa debe ser cero:

$$Q(r>R)=0$$

Ahora bien, para que la carga total de la distribución sea Q_0, debe haber una carga Q_S distribuida sobre la superficie de la esfera, tal que:

$$Q_S+(-8Q_0)=Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q_S=+9Q_0$$

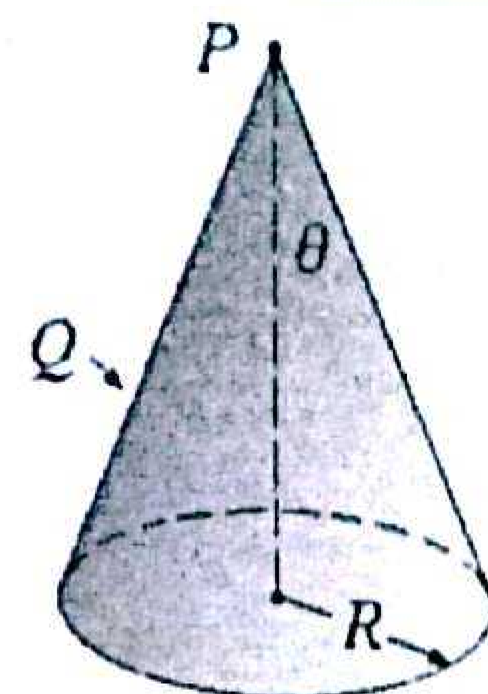
La existencia de una densidad de carga superficial σ_s era de anticiparse en virtud de la discontinuidad del campo $\vec{E}$ en la frontera.

Respuesta

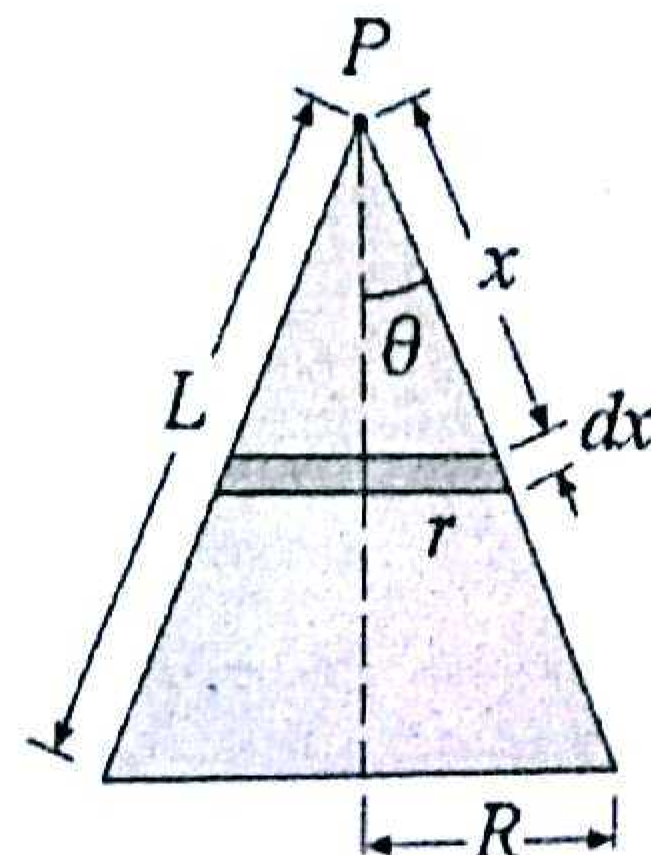
a) $r\le R$: $\vec{E}(r)=-8\frac{kQ_0 r}{R^3}\hat{r}$
$r>R$: $\vec{E}(r)=\frac{kQ_0}{r^2}\hat{r}$
b) Volumen: $Q_V=-8Q_0$
Superficie: $Q_S=+9Q_0$

PR-4.31. *Un cono cargado y una carga en la punta*

Un cono circular recto está hecho de un material aislante y tiene una densidad de carga uniforme, σ, en su superficie cónica. El cono abarca un ángulo 2θ y su base tiene un radio R. Determine el potencial eléctrico en el punto vértice P y el trabajo requerido para traer una carga q desde muy lejos y colocarla en ese punto.



Solución: Se procede a dividir la superficie cónica en cintas circulares o anillos. Un anillo a distancia x del punto P tiene un radio $r=x\,sen\theta$ y un espesor dx. Si σ es la densidad superficial de carga del cono, el anillo tendrá una carga elemental $dQ=\sigma(2\pi r dx)$ y produce en el punto P un potencial:



$$dV=k\frac{dQ}{x}=k\frac{\sigma 2\pi x\,sen\theta dx}{x}=k\sigma 2\pi\,sen\theta dx$$

Ahora pasamos a integrar esta expresión desde $x=0$ hasta $x=L$ para hallar el potencial total:

$$V=\int_0^L k\sigma 2\pi\,sen\theta dx=k\sigma 2\pi\,sen\theta\int_0^L dx=k\sigma 2\pi L\,sen\theta$$

Tomando en cuenta que $L\,sen\theta=R$, encontramos:

$$V=2\pi k\sigma R$$

y el trabajo para traer una carga q desde el infinito es:

$$W=qV=2\pi kq\sigma R$$

Respuesta

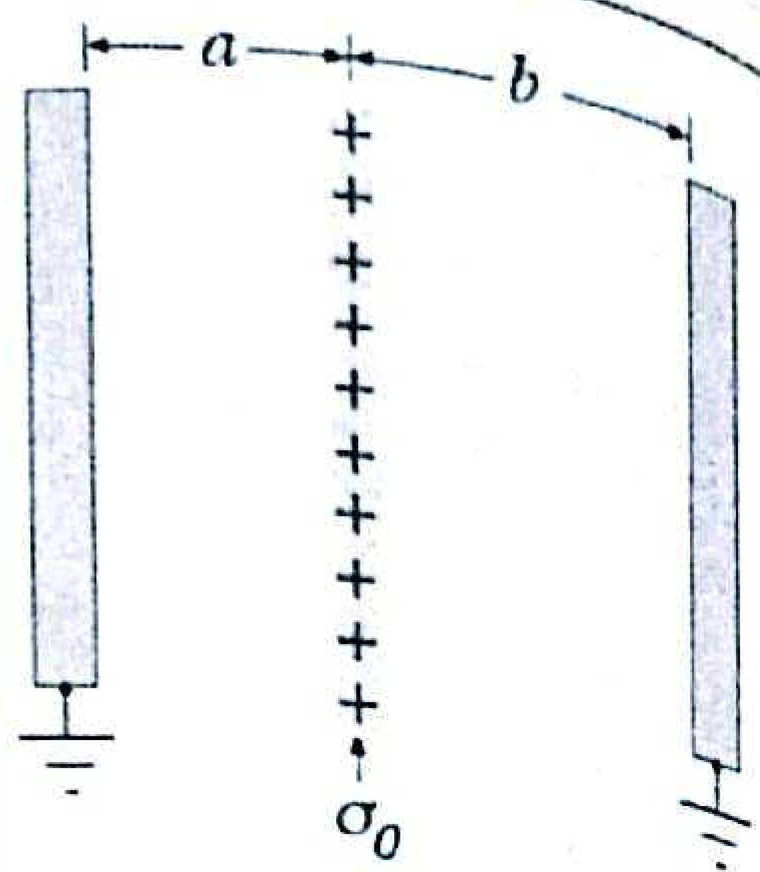
$V=2\pi k\sigma R$
$W=qV=2\pi kq\sigma R$

PP-4.32. *Hoja cargada entre dos láminas metálicas*

Una hoja infinita de carga con densidad uniforme σ_0 se coloca entre dos láminas metálicas grandes paralelas que están conectadas a tierra. La distancia entre la hoja de carga y las láminas son a y b respectivamente.

a) Determine las densidades superficiales de carga inducidas en las láminas metálicas.

b) Halle el campo $\vec{E}$ en las regiones entre las láminas.



Solución: La *tierra* eléctrica es cualquier cuerpo conductor suficientemente grande que sea capaz de suministrar (o aceptar) electrones sin límite. Debido a la presencia de la hoja cargada, las láminas metálicas reciben electrones provenientes de tierra y quedan con densidades de carga σ_a y σ_b.

Los campos eléctricos resultantes en las dos regiones son uniformes y se determinan aplicando la ley de Gauss. Para las superficies gaussianas S_1 y S_2 el campo es nulo en la cara que queda en el metal.

$$\oint_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_a A_1 = \frac{\sigma_a A_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_a = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_b A_2 = \frac{\sigma_b A_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

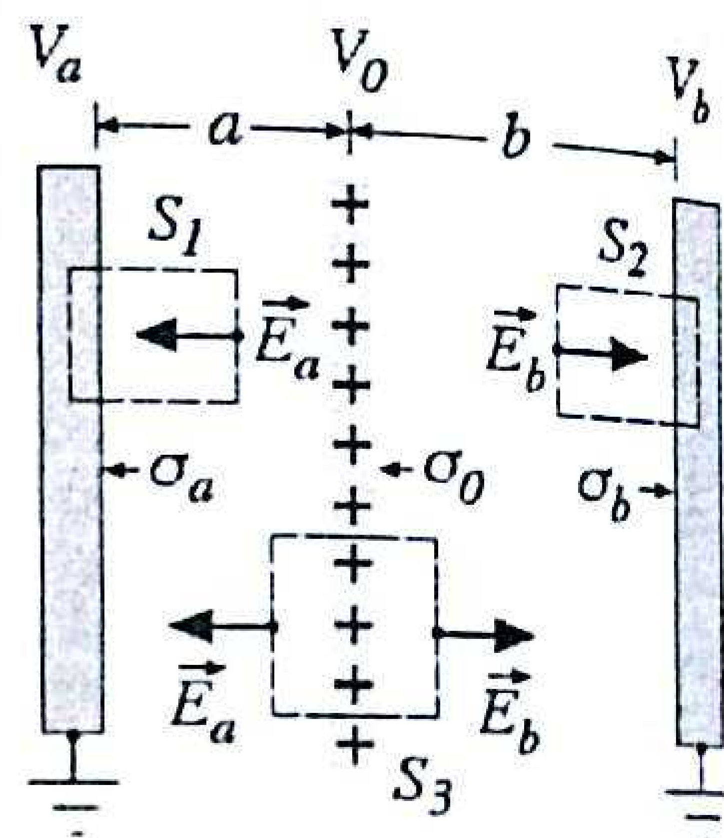
Para la superficie S_3 que encierra la hoja de carga:

$$\oint_{S_3} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_a A_3 + E_b A_3 = \frac{\sigma_0 A_3}{\varepsilon_0}$$

$$E_a + E_b = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Además, como $V_b = V_a$, la diferencia de potencial es:

$$V_0 - V_a = V_0 - V_b \quad \Rightarrow \quad E_a a = E_b b \qquad (4)$$



Combinando las ecuaciones (1) (2) (3) y (4), se obtiene:

$$\sigma_a = -\sigma_0\left(\frac{b}{a+b}\right) \qquad \sigma_b = -\sigma_0\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

Los campos eléctricos respectivos son:

$$E_a = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{b}{a+b}\right) \qquad E_b = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

Respuesta:

a) $\sigma_a = -\sigma_0\left(\frac{b}{a+b}\right)$

$\sigma_b = -\sigma_0\left(\frac{a}{a+b}\right)$

b) $\vec{E}_a = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{b}{a+b}\right)(-\hat{x})$,

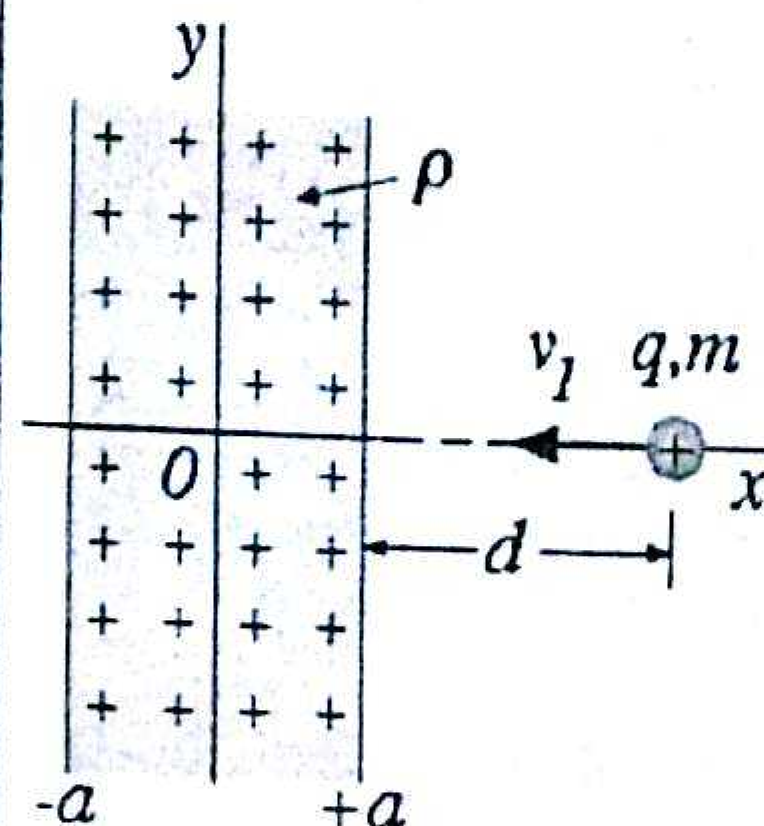
$\vec{E}_b = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a+b}\right)(+\hat{x})$

PR-4.33. *Lanzando carga puntual hacia lamina infinita*

Sea una lámina plana e infinita de espesor $2a$, que tiene una carga positiva uniforme con densidad volumétrica ρ.

a) Halle el potencial eléctrico en función de la distancia x, medida desde el plano medio de la lámina. Tome como referencia $V = 0$ en $x = 0$

b) ¿Qué velocidad se le debe imprimir a una partícula de masa m y carga positiva $+q$ desde una distancia d, para que sea capaz de llegar hasta la superficie de la lámina?

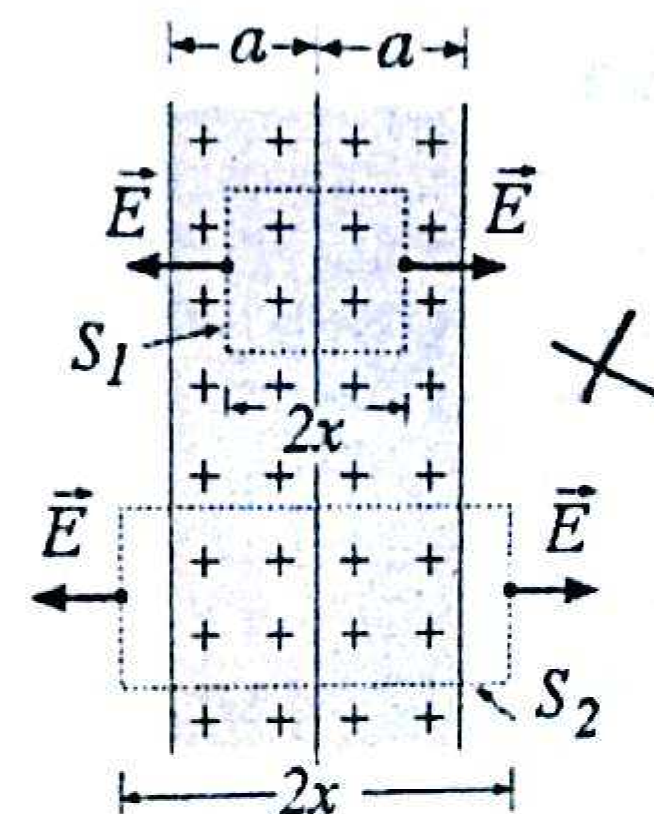


Solución: a) Primero hallamos el campo eléctrico en las distintas regiones aplicamos la ley de Gauss a cajitas cilíndricas de largo $2x$ centradas en $x = 0$. Para la región interior, $-a < x < a$, el flujo a través de la superficie S_1 es $2EA$ y la carga que contiene, $(2xA)\rho$. Por lo tanto:

$$\varepsilon_0(2EA) = 2xA\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \pm\left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} \qquad |x| < a$$

Para la región exterior, $|x| > a$, el flujo a través de la superficie S_2 es $2EA$ y la carga que contiene, $(2aA)\rho$. Por lo tanto:

$$\varepsilon_0(2EA) = 2aA\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \pm\left(\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} \qquad |x| > a$$



El potencial eléctrico en la región interna de la lámina es:

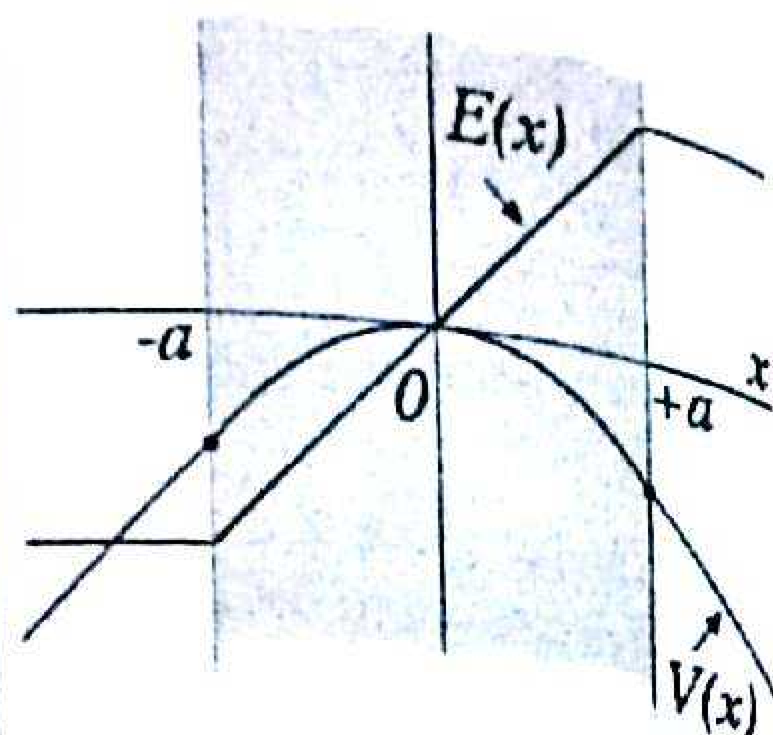
$$V(x) - V_0 = -\int_0^x \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\int_0^x \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)dx = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$$

$$V(x)=V_0-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$$

En particular, el potencial en la superficie de la lámina es:

$$V_a=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2$$

En los puntos exteriores a la lámina, $|x|>a$, la diferencia de potencial es:



$$V(x)-V_a=-\int_a^x \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_a^x\left(\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\right)dx=-\frac{\rho a}{\varepsilon_0}(x-a)$$

$$V(x)=V_a-\frac{\rho a}{\varepsilon_0}x=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2-\frac{\rho a}{\varepsilon_0}(x-a)=\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2}-x\right)$$

a) Para hallar la velocidad inicial, aplicamos la conservación de la energía entre las posiciones inicial $x_1=a+d$ y final, $x_2=a$

$$U_1+K_1=U_2+K_2 \quad\Rightarrow\quad qV_1+\frac{1}{2}mv_1^2=qV_2+0$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2q(V_2-V_1)}{m}}$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2q}{m}\left[\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(-\frac{a}{2}\right)-\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left[\frac{a}{2}-(a+d)\right]\right]}=\sqrt{\frac{2q\rho ad}{m\varepsilon_0}}$$

Respuesta

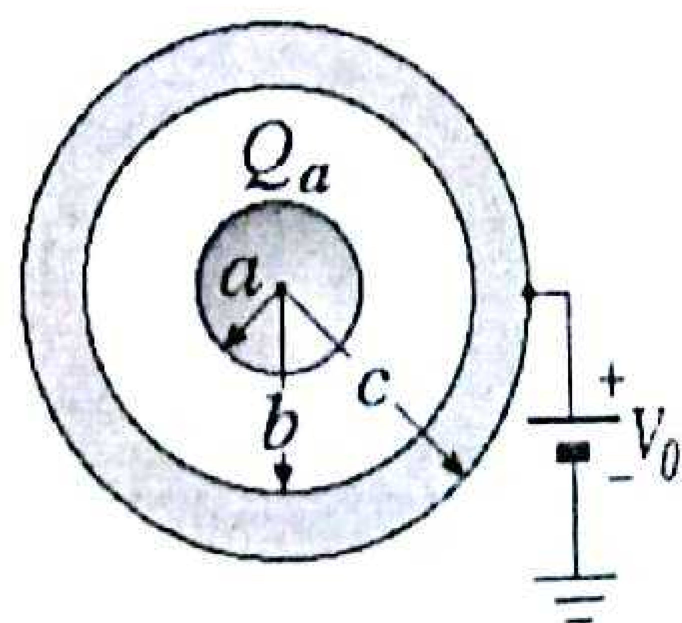
a) $x<a$: $V(x)=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$

$x>a$: $V(x)=\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2}-x\right)$

b) $v_1=\sqrt{\frac{2q\rho ad}{m\varepsilon_0}}$

PR-4.34. *Esferas metálicas concéntricas*

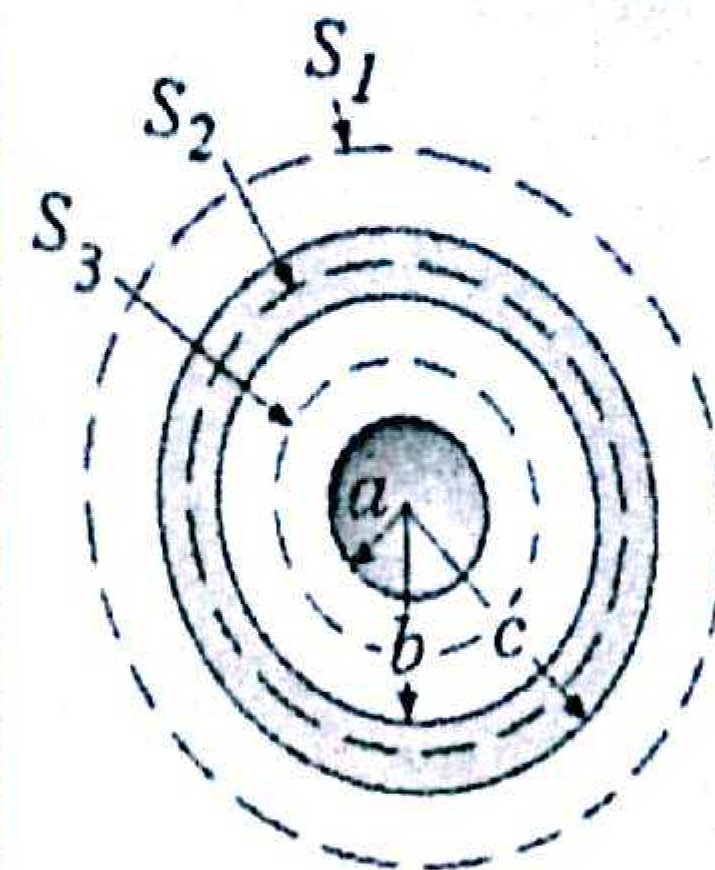
Una esfera metálica de radio a tiene una carga uniforme en su superficie, Q_a, y se encuentra rodeada de un cascarón metálico de radio interior b y radio exterior c. El cascarón está conectado a una batería de potencial V_0, el otro polo de la batería está conectado a tierra (un cuerpo conductor que puede suministrar o aceptar electrones con facilidad). Determine el potencial eléctrico en todas las regiones.



Solución: Consideremos una esfera gaussiana S_2 en el cuerpo del cascarón conductor, donde por ser $E=0$ el flujo es nulo y la carga neta encerrada será nula:

$$Q_a+Q_b=0 \quad\Rightarrow\quad Q_b=-Q_a$$

Aplicando la ley de Gauss a la superficie S_1, externa al cascarón:



$$\oint_{S_1}\vec{E}\bullet d\vec{A}=E(4\pi r^2)=\frac{Q_a+Q_b+Q_c}{\varepsilon_0}=\frac{Q_c}{\varepsilon_0}$$

El campo en la región exterior es:

$$E=\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r>c)$$

Como el potencial del cascarón es V_0, podemos escribir:

$$V_0=-\int_\infty^c \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_\infty^c\frac{Q_c dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

Luego, la carga en la superficie exterior del cascarón es:

$$Q_c=4\pi\varepsilon_0 cV_0$$

Para los puntos exteriores ($r>c$) el potencial será:

$$V(r)=-\int_\infty^r \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_\infty^r\frac{Q_c dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r}=\left(\frac{c}{r}\right)V_0$$

Aplicando Gauss a la esfera S_3 se obtiene el campo en la región $a<r<b$:

$$E(r)=\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Por lo tanto, el potencial eléctrico en esa región será:

$$V(r)=-\int_\infty^r \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_\infty^c \vec{E}\bullet d\vec{r}-\int_c^b \vec{E}\bullet d\vec{r}-\int_b^r \vec{E}\bullet d\vec{r}$$

$$V(r)=V_0+0-\int_b^r\frac{Q_a dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=V_0+\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$$

Por último, en cualquier punto $r<a$, el campo eléctrico es nulo y el potencial será constante:

$$V(a)=V_0+\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] \qquad (r<a)$$

Respuesta

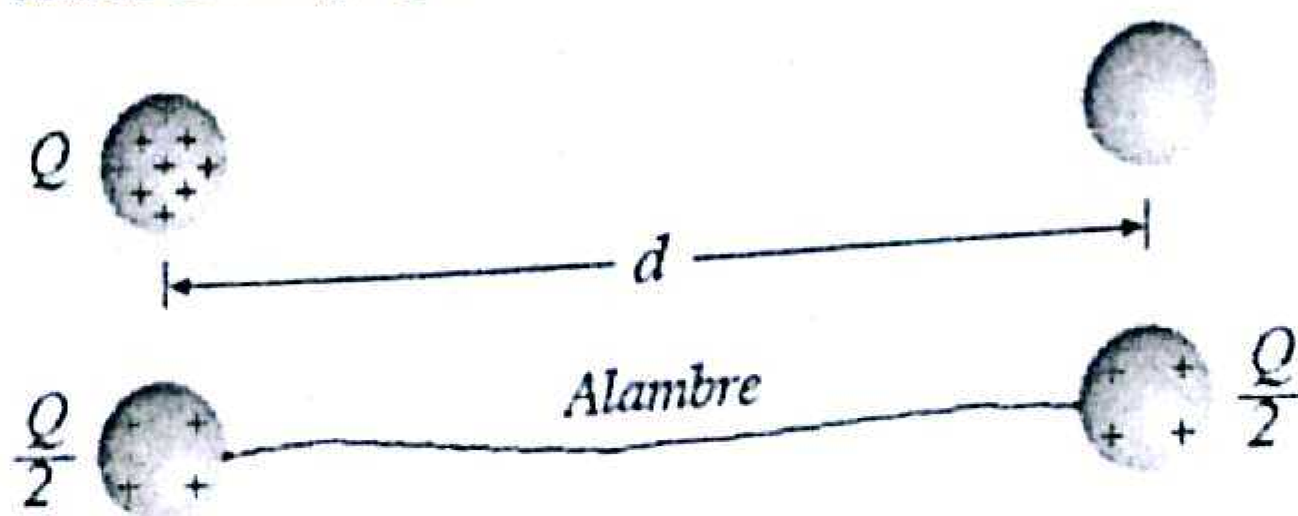
Región $r>c$:
$V(r)=\left(\frac{c}{r}\right)V_0$

Región $a<r<b$:
$V(r)=V_0+\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$

Región $r<a$:
$V(a)=V_0+\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$

PR-4.35. *Una paradoja de la energía electrostática*

Sean dos esferas metálicas idénticas de radio R, que están separadas por una distancia fija muy grande, $d >> R$. Se coloca una carga Q sobre una sola de las esferas.



a) Determine la energía potencial eléctrica total del sistema.
b) Si en la situación anterior se conectan las dos esferas mediante un alambre fino, la carga total se distribuirá en partes iguales, $Q/2$, en cada esfera. Calcule la nueva energía potencial y demuestre que esta es menor que la inicial. ¿Qué sucede con la conservación de la energía?

Solución: a) La energía potencial eléctrica propia de la esfera cargada se puede determinar por un proceso de carga, partiendo de cuando tiene una carga q y su potencial es kq/R, de modo que el trabajo para traer una carga adicional dq desde el infinito es Vdq. Sumando los trabajos para todas las porciones dq desde cero hasta completar la carga total Q, se obtiene:

$$U_1 = \int Vdq = \int_0^Q \frac{kq}{R}dq = \frac{1}{2}\frac{kQ^2}{R}$$

Esta es la energía total del sistema ya que la otra esfera no tiene carga y no hay energía de interacción entre ellas.

b) Después de conectar las esferas mediante un alambre, la carga fluirá y en equilibrio quedará repartida en partes iguales, $Q/2$. Como $d >> R$, podemos suponer que estas cargas se distribuyen uniformemente en cada esfera. En la configuración final, la energía electrostática total del sistema será la suma de las energías propias mas la de interacción entre las dos esferas:

$$U_2 = 2\left[\frac{1}{2}\frac{k(Q/2)^2}{R}\right] + k\frac{(Q/2)^2}{d} = k\frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{d}\right)$$

Si comparamos las energías inicial y final, encontramos:

$$U_2 - U_1 = \frac{kQ^2}{4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{d}\right) - \frac{1}{2}\frac{kQ^2}{R} = k\frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right) < 0$$

Que es una cantidad negativa, es decir, como resultado de la conexión de las esferas, la energía eléctrica total del sistema disminuyó, en aparente contradicción con la ley de conservación de la energía.

La paradoja se resuelve si recordamos que, cuando hemos calculado la energía propia de las esferas no se toma en cuenta, la energía de interacción que había entre las partes aisladas de cada uno de los cuerpos cargados, y además, esta puede variar durante el desplazamiento mutuo para la redistribución de las partes. Así por ejemplo, la energía que falta puede haberse ido en calentamiento Joule o en radiación electromagnética durante la aceleración de las cargas cuando fluye la corriente en el alambre.

Respuesta:

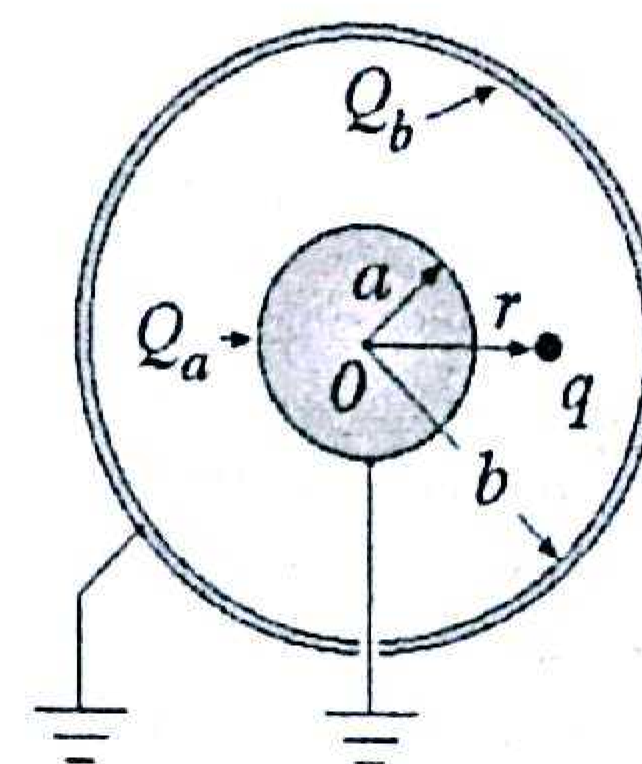
a) $U_1 = \frac{1}{2}\frac{kQ^2}{R}$,
b) $U_2 = k\frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{d}\right)$
$U_2 < U_1$, Parte de la energía electrostática se transforma.

PR-4.36. *Cargas inducidas en esferas puestas a tierra*

Dos esferas metálicas concéntricas de radios a y b, están conectadas a tierra y entre ellas se coloca una carga puntual q, a una distancia r tal que $a < r < b$ del centro. ¿Qué cargas se inducirán en las superficies de las esferas?

Solución: Cuando las esferas metálicas se conectan a una tierra eléctrica, pueden suministrar (o recibir) electrones, quedando con cargas Q_a y Q_b que se alojan en sus superficies. Es claro que solo hay campo eléctrico en la región comprendida entre las esferas, $a < r < b$. Escogiendo una esfera gaussiana en el cuerpo de la esfera grande, donde $E = 0$ la carga encerrada es cero, y por lo tanto:

$$Q_a + Q_b + q = 0 \qquad (1)$$



El potencial es constante en todos los puntos de la esfera pequeña, incluyendo el punto central O y es igual al potencial de tierra ($V_O = 0$). Este potencial es la suma del potencial debido a la carga q y los producidos por las cargas de las superficies esféricas, Q_a y Q_b. A pesar de que estas cargas inducidas están distribuidas en forma no uniforme sobre las esferas, están en posiciones equidistantes del punto O y podemos escribir:

$$V_O = k\left[\frac{Q_a}{a} + \frac{Q_b}{b} + \frac{q}{r}\right] = 0 \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$Q_a = -q\frac{(b-r)a}{(b-a)r} \qquad Q_b = -q\frac{(r-a)b}{(b-a)r}$$

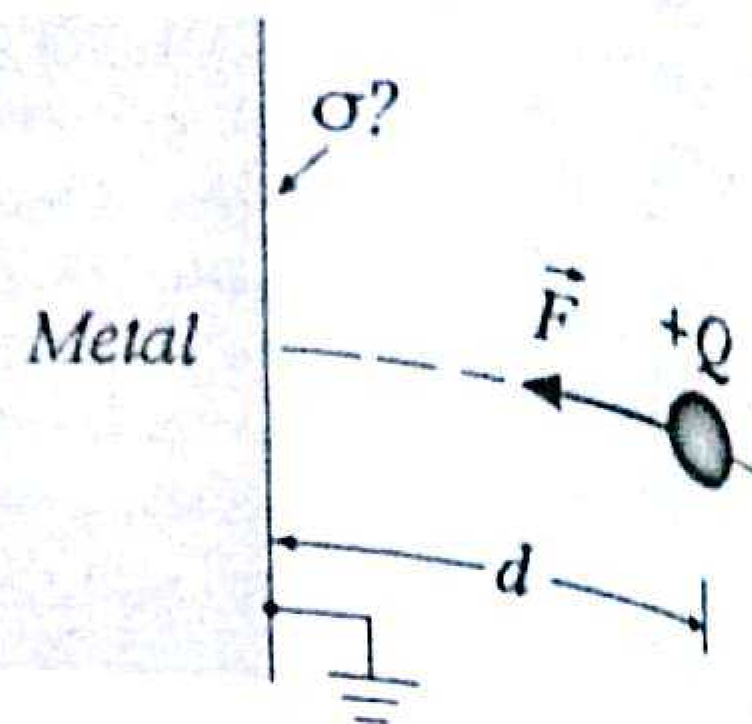
Se observa que las cargas inducidas son de signo contrario al de la carga q. En el caso particular en que el radio a es cero, queda entonces, $Q_a = 0$ y $Q_b = -q$.

Respuesta:

$Q_a = -q\frac{(b-r)a}{(b-a)r}$,
$Q_b = -q\frac{(r-a)b}{(b-a)r}$

PR-3.37. *Truco Ingenioso: El método de las imágenes*

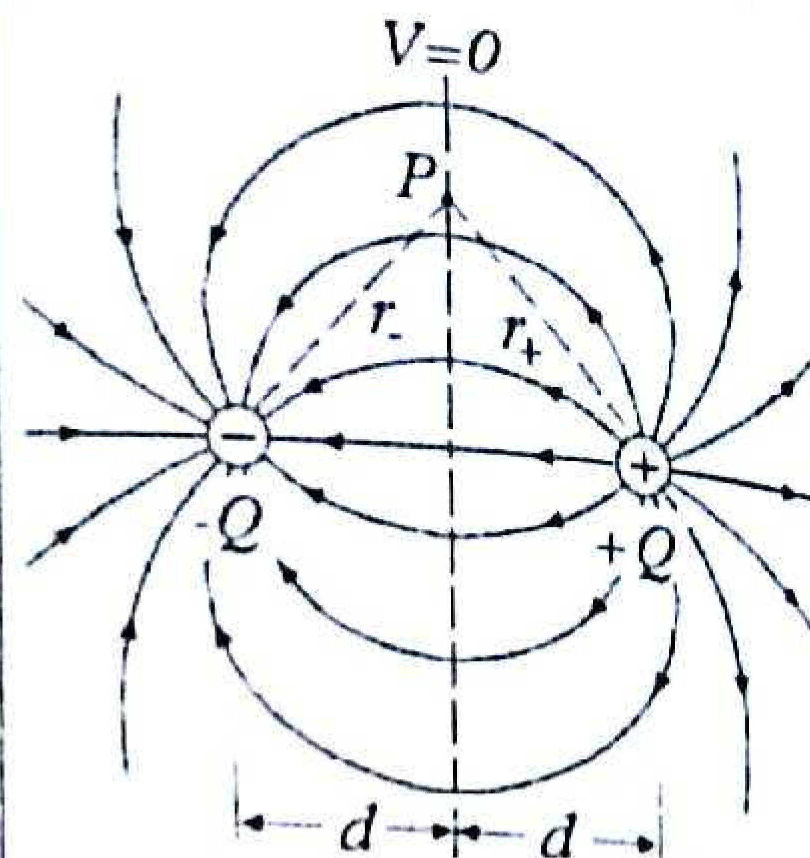
Una carga $+Q$ se encuentra a una distancia d de una lámina metálica infinita a potencial eléctrico cero. Esta carga induce una carga negativa en la superficie del plano.
a) ¿Cuál es la fuerza con que el plano atrae a la carga $+Q$?
b) ¿Cuál es la densidad superficial σ, de la carga inducida en el plano?
c) Usando la expresión obtenida para σ, calcule la carga total inducida en el plano y demuestre que es igual a $-Q$.



Solución: Para resolver problemas relacionados con cargas inducidas se aplica una técnica conocida en el electromagnetismo como el *método de las imágenes*.

Suponga que colocamos una carga $-Q$ a una distancia d al otro lado del plano del conductor y eliminamos la lámina conductora. El potencial producido por las dos cargas iguales y opuestas, $+Q$ y $-Q$ será nulo en cualquier punto P del plano imaginario que coincide con el de la lámina, ya que $r_+ = r_-$:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kQ}{r_+} - \frac{kQ}{r_-} = 0$$

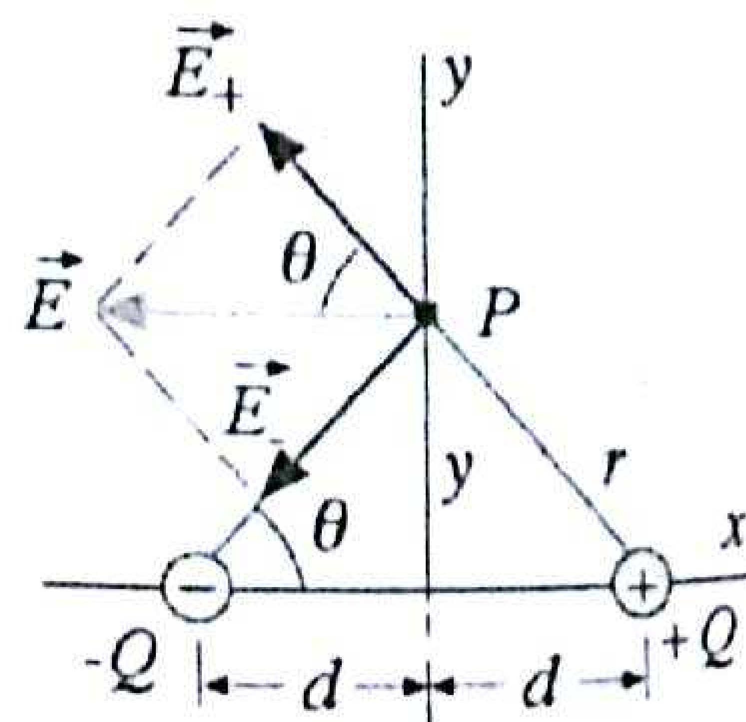


Plano conductor sustituido por carga imagen -Q

Además, las magnitudes de los campo eléctricos producidos por las dos cargas son iguales y sus componentes paralelas a la superficie se cancelan. El campo eléctrico en el plano imaginario resulta perpendicular a éste y las líneas de campo son simétricas. Por estas razones, es claro que las cargas superficiales inducidas con una densidad σ en el conductor producen un campo a la derecha que es equivalente al que produciría la *carga imagen* $-Q$ ubicada a la distancia d a su izquierda.

a) La fuerza atractiva que actúa sobre la carga puntual $+Q$ por parte de las cargas negativas inducidas en la superficie del metal, es igual a aquella fuerza con la que actuaría sobre ella la carga imagen $-Q$.

$$\vec{F} = k\frac{QQ}{(2d)^2}(-\hat{x}) = -\frac{kQ^2}{4d^2}\hat{x}$$



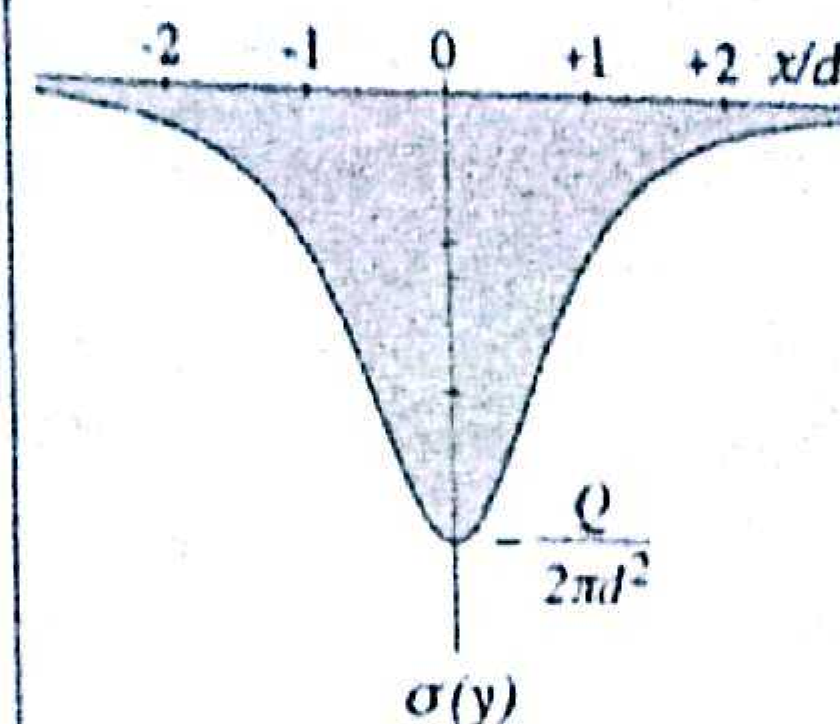
b) El campo eléctrico resultante en la superficie del plano es:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\hat{x}\,2\frac{kQ}{r^2}\cos\theta = -\hat{x}\frac{2kQd}{r^3} = \frac{-\hat{x}2kQd}{(y^2+d^2)^{3/2}}$$

Sabemos que el campo en la superficie de un conductor con una densidad superficial local σ, es $E = \sigma/\varepsilon_0$. Utilizando la expresión anterior, encontramos:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\frac{2k\varepsilon_0 Qd}{(y^2+d^2)^{3/2}} = -\frac{Qd}{2\pi(y^2+d^2)^{3/2}}$$

Siendo y la *distancia radial* en el plano desde su punto de intersección con la perpendicular a la carga $+Q$.



c) Para hallar la carga total, se integra por todo el plano. Tomamos como elementos de área, anillos de radio y y espesor dy, centrados en el punto de intersección del plano con la perpendicular a la carga:

$$Q_{ind} = \int_0^\infty \sigma(2\pi y dy) = -\int_{y=0}^\infty \frac{2k\varepsilon_0 Qd}{(y^2+d^2)^{3/2}}2\pi y dy$$

$$Q_{ind} = -Qd\int_{y=0}^\infty \frac{y dy}{(y^2+d^2)^{3/2}} = -Qd\left[-\frac{1}{\sqrt{y^2+d^2}}\right]_0^\infty = -Q$$

Respuesta:

a) $\vec{F} = -\frac{kQ^2}{4d^2}\hat{x}$

b) $\sigma(y) = -\frac{Qd}{2\pi(y^2+d^2)^{3/2}}$

c) $Q_{ind} = -Q$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-4.01. *Es correcto afirmar que......*

a) Si el potencial eléctrico es cero en un punto, entonces no existen cargas eléctricas en la vecindad de ese punto.

b) Si el potencial eléctrico es cero en un punto, el campo eléctrico también es cero en ese punto.

c) Si el campo eléctrico es cero en un punto, el potencial eléctrico también es cero en ese punto.

d) Si el campo eléctrico es uniforme en una región, el potencial eléctrico debe ser constante en dicha región.

e) Si el potencial eléctrico es constante en un volumen determinado, el campo eléctrico debe ser cero en todo ese volumen.

PE-4.02. *¿Cuál de estas afirmaciones no es correcta?*

a) Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.

b) En condiciones estáticas, todos los puntos de un conductor deben estar al mismo potencial eléctrico.

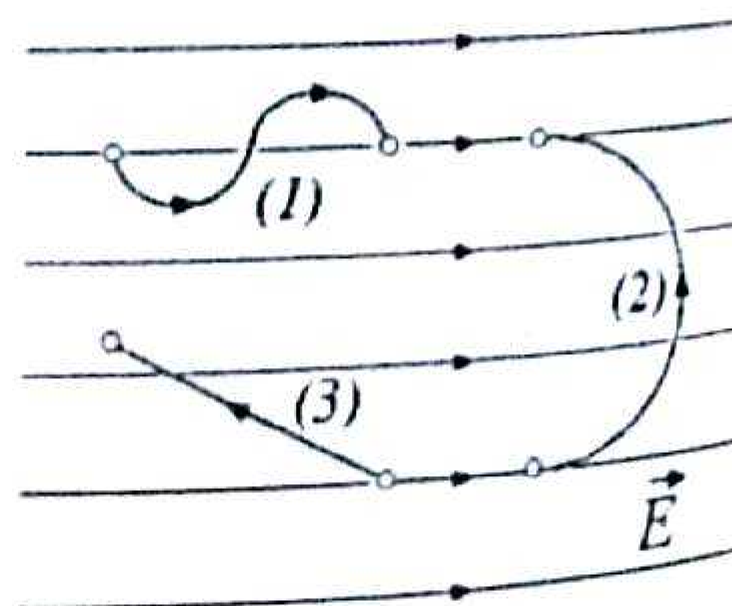
c) Los campos eléctricos siempre apuntan en la dirección decreciente del potencial eléctrico.

d) El potencial de un cuerpo cargado tiene el mismo signo que el de la carga que posee.

e) Si un electrón se suelta en un campo uniforme, se moverá hacia una región donde el potencial aumenta.

PE-4.03. *¿Por cuál camino se realiza más trabajo?*

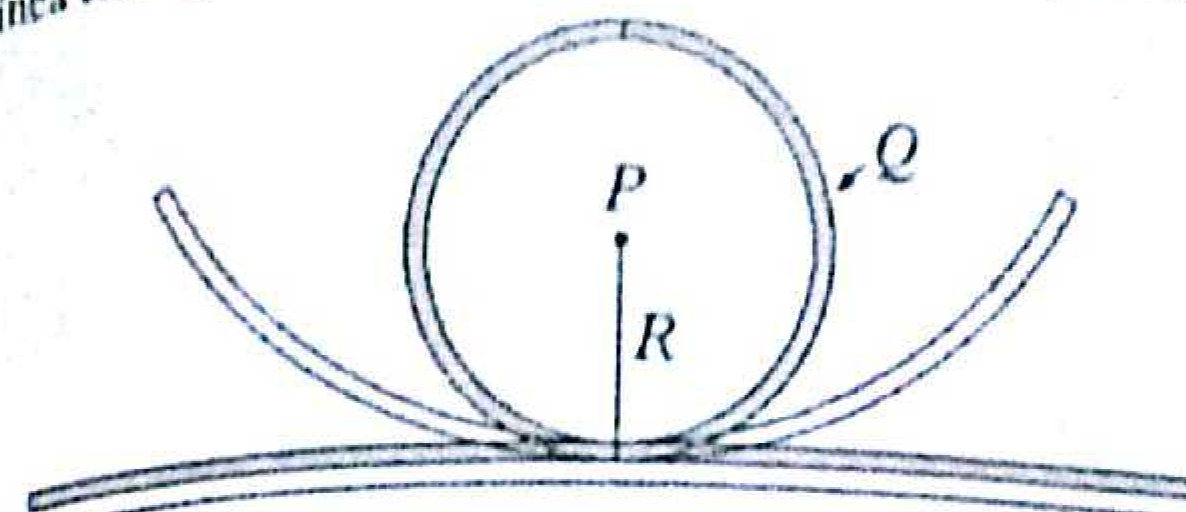
En un campo eléctrico uniforme, una carga positiva es trasladada por los tres caminos mostrados. ¿En cuál de estos caminos realiza mayor trabajo el agente externo?



a) $W_1 > W_2 > W_3$
b) $W_1 = W_2 = W_3$
c) $W_3 > W_2 > W_1$
d) $W_2 > W_3 > W_1$
e) $W_3 > W_1 > W_2$

PE-4.04. *Después de desdoblar el anillo de carga...*

Un anillo con carga uniforme $+Q$, de radio R, es cortado en un punto y desdoblado hasta que las cargas queden en línea recta y a la distancia perpendicular R del punto P.

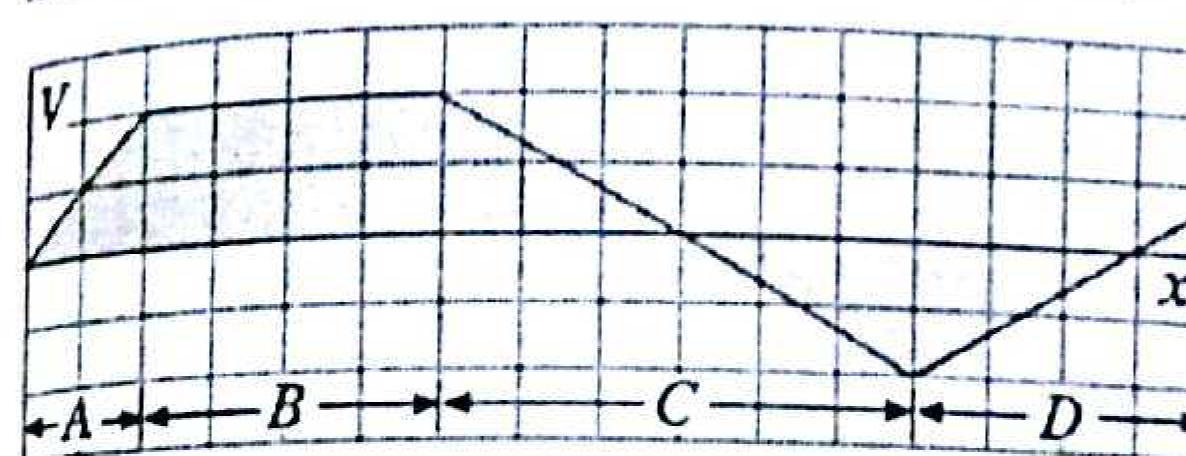


¿Qué sucede con el potencial y el campo eléctrico en el punto P?

a) V disminuye y E aumenta.
b) V y E ambos disminuyen
c) V y E ambos aumentan
d) V aumenta y E disminuye.
e) Tanto V como E quedan igual.

PE-4.05. *¿En cuál región es mas intenso el campo?*

En el dibujo se muestra el voltaje V(voltios) en función de la distancia x (metros) en una cierta región del espacio.



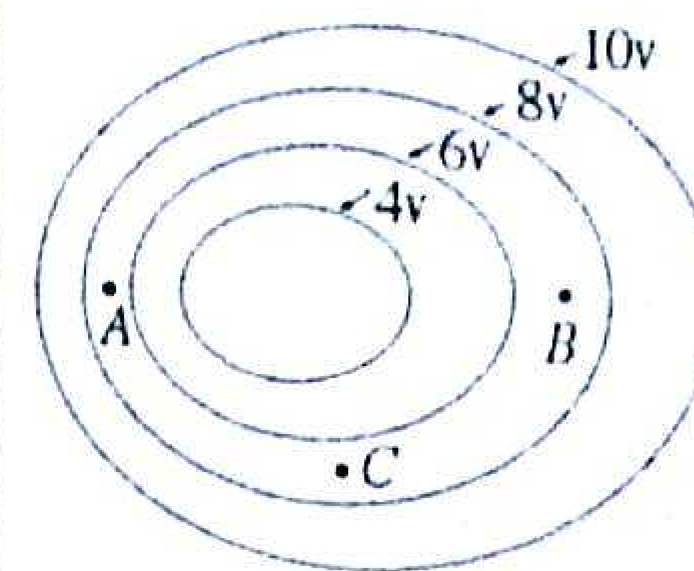
Al comparar el *módulo del campo eléctrico* en las cuatro regiones A, B, C y D, encontramos que:

e) $E_A = E_B > E_C = E_D$
b) $E_A > E_C = E_D > E_B$
c) $E_C > E_A = E_D = E_B$
d) $E_C > E_D = E_B > E_A$
e) $E_B > E_A = E_C > E_D$

PE-4.06. *Líneas equipotenciales y campos eléctricos*

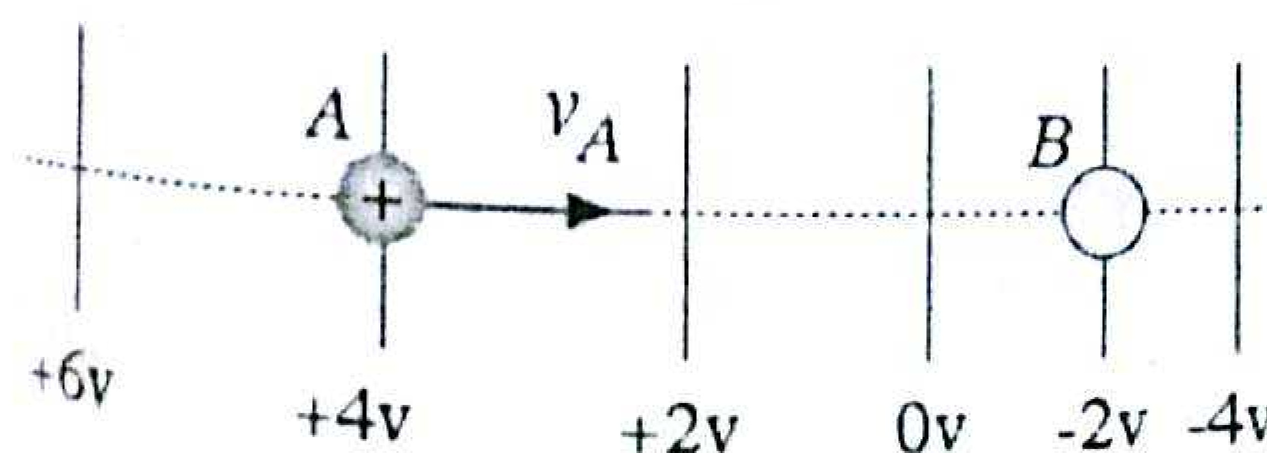
La figura muestra líneas equipotenciales en una región. Si comparamos el campo eléctrico en los puntos indicados, podemos afirmar que:

a) E es mayor en el punto A y apunta hacia la izquierda.
b) E es mayor en el punto A y apunta hacia la derecha.
c) E es mayor en el punto B y apunta hacia la izquierda.
d) E es mayor en el punto B y apunta hacia la derecha.
e) E es mayor en el punto C y apunta hacia abajo.



PE-4.07. *Lanzamiento de protones en campo eléctrico*

En el diagrama se representan varias superficies planas equipotenciales en una cierta región..



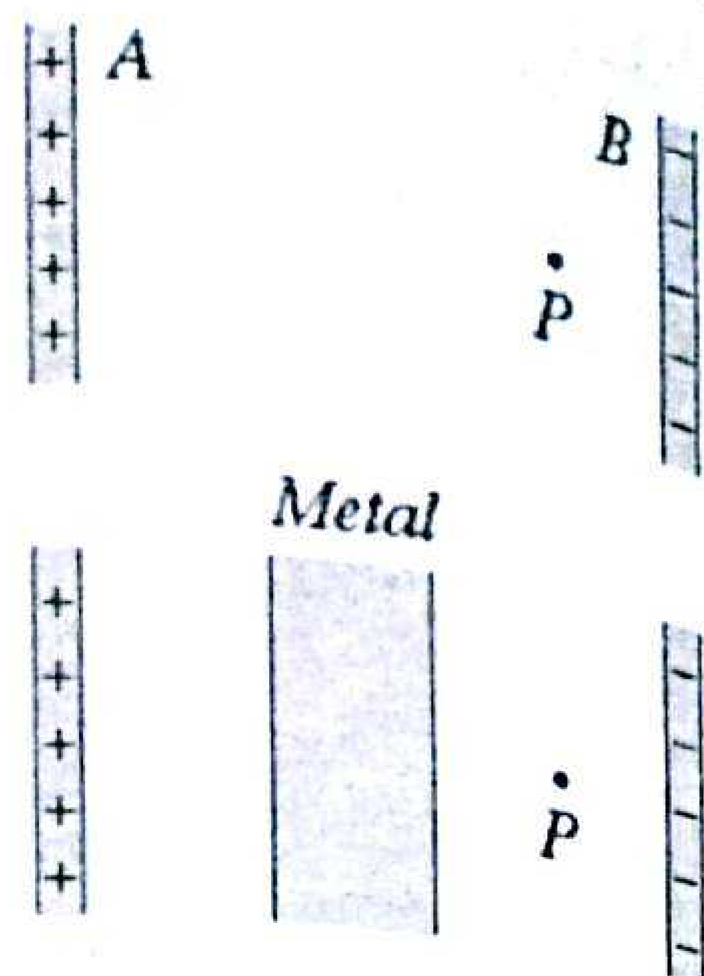
Se lanza un protón que cuando pasa por el punto A lleva una energía cinética de 10 eV. Cuando alcanza el punto B tendrá una energía cinética de:

a) 0 eV,
b) 2 eV,
c) 4 eV,
d) 12 eV,
e) 16 eV

PE-4.08. ***Insertando lámina metálica en un campo E.***

Dos hojas de carga, grandes y paralelas tienen densidades iguales y opuestas (*Fig. a*). Se introduce entre ellas una lámina metálica *gruesa* y sin carga neta *(Fig. b)*. Si consideramos la diferencia de potencial V_{AB} entre las hojas y la magnitud del campo eléctrico E_P en el punto P:

a) Tanto V_{AB} como E_P disminuyeron.
b) Tanto V_{AB} como E_P se mantuvieron constantes.
c) V_{AB} disminuyó y E_P se mantuvo constante.
d) V_{AB} aumentó y E_P disminuyó.
e) V_{AB} se mantuvo constante y E_P disminuyó.



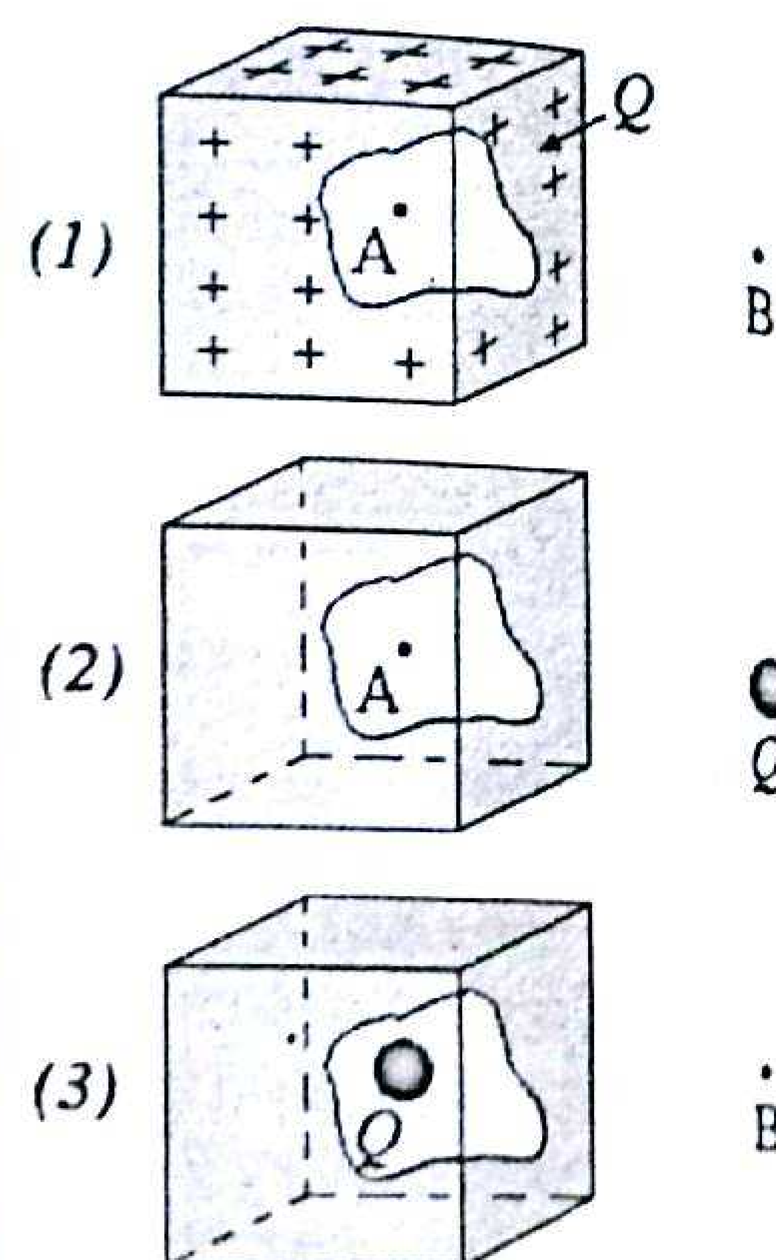
PE-4.09. ***Jaula de Faraday para blindaje electrostático***

Sea una caja metálica hueca completamente cerrada y sin carga neta. Considere las tres afirmaciones siguientes:

(1) Si se suministra a la caja metálica una carga neta Q, el campo E es nulo en cualquier punto interior A, pero es diferente de cero en un punto exterior B.
(2) Si se coloca una carga Q en el exterior de la caja, el campo E es nulo en cualquier punto interior, A.
(3) Si se coloca una carga Q dentro de la caja, entonces el campo E es nulo en cualquier punto exterior B.

Cuáles de las tres afirmaciones anteriores es correcta:

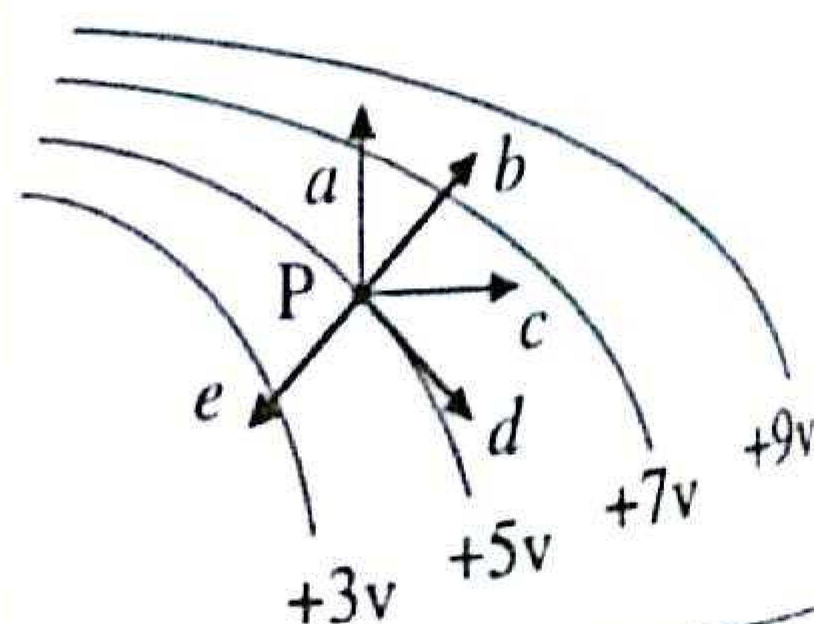
a) La (1) y la (3) son correctas, pero la (2) es incorrecta.
b) Unicamente la afirmación (1) es correcta.
c) La (2) y la (3) son correctas, pero la (1) es incorrecta.
d) La (1) y la (2) son correctas, pero la (3) es incorrecta.
e) Las tres afirmaciones son correctas.



PE-4.10. ***Equipotenciales y dirección del campo E***

En la figura se muestra un grupo de líneas equipotenciales en una cierta región.¿Cuál de las direcciones indicadas representa la dirección del campo eléctrico en el punto P?

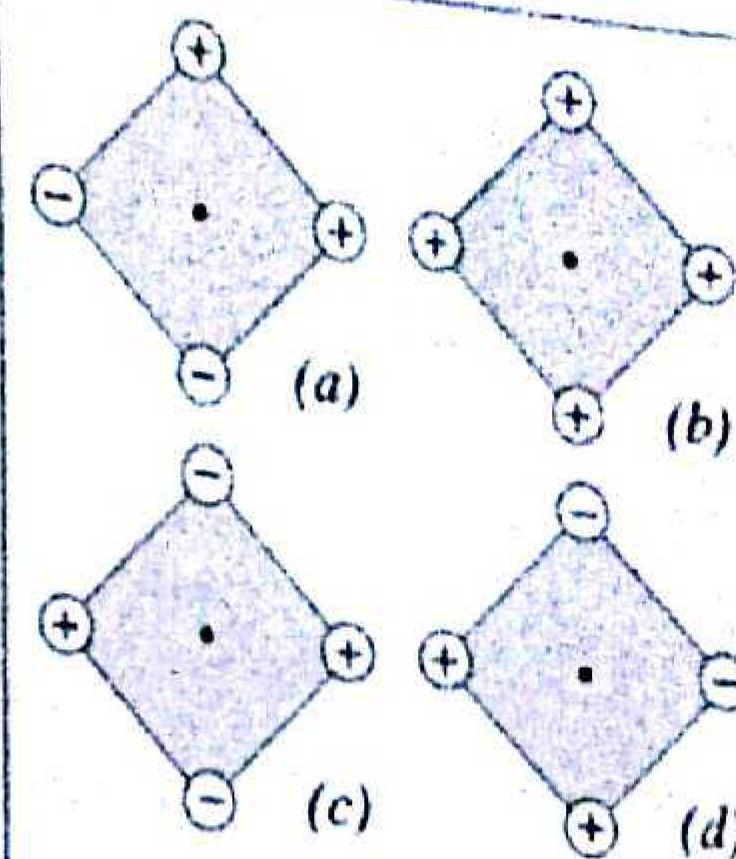
a) *a* b) *b* c) *c* d) *d* e) *e*



PE-4.11. ***Campo y potencial eléctrico ambos nulos***

Cuatro cargas puntuales de igual magnitud y con los signos indicados se colocan a igual distancia del origen, en cuatro diferentes configuraciones. ¿En cuál de estas configuraciones, tanto el campo eléctrico como el potencial eléctrico son nulos en el centro del rombo?

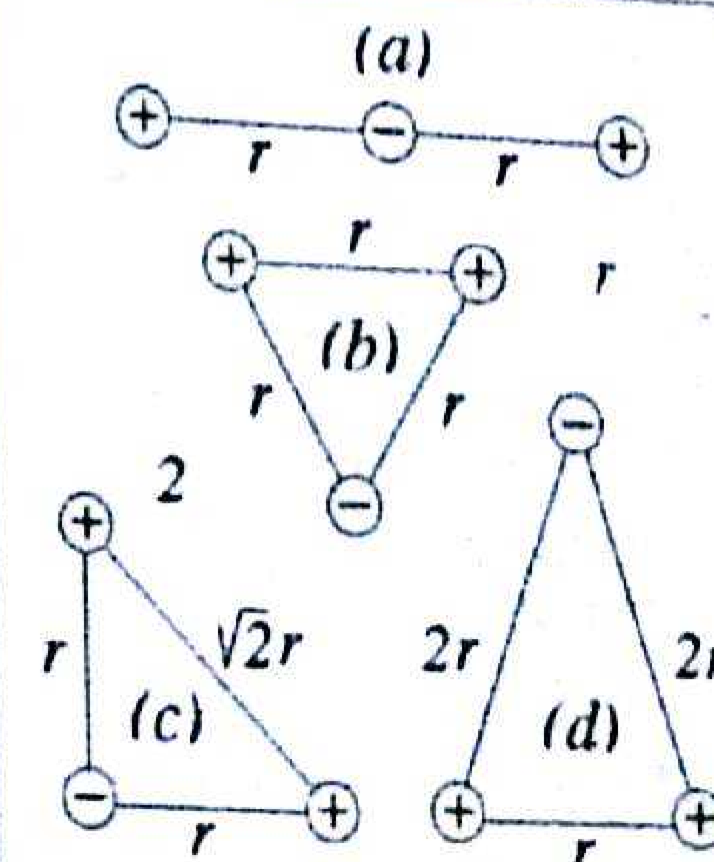
a) En *(a)*, b) En *(b)*, c) En *(c)*
d) En *(d)* e) En ninguna de estas.



PE-4.12. ***No hay necesidad de realizar trabajo***

Tres cargas puntuales de igual magnitud, dos positivas y una negativa, se colocan en las cuatro diferentes configuraciones mostradas. ¿En cuál caso, será nulo el trabajo realizado por el agente externo para ensamblar la configuración?

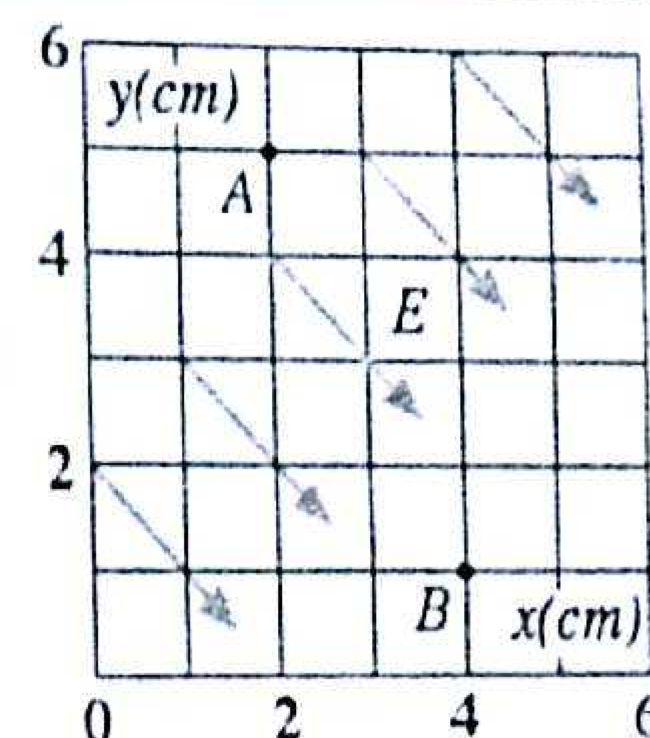
a) En *(a)*, b) En *(b)*, c) En *(c)*
d) En *(d)* e) En ninguna de estas



PE-4.13. ***Diferencia de potencial en un campo uniforme***

Un campo eléctrico uniforme de magnitud 10 V/cm está orientado como muestra la figura. ¿Cuál será la diferencia de potencial $(V_B - V_A)$ entre los puntos indicados A y B?

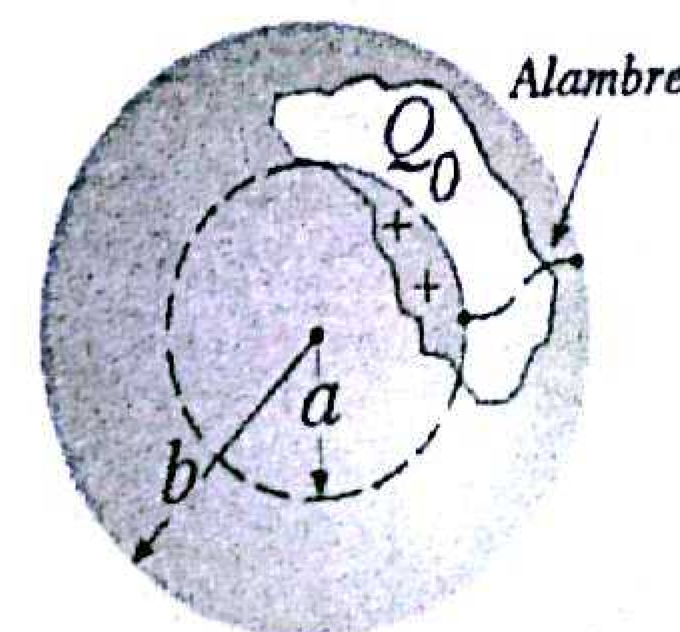
a) $V_B - V_A = +44{,}7$ V, b) $V_B - V_A = -42{,}4$ V
c) $V_B - V_A = +40$ V, d) $V_B - V_A = -20$ V
e) $V_B - V_A = +2{,}36$ V



PE-4.14. ***Esferas metálicas conectadas por alambre***

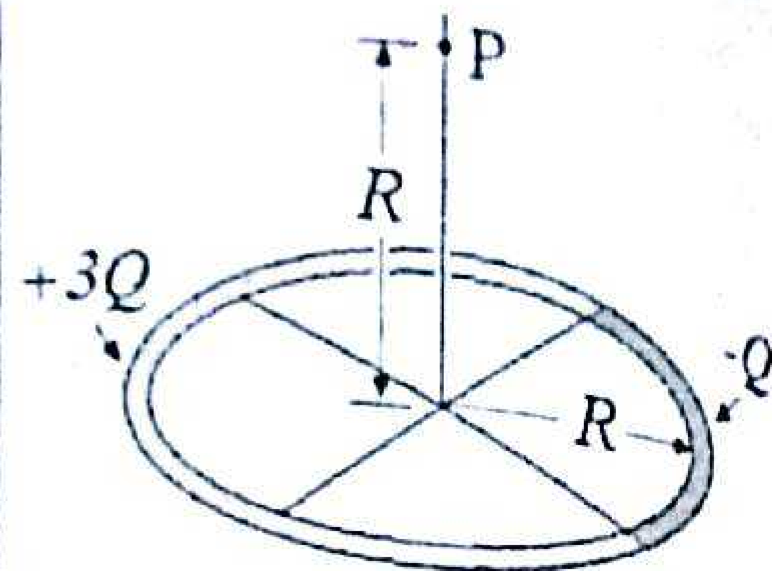
Sean dos esferas metálicas huecas de radios a y b. Inicialmente la esfera externa no tiene carga neta mientras que la esfera interna tiene carga Q_o. Si las conectamos con un alambre metálico, ¿cómo se repartirá la carga?

a) $Q_a = Q_0/2$, $Q_b = Q_0/2$ b) $Q_a = Q_0$, $Q_b = 0$
c) $Q_a = 0$, $Q_b = Q_0$ d) $Q_a = -Q_0$, $Q_b = 2Q_0$
e) $Q_a = 2Q_0$, $Q_b = -Q_0$



PE-4.15. ***Potencial de anillo compuesto***

Una barra de plástico circular de radio R tiene un carga negativa $-Q$ distribuida uniformemente en un cuarto de circunferencia y una carga positiva $+3Q$ distribuida uniformemente sobre tres cuartos de circunferencia. Tomando $V = 0$ en el infinito, ¿cuál será el potencial en un punto P en el eje y a distancia R del centro?



a) $V = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{kQ}{R}$, b) $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{kQ}{R}$, c) $V = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{kQ}{R}$

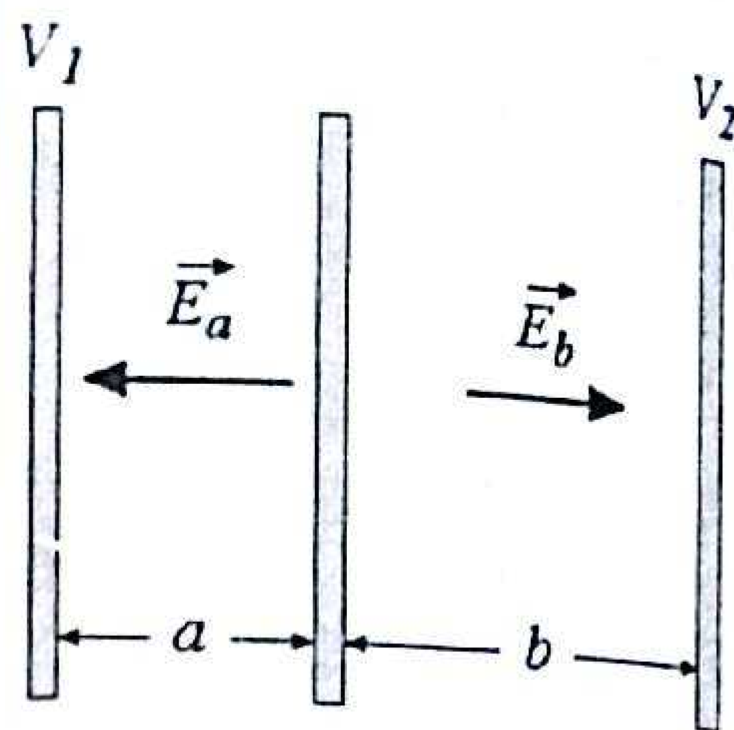
b) $V = 2\frac{kQ}{R}$, e) $V = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kQ}{R}$

PE-4.16. ***¿Cuál es la diferencia de potencial?***

Sean tres planos paralelos cargados y cuyas separaciones son: $a = 1$ m y $b = 2$ m. Los campos eléctricos en las dos regiones son:

$$E_a = -5\,\hat{x}\ \text{N/C}, \qquad E_b = +3\,\hat{x}\ \text{N/C}$$

¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos planos exteriores?



a) $V_1 - V_2 = +1$V b) $V_1 - V_2 = -2$V c) $V_1 - V_2 = +8$V

d) $V_1 - V_2 = -1$V e) $V_1 - V_2 = +11$V

CAP. 4: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
4.01					✓
4.03			✓		
4.05		✓			
4.07					✓
4.09				✓	
4.11			✓		
4.13		✓			
4.15	✓				

	a	b	c	d	e
4.02				✓	
4.04	✓				
4.06		✓			
4.08			✓		
4.10					✓
4.12				✓	
4.14			✓		
4.16	✓				

Alessandro Volta

(1745 - 1827)



Billete de 10 000 liras italianas en honor a Volta

Nació en Como, al norte de Milán (Italia). Siendo profesor de escuela media se interesaba por investigar los fenómenos eléctricos e inventó entre otros el electróforo, aparato que genera electricidad estática. Sus trabajos fueron pronto reconocidos y en 1779 fue invitado a ocupar la cátedra de física de la Universidad de Pavia y en 1785 designado rector. En el año 1799, en uno de los episodios mas interesantes de la historia de la electricidad, Volta inventó la pila eléctrica, luego de una agria disputa con Luigi Galvani, profesor de anatomía de la Universidad de Bolonia. Galvani descubrió que cuando tocaba con una barrita de cobre, la médula de una rana mientras que con otra de zinc tocaba los músculos de una pata, ésta se contraía convulsivamente. Galvani y sus seguidores sostenían que la causa de la electricidad producida era una fuerza vital de los seres vivos a la que llamó "electricidad animal". Pero Volta no halló aceptable esta explicación y reemplaza el músculo de la rana con trapos mojados de una sustancia inorgánica, encontrando que también se producía electricidad. Volta escribía.. "El contacto de conductores metálicos diferentes, a los que llamaré conductores secos, con conductores húmedos, despierta el fluido eléctrico y le imprime cierta incitación. Todavía no me encuentro en condiciones de explicar cómo ocurre esto, pero me basta saber que es un hecho de carácter general.....". Volta establece cuáles combinaciones entre metales y líquidos son los que resultan eléctricamente activos. La primera pila construida por Volta consistía de una columna de discos alternados de plata y de zinc, intercalados con tela empapada de salmuera, cuyo conjunto suministraba una diferencia de potencial que era la suma de los elementos integrados. La pila de Volta constituyó uno de los mas importantes descubrimientos prácticos de la ciencia ya que las máquinas eléctricas conocidas en esa época funcionaban por medio de fricción y se limitaban a producir carga estática y grandes diferencias de potencial, generaban grandes chispas, pero de uso práctico muy limitado. Con la pila de Volta se pone en manos de los investigadores una poderosa herramienta para generar una corriente eléctrica en forma sostenida y desde ese momento se comienzan a revelar, una tras otra las propiedades electrolíticas, magnéticas y térmicas de la corriente. Es el comienzo de subsecuentes desarrollos en tecnología eléctrica y con ella puede decirse que nació la electricidad moderna. El afortunado inventor recibió todos los honores y la Academia de París y la Sociedad Real de Londres lo hacen su miembro. Napoleón lo nombra Conde e invita a París, una medalla de oro fue estampada para agasajar al ilustre visitante. Pero más durable que todos estos homenajes, fue la decisión del Congreso Internacional de Electricistas, reunidos en 1881 en París, que eligió su nombre para designar la unidad de potencial eléctrico. Con ello, las palabras voltio, voltaje, voltímetro o voltámetro pronunciadas a diario por personas en todo el mundo inmortalizan su nombre.

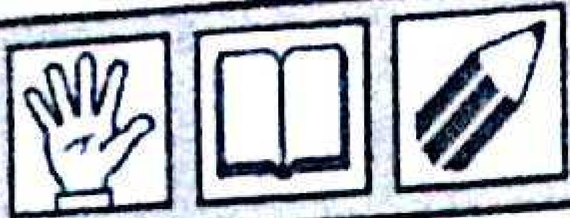
5

CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

Los capacitores o condensadores son configuraciones compactas de conductores separados por un material aislador que permiten almacenar cargas y por lo tanto, energía eléctrica. Son dispositivos que tienen funciones importantes en todos los circuitos electrónicos, tales como los de radio y TV, circuitos de marcapasos, flash para cámaras, sistemas de arranque de automóviles, etc. Un capacitor se caracteriza por su capacitancia, que se define por la razón de su carga a su voltaje y es una medida cuantitativa de la facultad que tiene el capacitor para almacenar carga. En este capítulo veremos cómo se determinan las expresiones para la capacitancia de sistemas con geometrías sencillas y mostraremos que la capacitancia depende sólo de las dimensiones, de la disposición geométrica de los conductores y de la naturaleza del material aislador entre estos. Veremos también cómo hallar las capacitancia equivalente de combinaciones de capacitores en circuitos, y por último, examinaremos la función que tienen los materiales dieléctricos en los capacitores.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Capacitores y capacitancia
- Cálculo de la capacitancia
- Combinación de capacitores: Serie y paralelo
- Energía almacenada en un capacitor
- Capacitor con dieléctrico
- Dieléctricos: Descripción atómica
- Los dieléctricos y la ley de Gauss

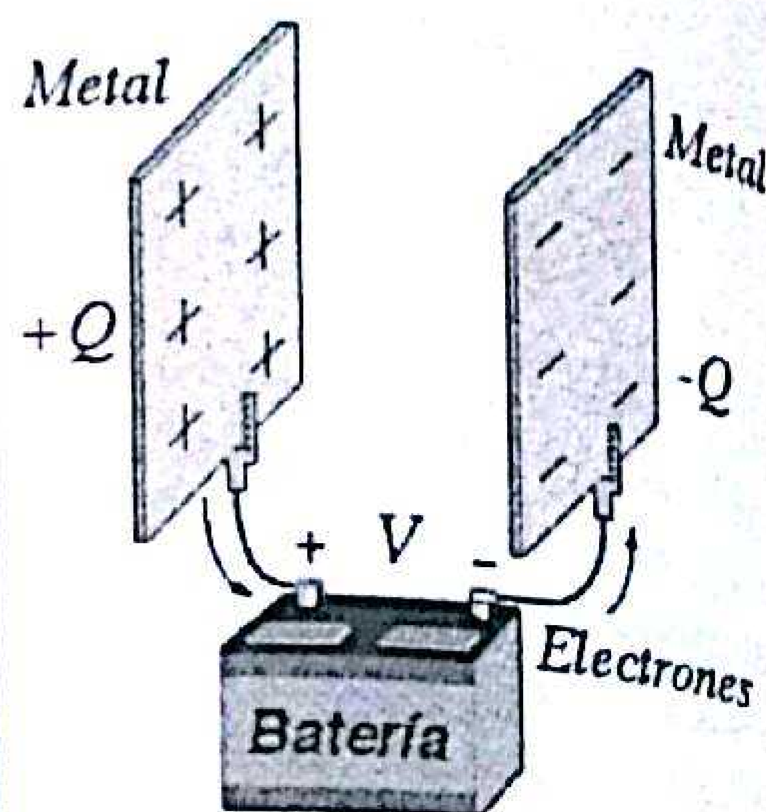


PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

EL CAPACITOR

Un capacitor es un dispositivo que almacena cargas en forma separada, o energía potencial electrostática en el campo eléctrico que estas generan. Usualmente consiste de dos conductores metálicos entre los cuales hay una región que puede estar vacía o puede estar llena con un material aislante.

Cuando se aplica a los dos conductores una diferencia de potencial mediante una batería, se transfieren electrones de un conductor al otro. Al desconectar la batería, el conductor que pierde electrones queda con carga positiva, $+Q$ y el que los adquiere queda con igual cantidad de carga negativa, $-Q$. De esta manera, los dos conductores almacenan cargas de igual magnitud y de signos opuestos.



LA CAPACITANCIA

La cantidad de carga que adquiere cada una de los conductores de un capacitor es proporcional a la diferencia de potencial aplicada V:

$$Q = CV$$

Capacitancia

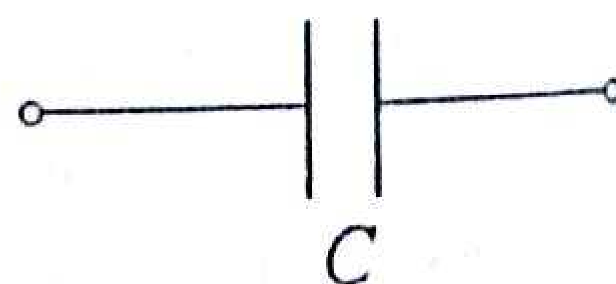
$$C = \frac{Q}{V}$$

La constante de proporcionalidad, C, recibe el nombre de capacitancia y expresa la facultad del capacitor para almacenar carga eléctrica.

La unidad SI de capacitancia es el coulomb por voltio, unidad que se denomina *faradio* (F). Un faradio es igual a un coulomb por voltio.

$$faradio = \frac{coulomb}{voltio}$$

Para un capacitor específico la capacitancia es una constante que depende de la geometría, es decir, del tamaño, forma y posición relativa de los dos conductores, así como también del material que los separa. Podemos determinar en forma analítica la capacitancia para geometrías sencillas: Placas paralelas, cilíndricas y esféricas.

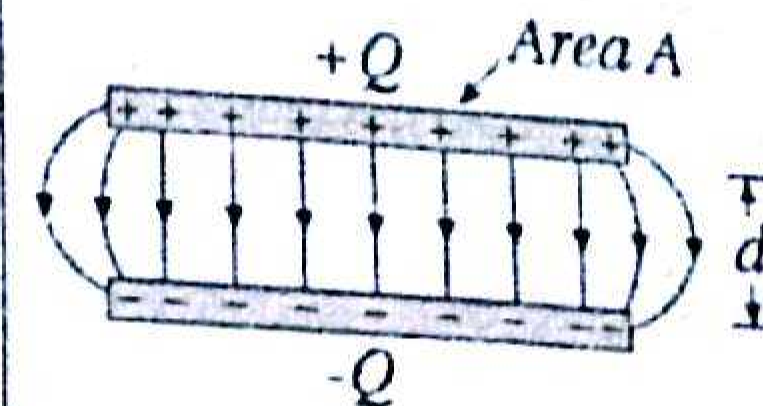


Símbolo de capacitor

CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

Sean dos placas metálicas cargadas de área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones, de modo que podemos ignorar los efectos de borde. Si una placa tiene carga $+Q$ y la otra tiene carga $-Q$, el campo eléctrico entre ellas es uniforme:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$



Si calculamos la diferencia de potencial entre las placas, esta resulta proporcional a la carga Q:

$$V = -\int \vec{E} \bullet d\vec{l} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

El inverso del factor de proporcionalidad es lo que se define como la capacitancia:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

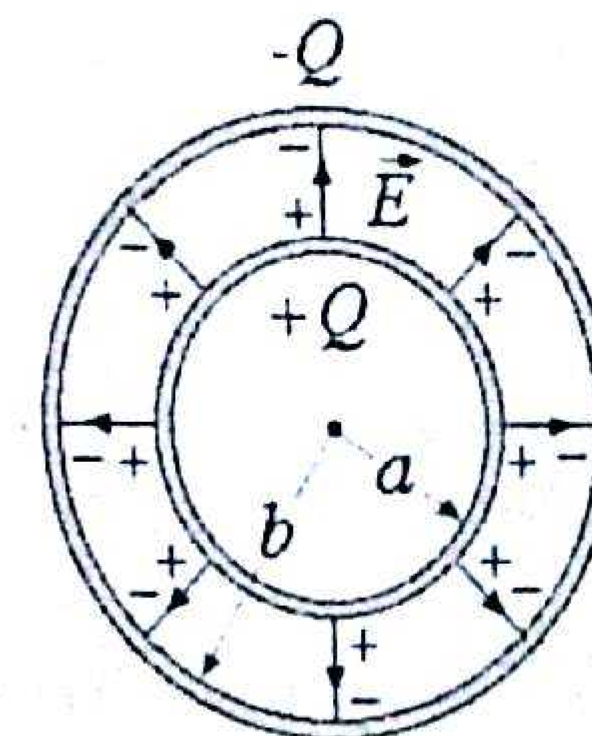
Capacitancia de un capacitor de placas paralelas

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

CAPACITOR ESFÉRICO

En este caso los dos conductores son esferas concéntricas de radios a y b. Supongamos que la esfera interna tiene carga $+Q$ y la externa tiene carga $-Q$, el campo eléctrico entre las esferas es radial, y viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$



La diferencia de potencial entre las esferas conductoras es:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_b^a E_r dr = -kQ \int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = -kQ \frac{-1}{r}\bigg|_b^a = kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = kQ\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

Tomando en cuenta que $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{1}{k}\frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Capacitancia de un capacitor esférico

$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

CAPACITOR CILÍNDRICO

Consiste de dos cilindros conductores concéntricos de radios a y b, y longitud L. Si el cilindro interno tiene carga $+Q$ y el externo tiene carga $-Q$, el campo eléctrico entre los cilindros es radial:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}\hat{r}$$

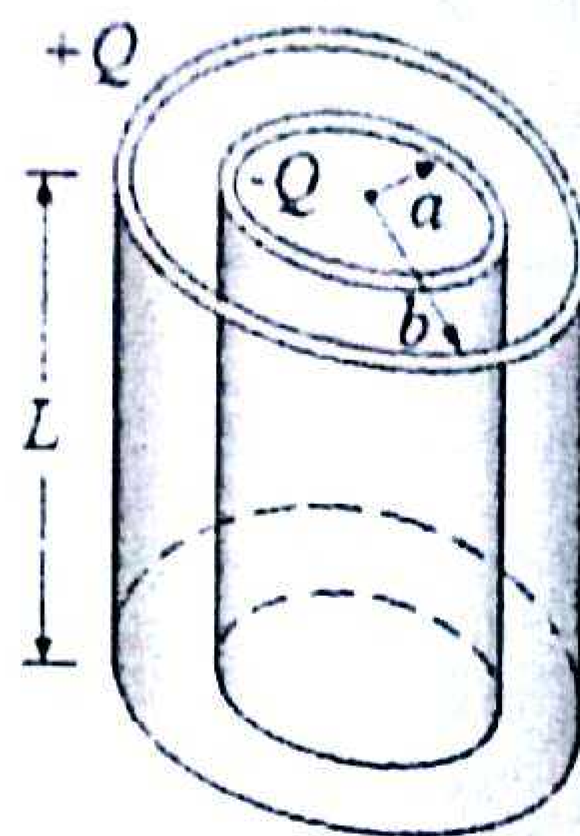
La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_b^a E_r dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\, r \Big|_b^a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln(\frac{b}{a})$$

La capacitancia es la relación entre la carga y el voltaje:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln(b/a)}$$

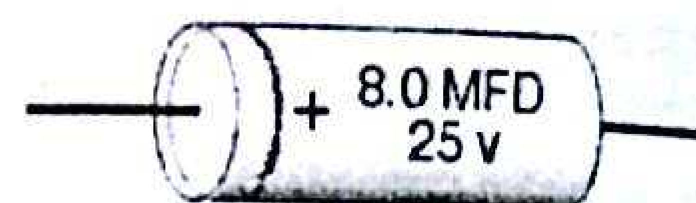


Capacitancia de un capacitor cilíndrico

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln(b/a)}$$

COMBINACIÓN DE CAPACITORES

Las características más importantes de un capacitor son: el valor de su *capacitancia* y el valor de la *máxima diferencia de potencial* que puede ser aplicada sin que se dañe el material aislador entre las armaduras.
Si no se dispone de un valor específico de capacitancia para una particular aplicación, podemos conectar distintos capacitores en forma apropiada para obtener el valor de la capacitancia equivalente deseada.

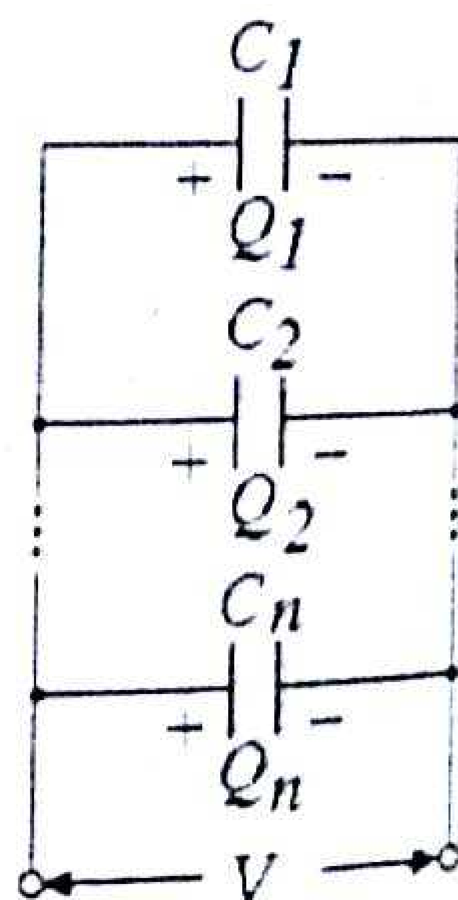


CAPACITORES EN PARALELO

Dos o más capacitores están conectados en paralelo cuando *tienen la misma diferencia de potencial*, V. La carga total Q, almacenada será la suma de las cargas individuales.

$$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n = (C_1 + C_2 + ... + C_n)V$$

Por lo tanto, un solo capacitor equivalente que contenga la misma carga Q a la misma diferencia de potencial V, tendrá una capacitancia equivalente:



$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

La capacitancia equivalente de capacitores en paralelo es la suma de las capacitancias individuales.

Capacitancia equivalente en paralelo

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

CAPACITORES EN SERIE

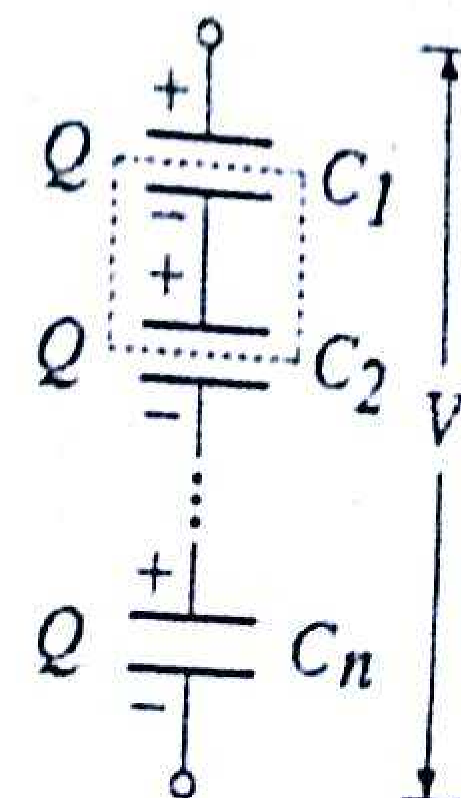
Dos o más capacitores están en serie cuando se conectan uno a continuación de otro, de forma tal que sus *cargas tienen el mismo valor*. La diferencia de potencial total V, es la suma de las diferencias de potencial a través de cada capacitor individual.

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + .. + \frac{Q}{C_n}$$

Por lo tanto, un solo capacitor equivalente que contenga la misma carga Q al mismo potencial V, tendrá una capacitancia equivalente dada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$

El inverso de la capacitancia equivalente de capacitores en serie es la suma de los inversos de las capacitancias individuales.



Capacitancia equivalente en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$

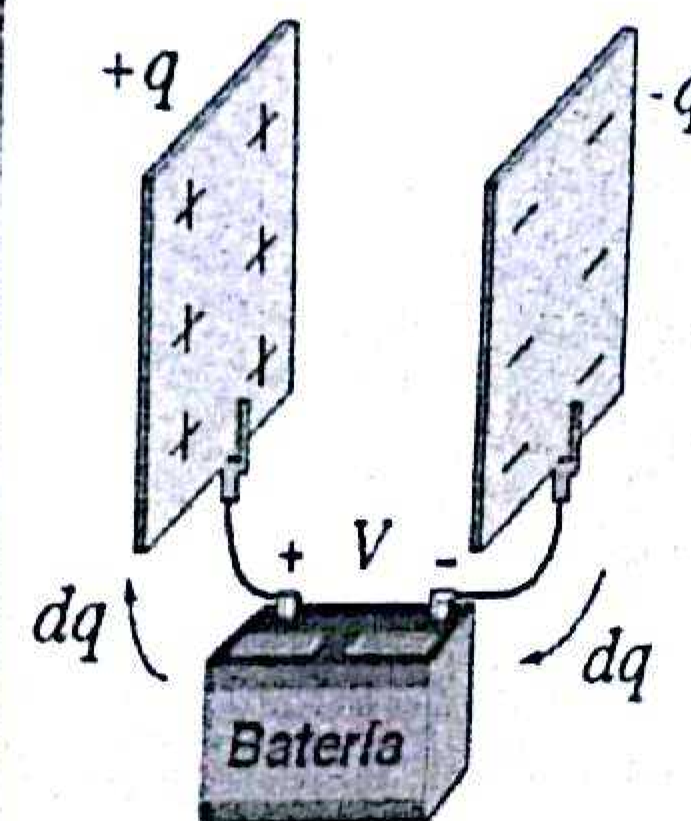
ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR

La energía electrostática que se almacena en un capacitor proviene del trabajo realizado para cargarlo. Suponga que en algún instante durante el proceso, el capacitor tiene una carga q. El trabajo (realizado por la batería) para transferir una carga adicional dq, cuando entre las placas existe una diferencia de potencial V, es $dW = Vdq$. Como $V = q/C$, el trabajo total realizado para cargar el capacitor desde $q = 0$ hasta $q = Q$ será:

$$W = \int_0^Q Vdq = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Este trabajo es igual a la energía potencial U, almacenada en el capacitor. Utilizando la relación $Q = CV$, se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$



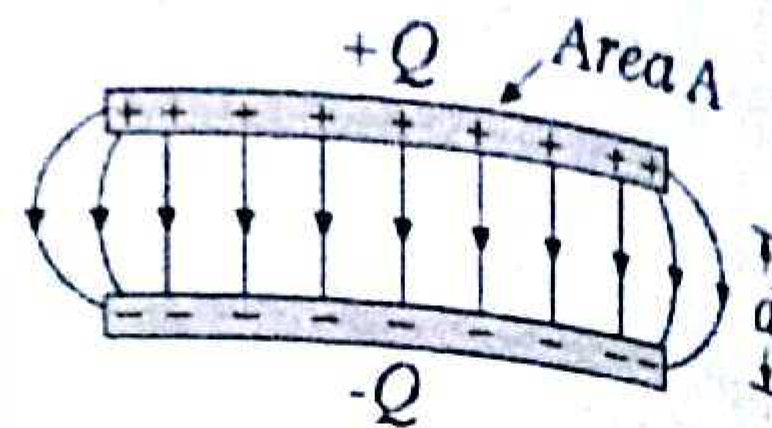
Energía almacenada en un capacitor

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

DENSIDAD DE ENERGÍA EN UN CAMPO $\vec{E}$

La energía almacenada en un capacitor puede considerarse que reside en el campo eléctrico entre las placas. Por ejemplo, para un capacitor de placas paralelas de área A y separación d, la capacitancia es: $C = \varepsilon_o A/d$ y la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante la relación: $V = Ed$. Por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(Ad)$$



Si despreciamos los efectos de borde, el volumen del capacitor ocupado por el campo eléctrico es (Ad), por lo tanto, la energía por unidad de volumen (J/m^3) es:

$$u_E = \frac{Energía}{Volumen} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Densidad de energía en un campo eléctrico

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

La densidad de energía es proporcional al cuadrado del campo eléctrico.

Si bien este resultado fue obtenido para el campo eléctrico entre placas paralelas, es de validez general para cualquier región del espacio donde exista un campo eléctrico aunque éste no sea uniforme.

CAPACITOR CON DIELÉCTRICO

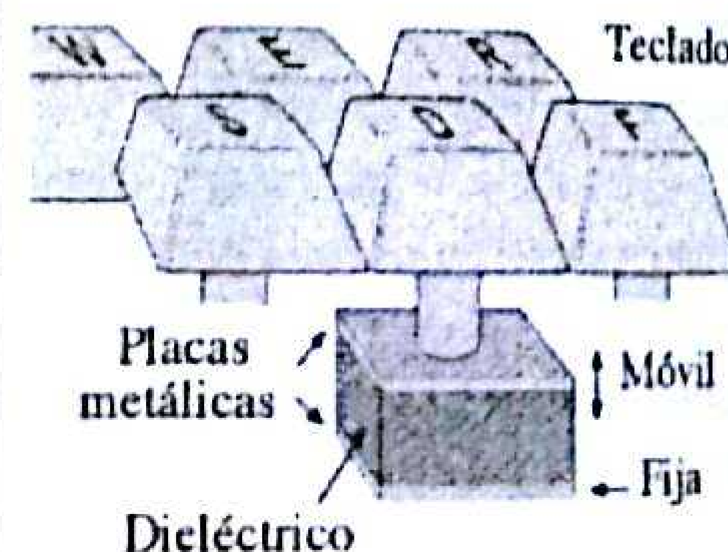
La mayoría de los capacitores se fabrican con un dieléctrico insertado entre las placas metálicas. Los dieléctricos son materiales no conductores, como la mica o el papel, que cumplen las siguientes funciones:

1. Permiten una construcción rígida y compacta con una separación pequeña entre las placas conductoras.

2. Permiten que se pueda aplicar un mayor voltaje sin que cause una descarga (el campo eléctrico de ruptura es mayor que el del aire).

3. Aumentan la capacitancia del capacitor en un factor κ conocido como la constante dieléctrica del material.

Para ilustrar el efecto de un dieléctrico en un capacitor, veamos dos experimentos muy sencillos de visualizar:

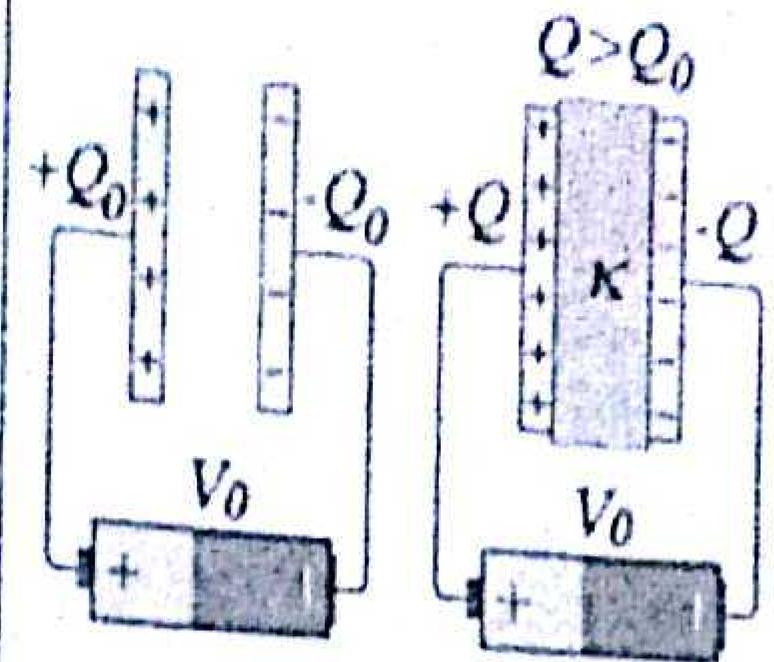


Interruptor de capacidad

A) *Insertando el dieléctrico con la batería conectada*

Sea un capacitor de capacitancia C_o que adquiere carga Q_o mediante una batería. Si se introduce el dieléctrico, se observa que *la carga en las placas aumenta* en un cierto factor κ. Como el voltaje V_o no se altera (lo garantiza la batería conectada) podemos concluir que la nueva capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\kappa Q_0}{V_0} = \kappa\frac{Q_0}{V_0} = \kappa C_0$$

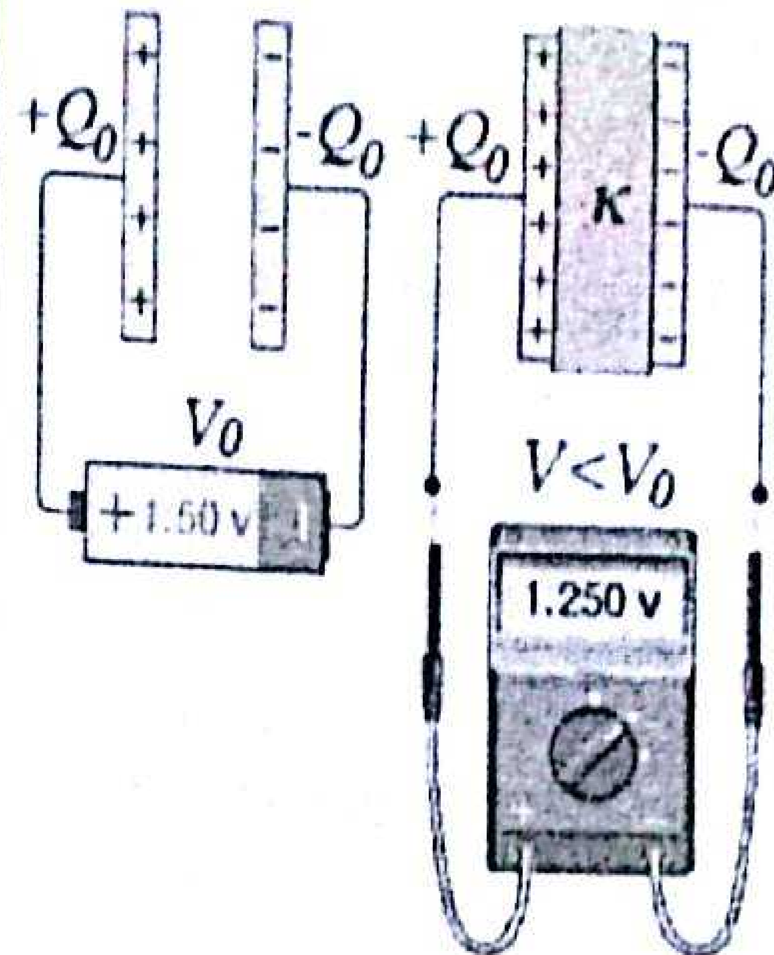


Es decir, *la capacitancia aumenta en un factor κ.*

B) *Insertando el dieléctrico con la batería desconectada*

Supongamos ahora que el capacitor de capacitancia C_o adquiere carga Q_o y se *desconecta de la batería*. Si a continuación se introduce el dieléctrico, se observa que la *diferencia de potencial disminuye* ($V = V_0/\kappa$). Como la carga no se altera (el circuito está abierto), podemos concluir que el capacitor tiene una nueva capacitancia:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{(V_0/\kappa)} = \kappa\frac{Q_0}{V_0} = \kappa C_0$$

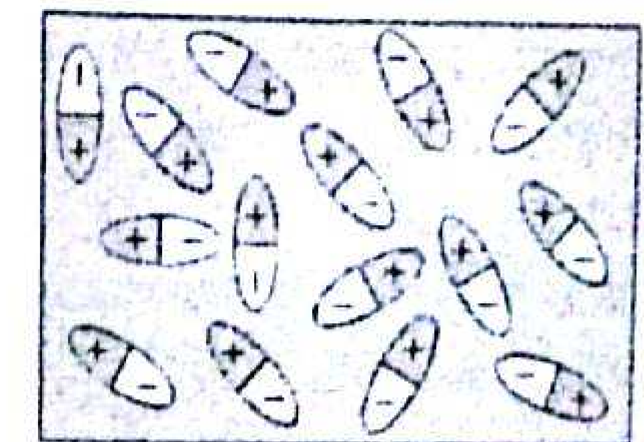


Es decir, *la capacitancia también aumenta en un factor κ.*

DIELÉCTRICOS: DESCRIPCIÓN ATÓMICA

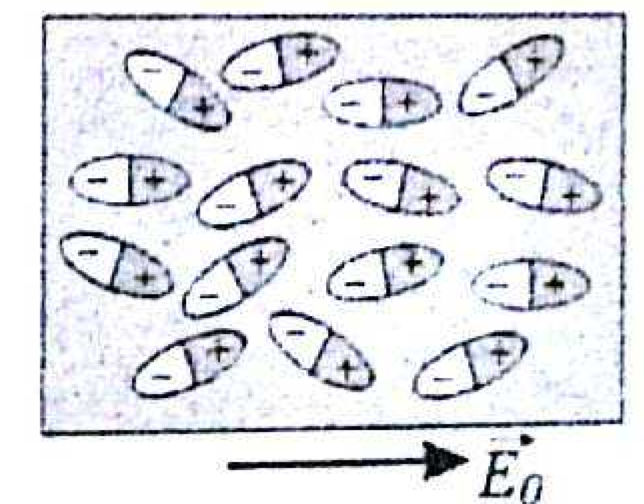
La constante κ se denomina *constante dieléctrica* del material y mide la respuesta de sus dipolos moleculares a un campo eléctrico externo. A escala microscópica, las moléculas de un material dieléctrico poseen dipolos eléctricos y pueden ser de dos tipos:

a) *Moléculas polares:* Son aquellas moléculas que poseen dipolos permanentes porque sus centros de cargas positivas no coinciden con sus centros de carga negativas. Cuando se aplica un campo eléctrico externo estos dipolos se alinean parcialmente con el campo.



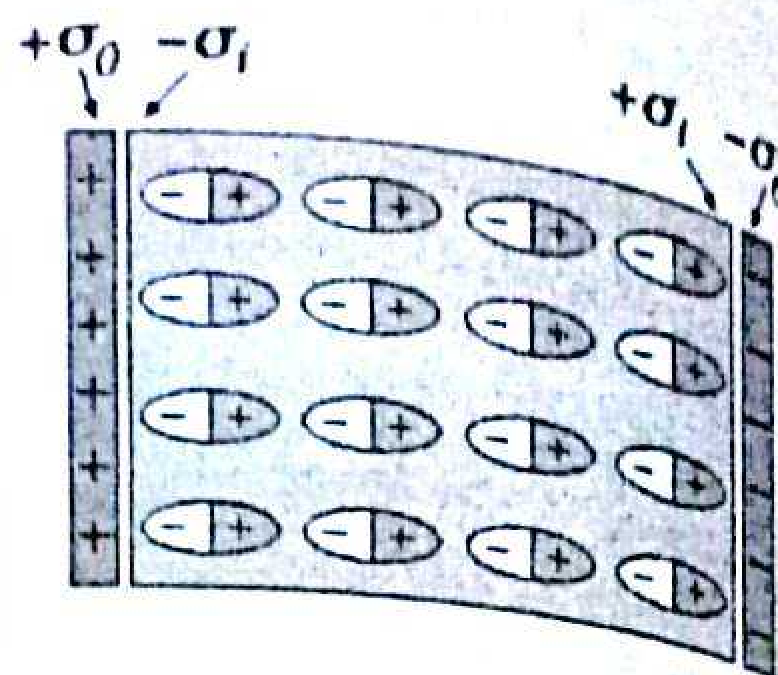
a) Dipolos con orientaciones aleatorias

b) *Moléculas no-polares:* Son moléculas que no poseen dipolo permanente porque sus centros de cargas positivas si coinciden con los centros de cargas negativas. Sin embargo, un campo eléctrico externo les provoca una ligera separación de cargas, induciéndoles un dipolo. Estos dipolos inducidos tienden a alinearse con el campo.

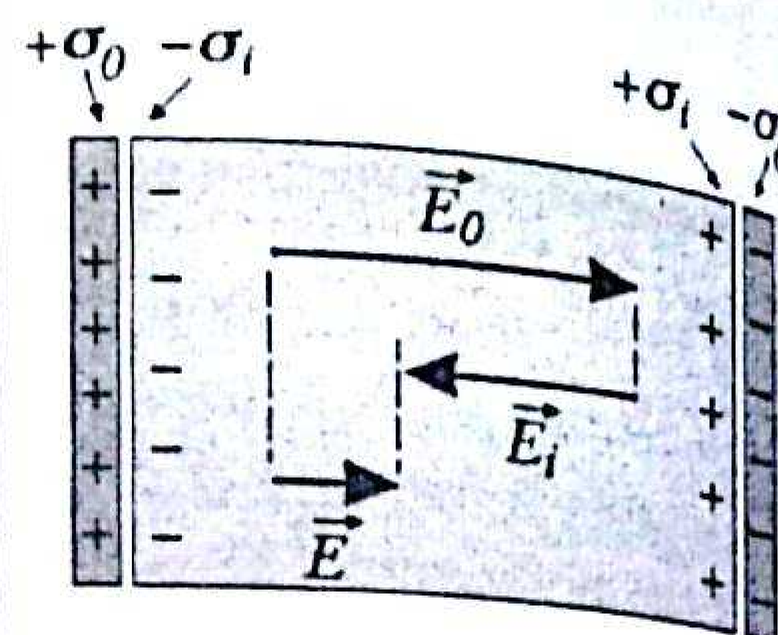


b) Los dipolos se orientan en un campo eléctrico externo

Veamos ahora lo que sucede a una placa de material dieléctrico cuando esta se inserta dentro de un capacitor de placas paralelas.



En ausencia del campo eléctrico externo los dipolos del dieléctrico estaban orientados en forma aleatoria. La aplicación de un campo externo, $\vec{E}_0$, tiende a alinear a los dipolos (permanentes o inducidos). Como resultado, aparecen a cada lado del dieléctrico más cargas de un signo que del otro signo. Es decir, ocurre una separación efectiva de cargas a cada lado del bloque (*cargas inducidas*) con densidades superficiales de carga respectivas $-\sigma_i$ y $+\sigma_i$.



Las cargas inducidas generan a su vez un campo eléctrico $\vec{E}_i$ *(campo inducido)* que tiene dirección opuesta al campo aplicado, $\vec{E}_0$. Por lo tanto, el campo neto $\vec{E}$ dentro del dieléctrico resulta disminuido:

$$E = E_0 - E_i = \frac{E_0}{\kappa}$$

El factor de reducción, κ, es justamente lo que se denomina la *constante dieléctrica* del material y es un número adimensional mayor que la unidad.

CARGAS LIBRES Y CARGAS INDUCIDAS

La densidad de cargas inducidas en la superficie del dieléctrico σ_i es menor que la densidad de cargas libres en la placa metálica, σ_0. Para un capacitor de placas paralelas podemos hallar una relación sencilla entre estas dos densidades de cargas.

El campo aplicado es de magnitud $E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$, mientras que el campo inducido es opuesto y de magnitud $E_i = \sigma_i / \varepsilon_0$, por lo tanto:

La constante dieléctrica

$$\frac{1}{\kappa} = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$$

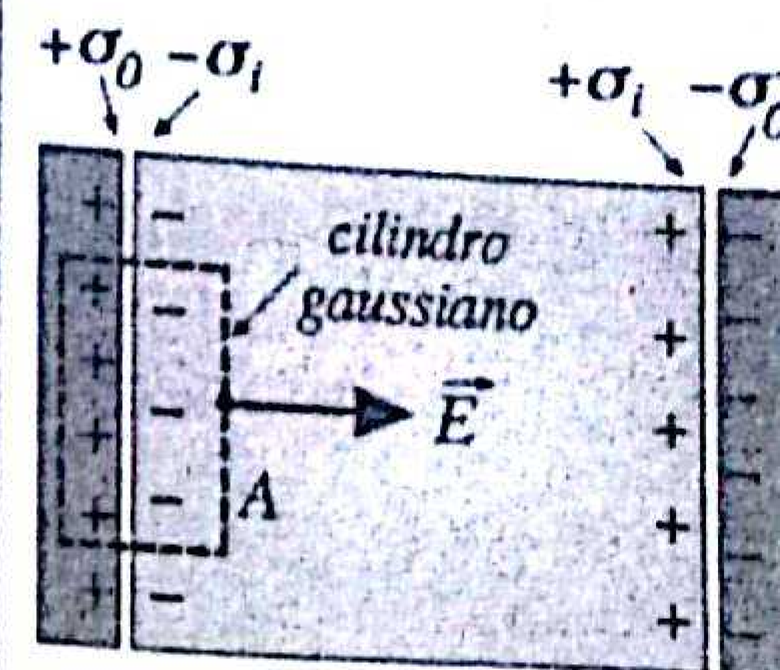
$$\frac{E_0}{\kappa} = E_0 - E_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_0}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\kappa} = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

Como $\kappa > 1$, de esta expresión se deduce que la densidad de cargas inducidas resulta siempre menor que la densidad de cargas libres.

LA LEY DE GAUSS PARA DIELÉCTRICOS

Recordemos que la ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada con la carga neta que queda dentro de dicha superficie. Supongamos un capacitor de placas paralelas cargado, y escogemos una caja cilíndrica gaussiana que tenga una tapa plana dentro de la superficie metálica y la otra, dentro del dieléctrico. Esta superficie incluirá tanto *cargas libres* Q_0 como *cargas inducidas* Q_i, las cuales debemos tomar en cuenta al escribir ley de Gauss:



$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0 - Q_i}{\varepsilon_0}$$

Si A es el área de las tapas planas del cilindro gaussiano, la carga encerrada es:

$$Q_0 - Q_i = (\sigma_0 - \sigma_i)A = [\sigma_0 - \sigma_0(1 - \frac{1}{\kappa})]A = \frac{\sigma_0 A}{\kappa} = \frac{Q}{\kappa}$$

Por lo tanto, podemos re escribir la ley de Gauss de forma que relacione el campo resultante $\vec{E}$ *únicamente con las cargas libres* Q:

$$\varepsilon_0 \oint_S \kappa\vec{E} \bullet d\vec{A} = Q$$

$$\varepsilon_0 \oint_S \kappa\vec{E} \bullet d\vec{A} = Q$$

Ley de Gauss para dieléctricos

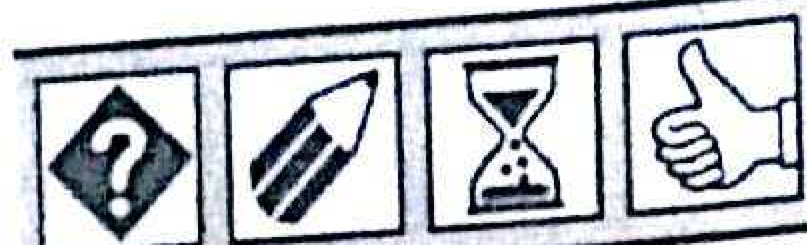
Si bien esta expresión de la ley de Gauss fue deducida para el caso de un capacitor de placas paralelas, tiene validez general para dieléctricos de geometría arbitraria, aunque tengan una constante dieléctrica κ que no sea uniforme, y también cuando las diferentes partes de la superficie gaussiana estén embebidas en dieléctricos con distintas constantes κ.

La cantidad $\varepsilon_0\kappa\vec{E}$ que aparece en la ley de Gauss recibe el nombre de vector *desplazamiento eléctrico* $\vec{D}$, para darle una forma simplificada:

Vector Desplazamiento eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0\kappa\vec{E}$$

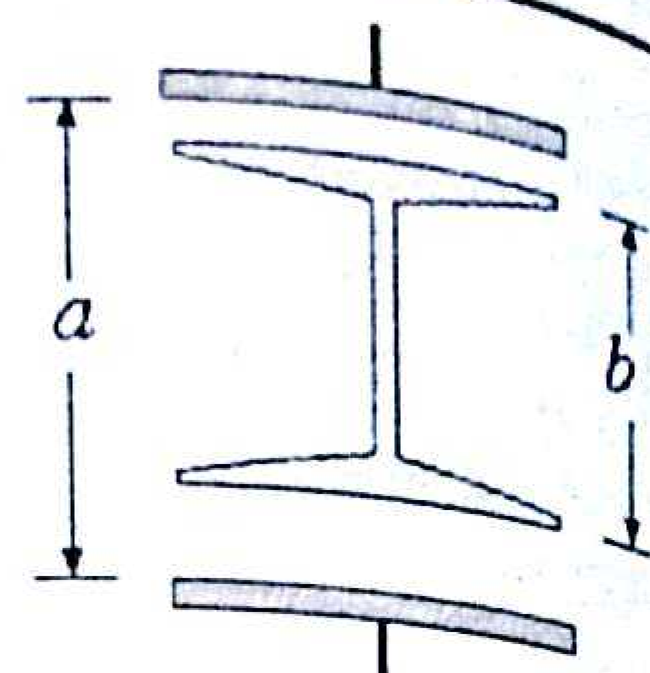
$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{A} = Q$$



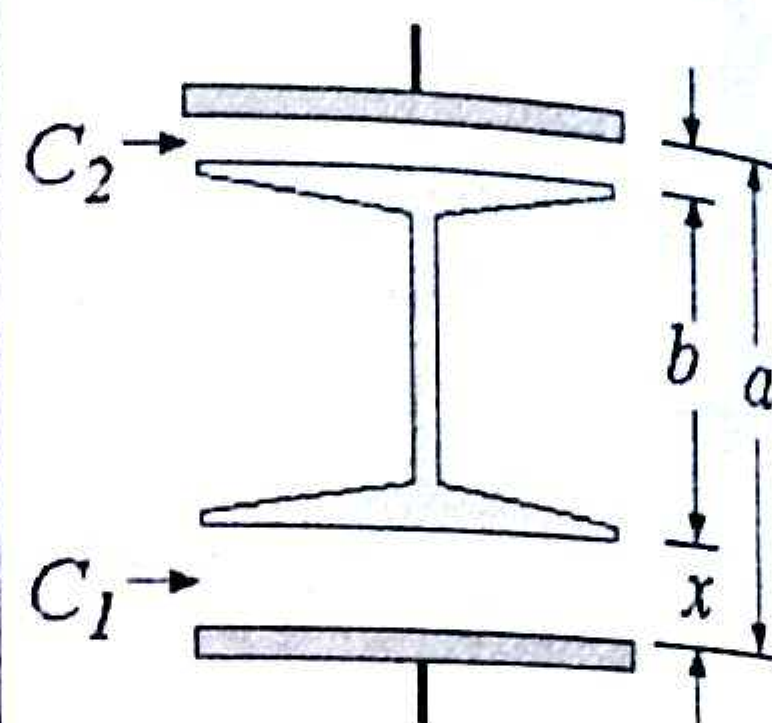
PROBLEMAS RESUELTOS

PR-5.01. *Capacitor con sección móvil en el medio*

Un capacitor de placas paralelas separadas por una distancia a, tiene una sección central rígida de longitud b que es móvil verticalmente. Determine la capacitancia equivalente de la combinación y demuestre que ésta es independiente de la posición de la sección central.



Solución: Cuando la pieza central se coloca entre las dos placas cargadas, ocurre una separación de cargas en esta pieza, con cargas $-Q$ en frente de la placa positiva y $+Q$ enfrente de la placa negativa. Se tienen así dos capacitores, C_1 y C_2, con placas de igual área A, conectados en *serie*.



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b-x}$$

Siendo x la separación entre las dos placas inferiores, y $(a\text{-}b\text{-}x)$ la separación entre las dos placas superiores. El inverso de la capacitancia equivalente es:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 A} + \frac{a-b-x}{\varepsilon_0 A} = \frac{a-b}{\varepsilon_0 A}$$

La capacitancia equivalente, que depende de la posición vertical de la pieza central:

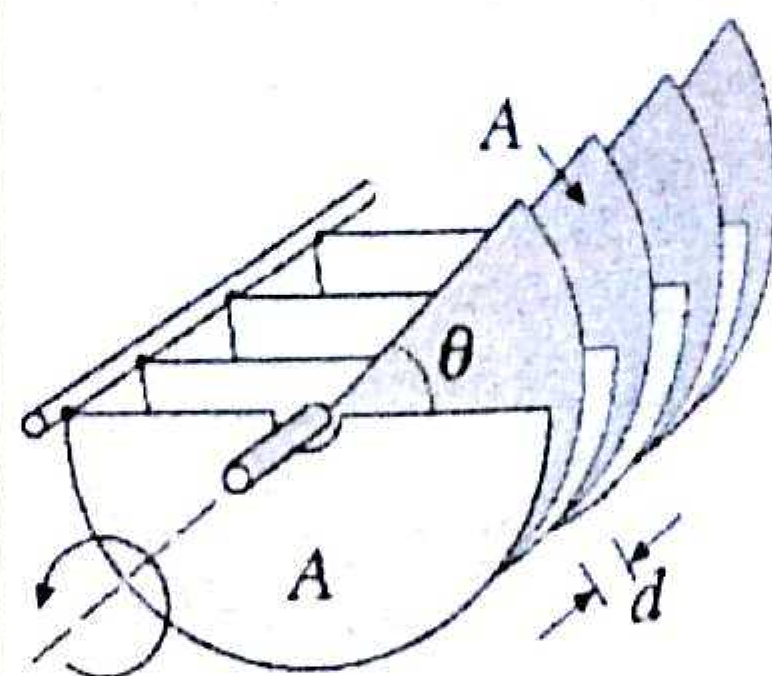
$$C_e = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$$

Respuesta:

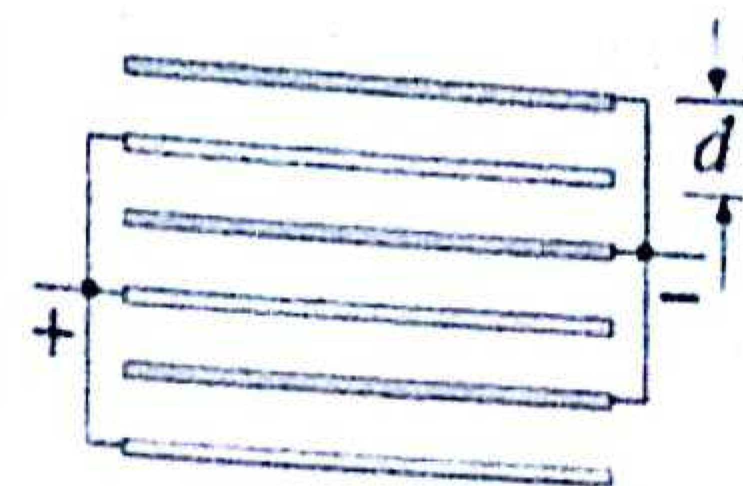
$$C_e = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$$

PR-5.02. *Capacitor para sintonizar la radio*

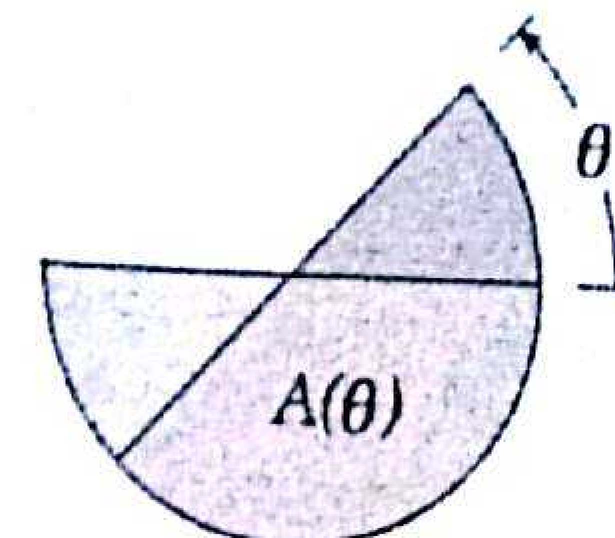
Un capacitor variable, del tipo empleado para sintonizar aparatos de radio está formado por un juego de placas fijas conectadas entre sí y alternadamente, otro juego de placas con posibilidad de rotación. Tiene un total de N placas, cada una con un área A_o y separadas de las placas contiguas por una distancia d. Halle la capacitancia para los valores del ángulo: $\theta = 0°$, $\theta = 45°$ y $\theta = 90°$.



Solución: Para un total de N placas conectadas con polaridades alternativas, se formarán $(N - 1)$ capacitores idénticos en paralelo. Si d es la separación entre placas adyacentes y $A(\theta)$ es el área solapada, la capacitancia equivalente será la suma:



$$C_0 = (N-1)C_0 = (N-1)\frac{\varepsilon_0 A(\theta)}{d}$$



a) Si $\theta = 0°$, el área solapada es A_O y la capacitancia es máxima:

$$C_0 = (N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$

b) Si $\theta = 45°$ el área solapada es $(3/4)A_O$ y la capacitancia es:

$$C_{45°} = \frac{3}{4}(N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$

c) Si $\theta = 90°$, el área solapada es $A_O/2$ y la capacitancia es:

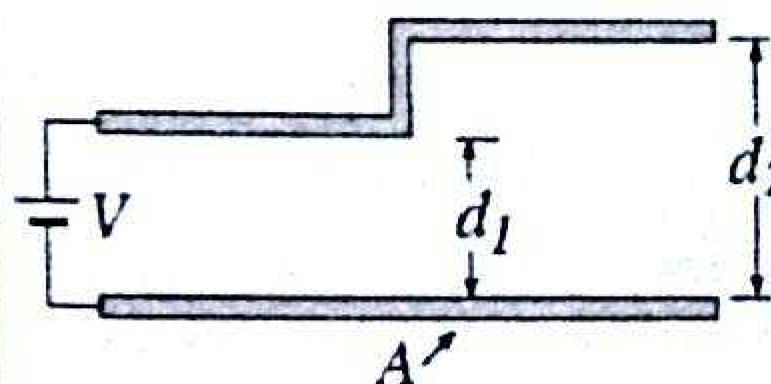
$$C_{90°} = \frac{1}{2}(N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$

Respuesta:

$$C_{0°} = (N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$
$$C_{45°} = \frac{3}{4}(N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$
$$C_{90°} = \frac{1}{2}(N-1)\frac{\varepsilon_0 A_0}{d}$$

PR-5.03. *Capacitor con una placa en escalón*

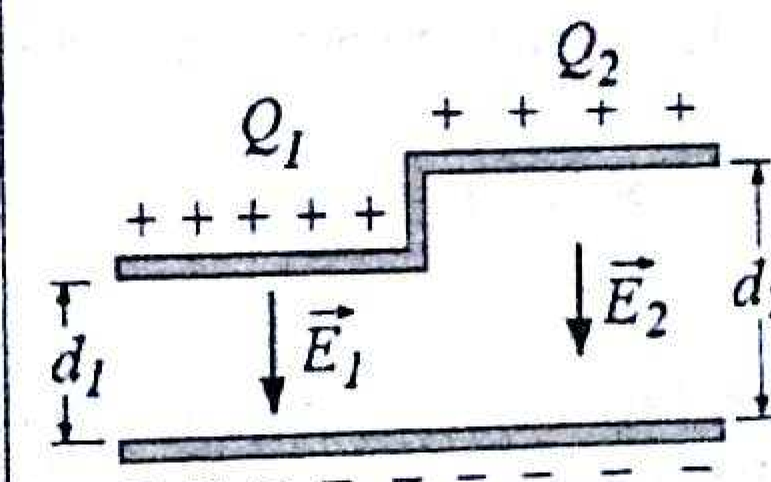
Un capacitor está constituido por dos pieza metálicas, una placa es completamente plana de área A y la otra tiene dos secciones planas en forma de escalón, como se ilustra en la figura. Halle la capacitancia.



Solución: Si se aplica un voltaje V, los campos eléctricos en las regiones izquierda y derecha son:

$$E_1 = \frac{V}{d_1} \qquad E_2 = \frac{V}{d_2}$$

Las cargas acumuladas en las placas respectivas son:



$$Q_1 = \sigma_1 A_1 = (\varepsilon_0 E_1)A_1 = \varepsilon_0 \frac{V}{d_1} A_1$$

$$Q_2 = \sigma_2 A_2 = (\varepsilon_0 E_2)A_2 = \varepsilon_0 \frac{V}{d_2} A_2$$

Las áreas son iguales $A_1 = A_2 = A/2$, y la carga total almacenada en el capacitor será:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\varepsilon_0 AV}{2}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) = \frac{\varepsilon_0 AV}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right)$$

Según la definición de capacitancia del sistema, tenemos:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right)$$

El mismo resultado puede obtenerse directamente, considerando el sistema como dos capacitores conectados en paralelo:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0 A}{2d_2} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right)$$

Respuesta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right)$$

PR-5.04. *Capacitor de placas planas no paralelas*

Un capacitor tiene placas cuadradas de lado a, que no están perfectamente paralelas sino que forman un ángulo θ entre sí, siendo d_o la separación mínima. Demuestre que, para θ pequeño, la capacitancia es aproximadamente:

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_0}\right)$$

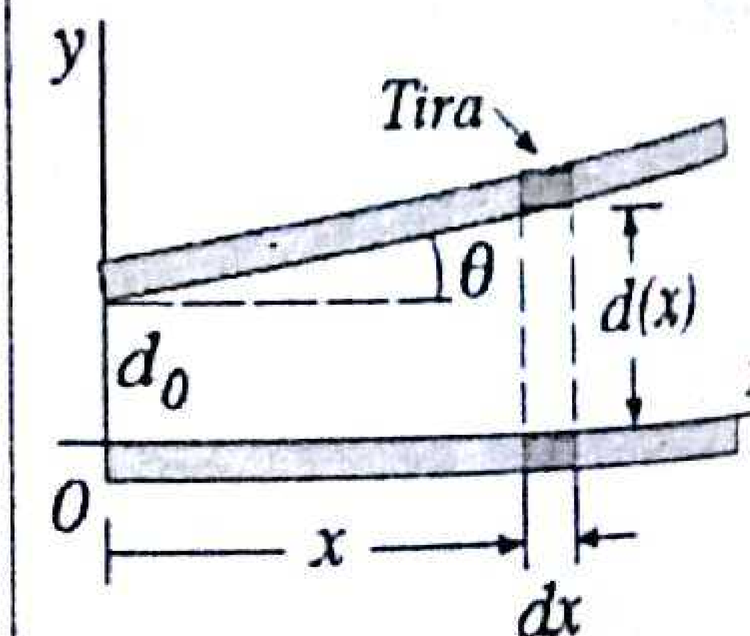
Solución: Si el ángulo de inclinación θ, es pequeño, podemos suponer que el campo eléctrico es casi vertical y considerar que las placas están constituidas por una serie de plaquitas infinitesimales paralelas. Tomemos un par de placas infinitesimales de espesor dx, a una distancia x del origen y separadas por una distancia vertical y. La capacitancia de este capacitor elemental es:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 a dx}{y}$$

Si θ es pequeño, entonces $\text{tg}\theta \approx \theta$ y la relación entre y y x es:

$$y = d_o + x\,\text{tg}\theta \approx d_o + x\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = dy/\theta$$

Desde el punto de vista eléctrico, los capacitores están efectivamente conectados en paralelo, y la capacitancia equivalente será la suma de las capacitancias infinitesimales:



$$C = \int dC = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\int_{d_0}^{d_0 + a\theta}\frac{dy}{y} = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln y\Big|_{d_0}^{d_0 + a\theta}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1 + \frac{a\theta}{d_0}\right)$$

Si θ es pequeño y $d_0 << a$, entonces $z = a\theta/d_0 << 1$ y podemos aproximar el logaritmo neperiano por los dos primeros términos de su desarrollo en serie, obteniéndose:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \approx z - \frac{z^2}{2}$$

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_0}\right)$$

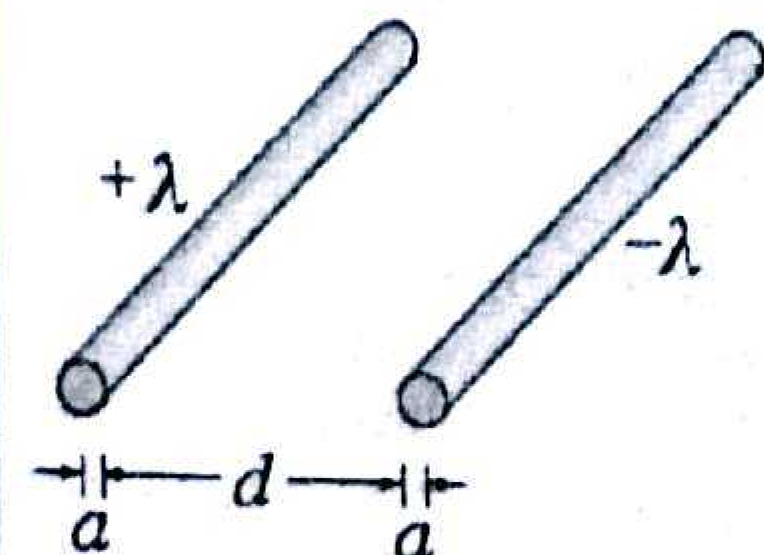
Si $\theta = 0$, resulta la capacitancia para placas paralelas.

Respuesta:

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_0}\right)$$

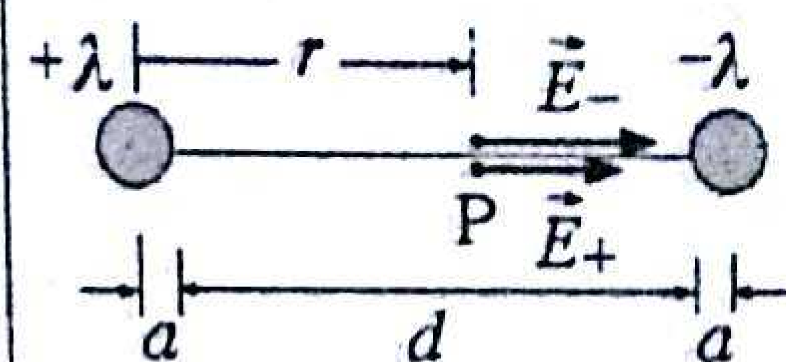
PR-5.05. *Capacitancia de un par de alambres paralelos*

Dos alambres largos y rectos de radio a están paralelamente con una separación $d >> a$. Determine la capacitancia por unidad de longitud.



Solución: Supongamos que uno de los alambres tiene una carga por unidad de longitud $+\lambda$, y el otro tiene $-\lambda$. El campo eléctrico en un punto P entre los dos alambres es:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d + 2a - r)}\hat{r}$$



La magnitud de la diferencia de potencial entre los dos alambres es:

$$\Delta V = \int_a^{a+d} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^{a+d}\frac{dr}{r} + \int_a^{a+d}\frac{dr}{(d + 2a - r)}\right]$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^{a+d}\frac{dr}{r} - \int_{d+a}^{a}\frac{du}{u}\right] = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+d}\frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a+d}{a}\right)$$

Si l es la longitud de los alambres, la capacitancia es:

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{\lambda l}{\Delta V}=\frac{\pi\varepsilon_0 l}{ln(\frac{a+d}{a})}$$

La capacitancia por unidad de longitud, para $d >> a$ es:

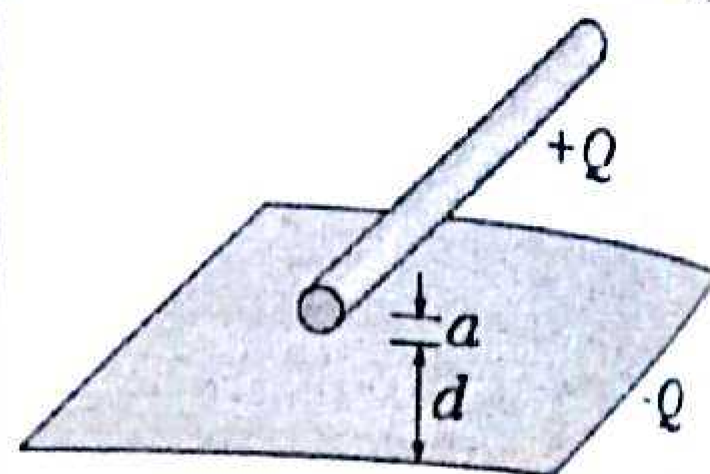
$$\frac{C}{l}=\frac{\pi\varepsilon_0}{ln(\frac{a+d}{a})}\cong\frac{\pi\varepsilon_0}{ln(d/a)}$$

Respuesta:

$$\frac{C}{l}=\frac{\pi\varepsilon_0}{ln(\frac{a+d}{a})}$$

PR-5.06. *Alambre recto enfrente de una lámina plana*

Un alambre largo y recto de radio a está a distancia d enfrente de una lámina metálica plana infinitamente grande. Determine la capacitancia del sistema por unidad de longitud del alambre.



Solución: Para hallar la capacitancia aplicaremos el *método de las imágenes* en combinación con el resultado del problema anterior. Suponga que la lámina está a potencial cero; entonces podríamos sustituirla por un alambre colocado a una distancia d por debajo. El potencial producido por las dos alambres con cargas, $+Q$ y $-Q$, será nulo en todos los puntos del plano. Si el potencial del alambre con carga positiva es V, el potencial del alambre con carga negativa sería $-V$ y la diferencia de potencial entre el alambre y el plano será la mitad de la correspondiente a los dos alambres, del problema anterior:

$$\Delta V_{pa}=\frac{1}{2}\Delta V_{aa}=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}ln(\frac{a+2d}{a})$$

Si el alambre tiene longitud l, la capacitancia del sistema plano/alambre, es:

$$C=\frac{Q}{\Delta V_{pa}}=\frac{\lambda l}{\Delta V_{pa}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{ln(\frac{a+2d}{a})}$$

La capacitancia del sistema plano/alambre por unidad de longitud del alambre es:

$$\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{ln(\frac{a+2d}{a})}\cong\frac{2\pi\varepsilon_0}{ln(2d/a)} \qquad d >> a$$

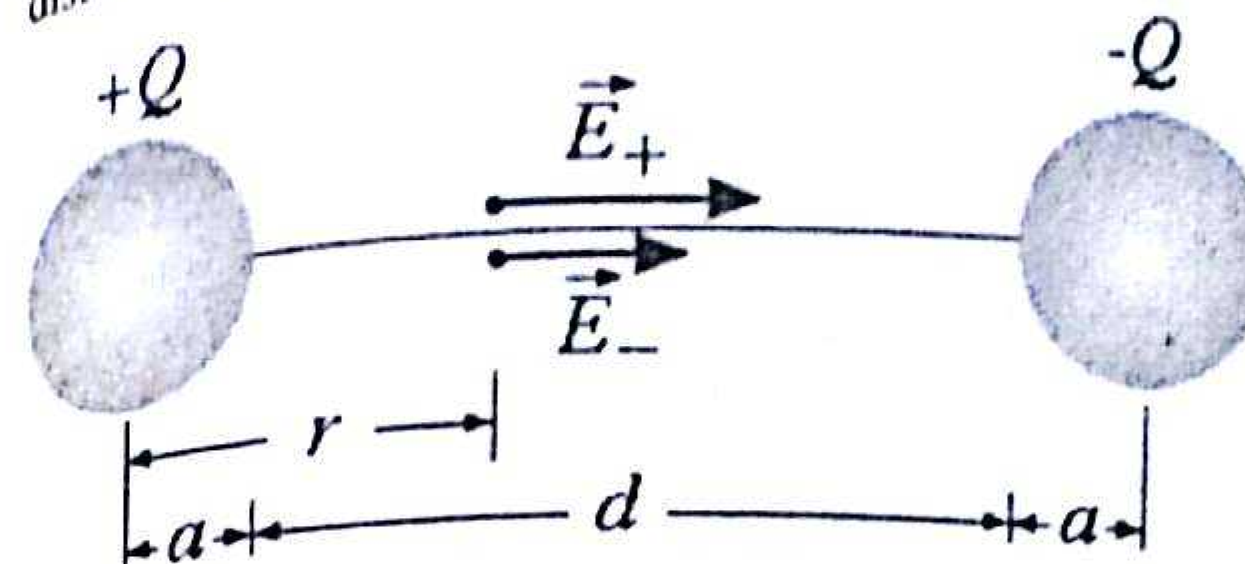
Respuesta:

$$\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{ln(\frac{a+2d}{a})}$$

PR-5.07. *Capacitancia de un par de esferas separadas*

Dos esferas metálicas de radio a están separadas por una distancia grande $d >> a$.

Determine la capacitancia del sistema suponiendo que las cargas están uniformemente distribuidas.



Solución: El campos eléctrico en un punto del eje es:

$$\vec{E}=\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(d+2a-r)^2}\hat{r}$$

La diferencia de potencial entre las dos esferas es:

$$\Delta V=\int_a^{a+d}\vec{E}\bullet d\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\int_a^{a+d}\frac{dr}{r^2}+\int_a^{a+d}\frac{dr}{(d+2a-r)^2}]$$

$$\Delta V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\int_a^{a+d}\frac{dr}{r^2}+\int_{d+a}^{a}\frac{du}{u^2}]=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+d}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta V=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_a^{a+d}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}]=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{a(a+d)}$$

La capacitancia del sistema de las dos esferas es:

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=2\pi\varepsilon_0 a(1+\frac{a}{d})$$

Respuesta:

$$C=2\pi\varepsilon_0 a(1+\frac{a}{d})$$

PR-5.08. *Placas conectados con polaridad opuesta*

Dos capacitores C_1 y C_2 están cargados a una diferencia de potencial V_o. Se desconectan de la fuente y se unen entre sí con polaridad opuesta, es decir, el lado positivo de un capacitor con el lado negativo del otro, y viceversa.

a) Halle las cargas iniciales de los capacitores.

b) Halle la nueva diferencia de potencial.

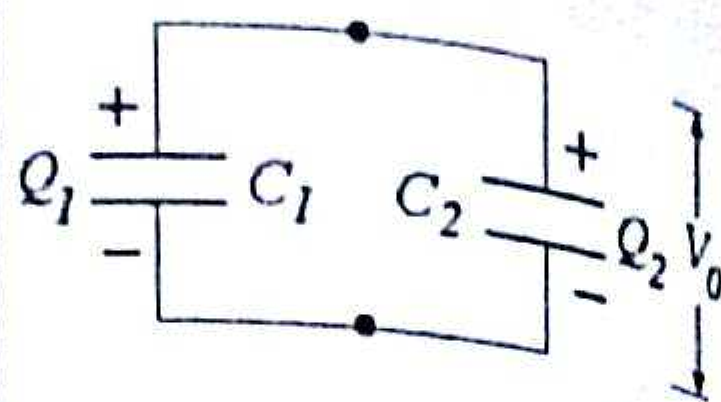
c) Determine las cargas finales de los capacitores.

Suponga los valores:
$C_1 = 3\ \mu F$,
$C_2 = 1\ \mu F$,
$V_o = 100\ V$

Solución: a) Inicialmente las cargas en los capacitores son, respectivamente:

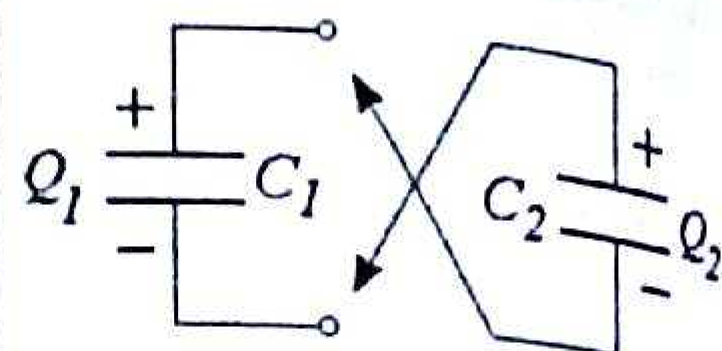
$$Q_1 = C_1V_o = (3\times10^{-6}F)(100V) = 3\times10^{-4}C$$

$$Q_2 = C_2V_o = (1\times10^{-6}F)(100V) = 1\times10^{-4}C$$



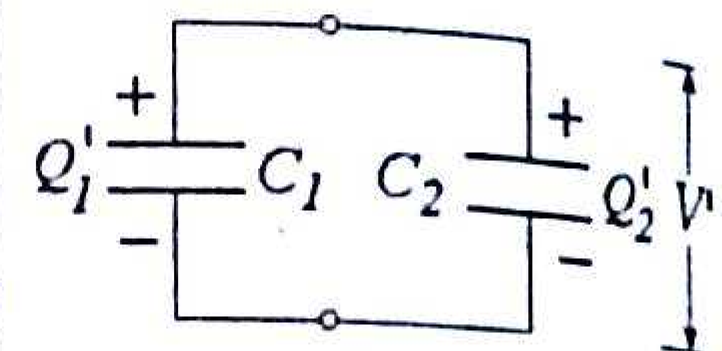
b) Cuando se conectan con polaridad opuesta, habrá una compensación parcial de cargas y la carga neta resultante es:

$$Q' = Q_1 - Q_2 = (C_1 - C_2)V_o$$



Los capacitores quedan en paralelo ($C_{eq} = C_1+C_2$) y la carga total se distribuye hasta que la nueva diferencia potencial vuelva a ser igual para ambos:

$$V' = \frac{Q'}{C_{eq}} = \frac{(C_1 - C_2)V_0}{C_1 + C_2}$$



Reemplazando los valores numéricos:

$$V' = \left(\frac{3\times10^{-6}F - 1\times10^{-6}F}{3\times10^{-6}F + 1\times10^{-6}F}\right)100v = 50v$$

c) Las nuevas cargas son respectivamente:

$$Q_1' = C_1V' = (3\times10^{-6}F)(50V) = 1{,}5\times10^{-4}C.$$

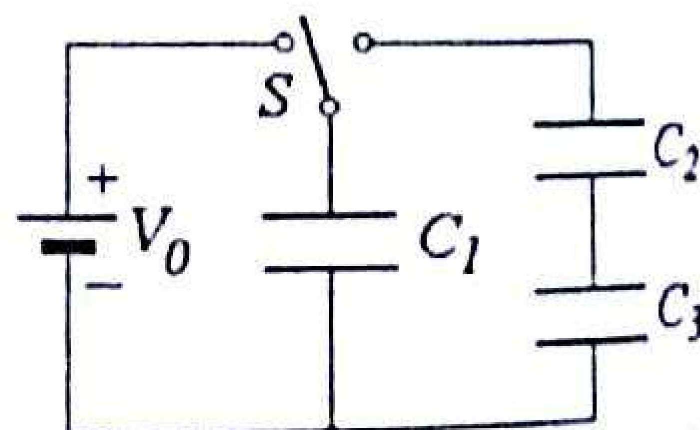
$$Q_2' = C_2V' = (1\times10^{-6}F)(50V) = 5{,}0\times10^{-5}C.$$

Respuesta:

a) $Q_1 = 3\times10^{-4}C$, $Q_2 = 1\times10^{-4}C$
b) $V' = 50$ V
c) $Q_1' = 1{,}5\times10^{-4}C$, $Q_2' = 5\times10^{-5}C$

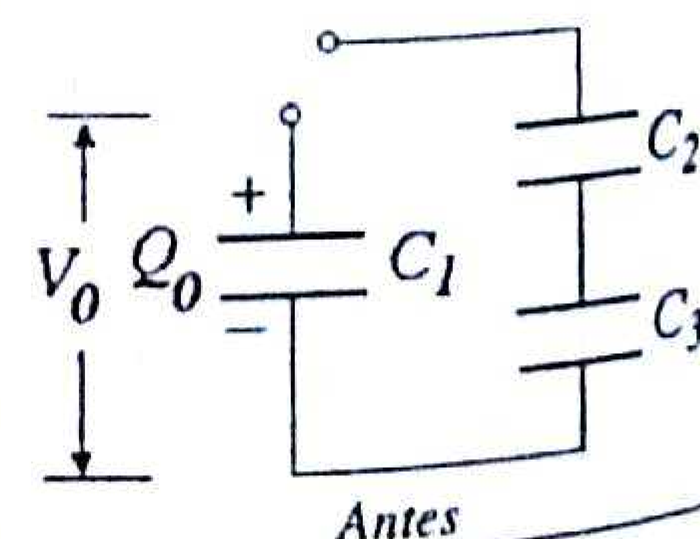
PR-5.09. *¿Cómo se reparte la carga?*

En el circuito de la figura, los capacitores C_1, C_2 y C_3 están descargados inicialmente. Cuando el interruptor S se pasa a la posición izquierda, el capacitor C_1 se carga al voltaje V_0 de la batería. Si ahora el interruptor S se pasa a la posición de la derecha, ¿cuáles serán las cargas de los capacitores?



Solución: Inicialmente la carga en C_1 es $Q_o = C_1V_o$. Al conectar el interruptor S a la derecha, parte de esta carga fluye hacia las placas de C_2 y C_3. La *conservación de la carga* requiere que:

$$Q_o = Q_1 + Q_2$$



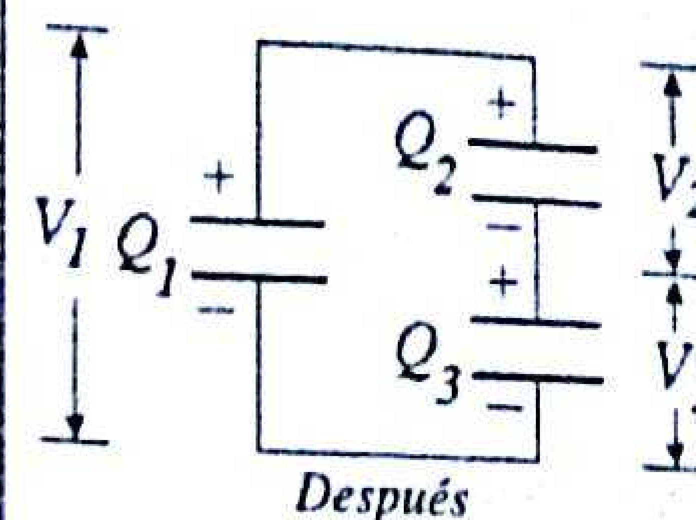
Antes

Además, la rama que conecta C_2 con C_3 debe mantenerse eléctricamente neutra, por lo tanto:

$$-Q_2 + Q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_3$$

Por otra parte, la suma de potenciales de C_2 y C_3 debe se igual al potencial de C_1:

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$



Después

Tomando en cuenta que: $Q_2 = Q_3 = (Q_0 - Q_1)$ se tiene:

$$\frac{Q_1}{C_1} = (Q_0 - Q_1)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Despejando Q_1 y poniendo $Q_o = C_1V_o$, tenemos:

$$Q_1 = \frac{Q_0(1/C_2 + 1/C_3)}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3} = \frac{V_0(C_2 + C_3)C_1^2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

Similarmente, las cargas en C_2 y C_3 son:

$$Q_2 = Q_3 = Q_0 - Q_1 = \frac{V_0C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

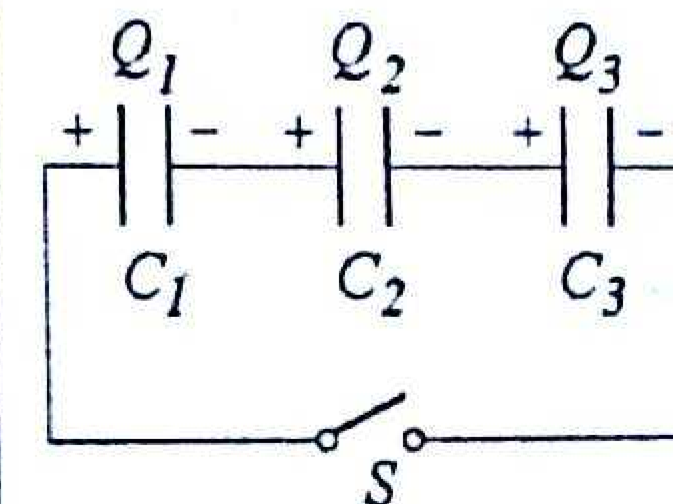
Respuesta:

$$Q_1 = \frac{V_0(C_2 + C_3)C_1^2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

$$Q_2 = Q_3 = \frac{V_0C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

PR-5.10. *¿Cómo se reparten las cargas?*

Tres capacitores C_1, C_2 y C_3 se cargan por separado con cargas Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente, y a continuación se conectan en serie, con las polaridades indicadas. ¿Cuál será la carga en cada capacitor, después de cerrar el interruptor S?

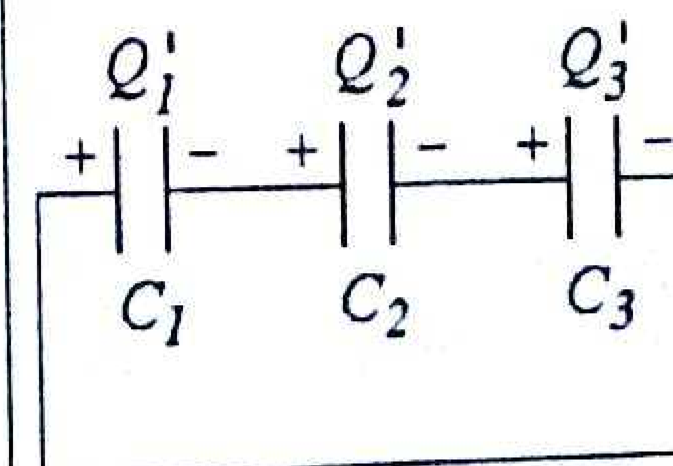


Solución: Por *conservación de la carga* eléctrica en cada rama conductora por separado, podemos igualar la carga total antes y después de cerrar el interruptor S:

$$Q_2' - Q_1' = Q_2 - Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_2' = Q_2 - Q_1 + Q_1' \qquad \text{(i)}$$

$$Q_3' - Q_2' = Q_3 - Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_3' = Q_3 - Q_2 + Q_2' \qquad \text{(ii)}$$

$$Q_1' - Q_3' = Q_1 - Q_3 \quad \Rightarrow \quad Q_3' = Q_3 - Q_1 + Q_1' \qquad \text{(iii)}$$



Después

Además, es evidente que al cerrar S, se iguala el potencial de la placa izquierda de C_1 con el de la placa derecha de C_3. La diferencia de potencial (nula) entre los extremos, es la suma de las diferencias de potencial de los capacitores individuales:

$$V_1' + V_2' + V_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} + \frac{Q_3'}{C_3} = 0$$

Reemplazando las cargas Q_2' y Q_3' por sus expresiones (i) y (iii), en términos de Q_1', se tiene:

$$\frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2 - Q_1 + Q_1'}{C_2} + \frac{Q_3 - Q_1 + Q_1'}{C_3} = 0$$

Después de reordenar y simplificar los términos, se despeja Q_1' en función de las cargas conocidas:

$$Q_1' = \frac{Q_1C_1(C_2 + C_3) - Q_2C_1C_3 - Q_3C_1C_2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

Reemplazando esta expresión de Q_1' de vuelta en las relaciones (i) y (iii) obtenemos Q_2' y Q_3':

$$Q_2' = \frac{Q_2C_2(C_1 + C_3) - Q_3C_2C_1 - Q_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

$$Q_3' = \frac{Q_3C_3(C_1 + C_2) - Q_1C_2C_3 - Q_2C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

Respuesta:

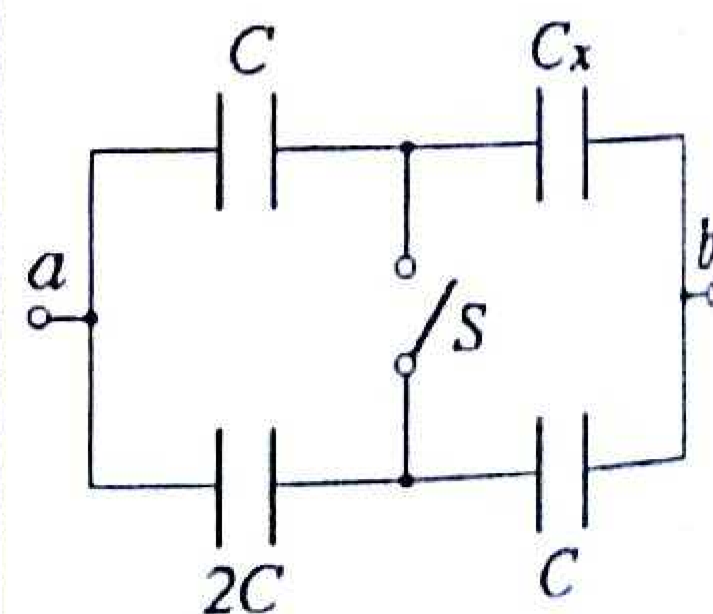
$Q_1' = \dfrac{Q_1C_1(C_2 + C_3) - Q_2C_1C_3 - Q_3C_1C_2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$

$Q_2' = \dfrac{Q_2C_2(C_1 + C_3) - Q_3C_2C_1 - Q_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$

$Q_3' = \dfrac{Q_3C_3(C_1 + C_2) - Q_1C_2C_3 - Q_2C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$

PR-5.11. *C_{ab} no debe cambiar al cerrar el interruptor*

En el circuito mostrado se desea conocer el valor que debe tener el capacitor C_x para que la capacitancia equivalente entre los terminales a y b no varíe cuando se cierra el interruptor S.



Solución: Antes de cerrar el interruptor S, la capacitancia equivalente entre los terminales a y b es:

$$C_{ab} = \frac{C(2C)}{C + 2C} + \frac{C_xC}{C_x + C} = \frac{2}{3}C + \frac{C_xC}{C_x + C}$$

Después de cerrar el interruptor S, la capacitancia equivalente es:

$$C_{ab}' = \frac{(3C)(C_x + C)}{3C + (C_x + C)} = \frac{3C(C_x + C)}{4C + C_x}$$

Si igualamos estas dos expresiones se obtiene:

$$\frac{3C(C_x + C)}{4C + C_x} = \frac{2}{3}C + \frac{C_xC}{C_x + C}$$

$$4C_x^2 - 4CC_x + C^2 = 0$$

Por lo tanto:

$$C_x = \frac{1}{2}C$$

Respuesta:

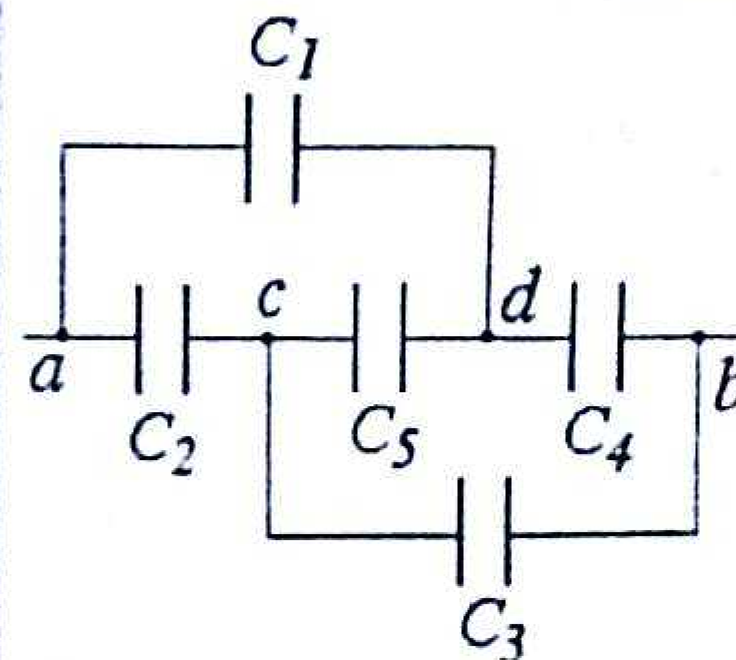
$$C_x = \frac{1}{2}C$$

PR-5.12. *Aprovechando la simetría*

Cinco capacitores se encuentran conectados como indica la figura. Cuatro de ellos son idénticos:

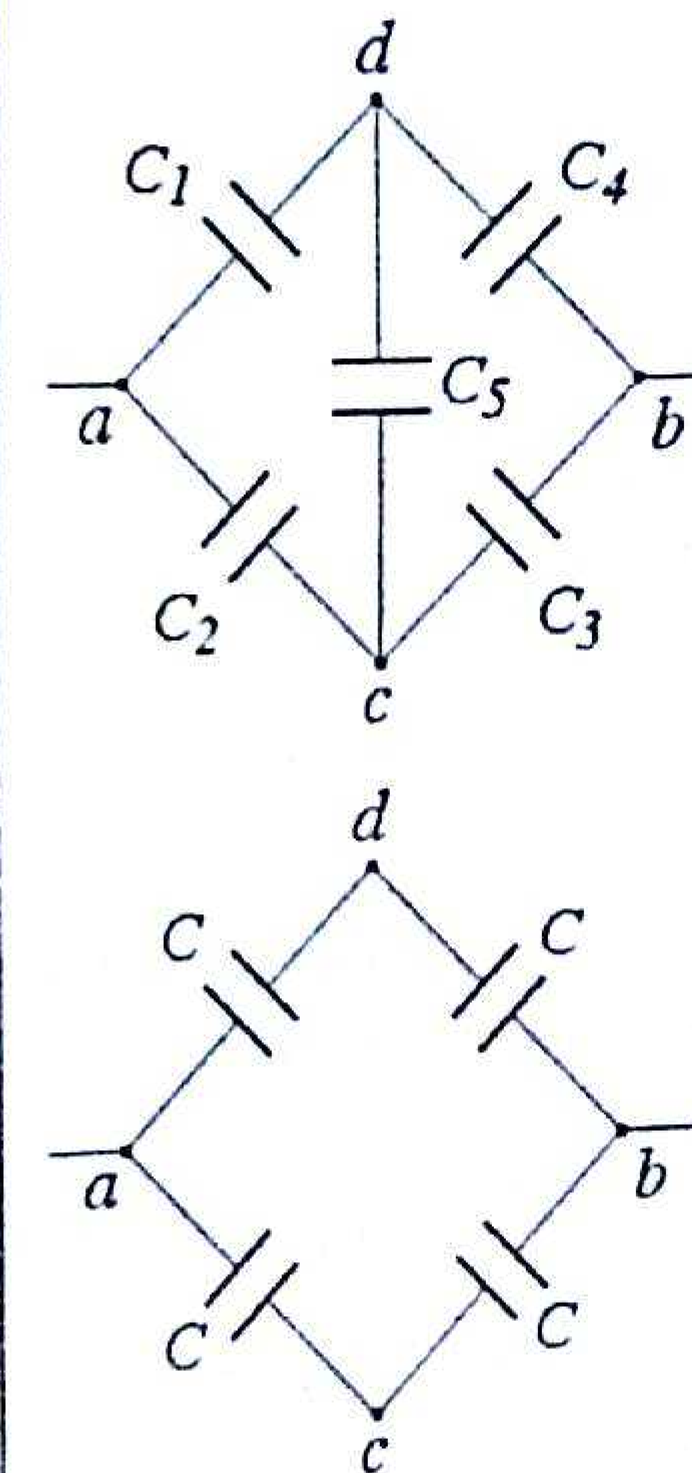
$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$$

El capacitor del medio tiene un valor diferente, C_5. Halle la capacitancia equivalente entre los terminales a y b.



Solución: Para apreciar mejor la simetría, en esta situación en que $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$, se procede a re-dibujar los alambres de conexión, como se ilustra en la Fig. a. Supongamos ahora que se conecta una batería entre los terminales a y b. Debido a la simetría (respecto de un eje AB), es evidente que por ser los capacitores C_1 y C_2 idénticos, adquieren la misma cantidad de carga. Lo mismo podemos decir respecto a los capacitores C_3 y C_4. Esto significa que los puntos simétricos c y d en la rama vertical están al mismo potencial ($V_c = V_d$). Por lo tanto, si no hay diferencia de potencial a través del capacitor central C_5, éste se encuentra descargado y podemos desconectarlo sin que ello afecte el resto del circuito.

Con esta simplificación, tenemos ahora el circuito de la Fig b, que está constituido por dos ramas en paralelo. La de arriba (adb), es una combinación serie cuya capacitancia equivalente es:



$$C_{adb} = \frac{C_1C_4}{C_1 + C_4} = \frac{CC}{C + C} = \frac{C}{2}$$

Similarmente, la rama de abajo (acb) es una combinación serie que equivale a $C_{acb} = C/2$. Por lo tanto, la capacitancia equivalente entre a y b es la resultante de dos capacitores de valor $C/2$, combinados en paralelo:

$$C_{ab} = C_{adb} + C_{acb} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$$

Respuesta:

$C_{ab} = C$

PR-5.13. *Conmutación de capacitores.*

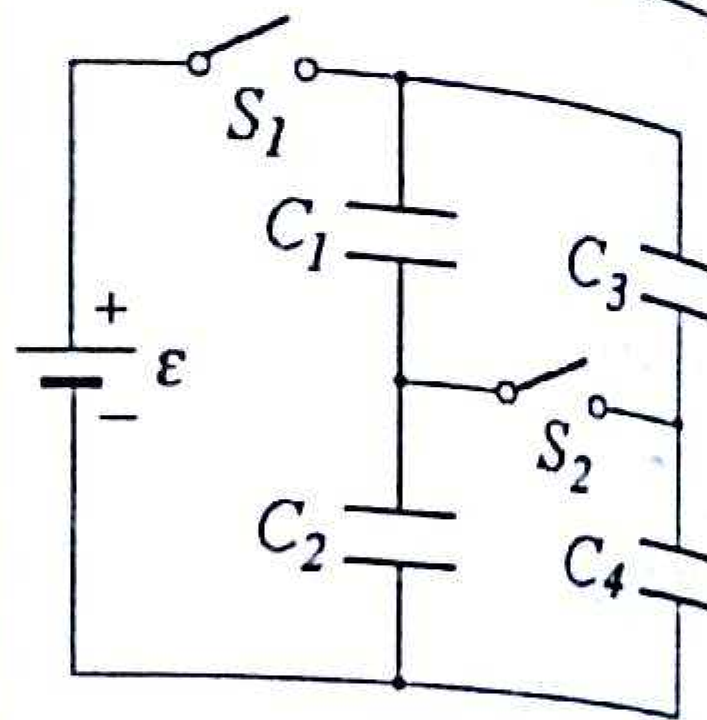
En el circuito mostrado, inicialmente ambos interruptores están abiertos y todos los capacitores están descargados.

a) Si se cierra S_1, ¿cuál será la carga en cada capacitor?

b) Si además se cierra S_2, ¿cuáles serán las nuevas cargas?

c) ¿Cuánta carga circuló a través de S_2?

$C_1 = 6\mu F$, $C_2 = 3\mu F$, $C_3 = 1\mu F$, $C_4 = 4\ \mu F$, $\varepsilon = 15$ v.



Solución: (a) Con S_1 *cerrado:* C_1 queda en serie con C_2 y sus cargas son iguales, $Q_1 = Q_2$. Además, la suma de sus voltajes da el voltaje total de la fuente:

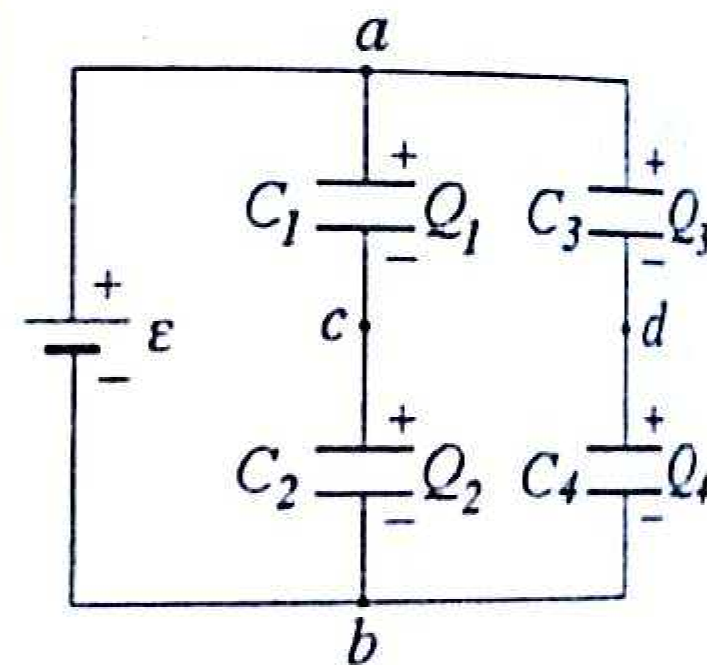
$$V_{ab} = \varepsilon = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Despejando Q_1:

$$Q_1 = Q_2 = \varepsilon\left(\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\right) = 15\text{v}\,\frac{(6\mu F)(3\mu F)}{6\mu F + 3\mu F} = 30\mu C$$

De manera similar, C_3 y C_4 están en serie y sus cargas son iguales,

$$Q_3 = Q_4 = \varepsilon\left(\frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}\right) = 15\text{v}\,\frac{(1\mu F)(4\mu F)}{1\mu F + 4\mu F} = 12\mu C$$



(a) S1 cerrado

(b) S_1 y S_2 *cerrados:* En este caso quedan en paralelo, C_1 con C_3 y C_2 con C_4. Igualando los voltajes de los capacitores en paralelo:

$$V_1 = V_3 \;\Rightarrow\; \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_3}{C_3} \;\Rightarrow\; Q_1 = Q_3\left(\frac{C_1}{C_3}\right) = 6Q_3$$

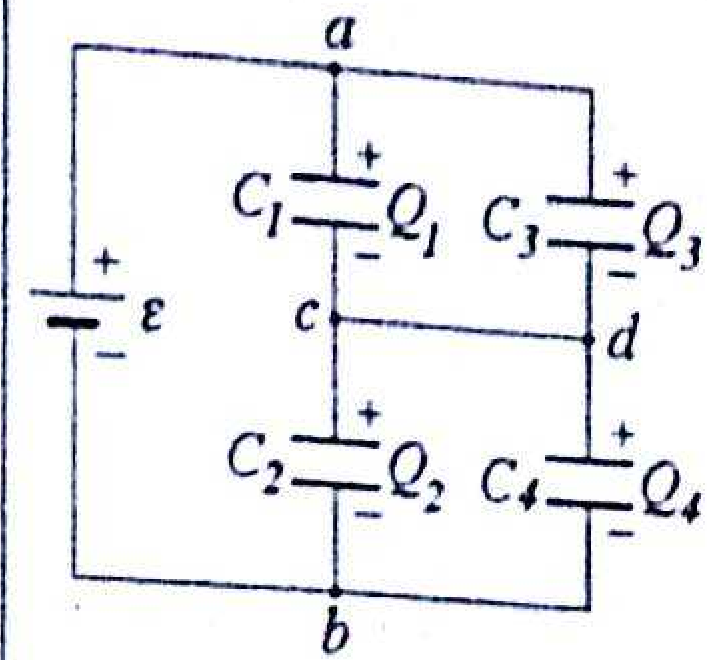
$$V_2 = V_4 \;\Rightarrow\; \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_4}{C_4} \;\Rightarrow\; Q_2 = Q_4\left(\frac{C_2}{C_4}\right) = \frac{3}{4}Q_4$$

Si tomamos en cuenta que la carga neta en las placas conectadas por el conductor central $\overline{cd}$, debe permanecer nula, ($Q_2 + Q_4 - Q_1 - Q_3 = 0$) y usando las expresiones anteriores de Q_1 y Q_2, tenemos:

$$Q_4 = Q_3 + Q_1 - Q_2 = Q_3 + 6Q_3 - \frac{3}{4}Q_4 \;\Rightarrow\; Q_4 = 4Q_3$$

Por otra parte, la suma de los voltajes de C_3 y C_4 es el voltaje total de la fuente:

$$\varepsilon = V_3 + V_4 = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = Q_3\left(\frac{1}{C_3} + \frac{4}{C_4}\right) = 2\text{x}10^6 Q_3$$



(b) S_1 y S_2 cerrados

Por lo tanto:

$Q_3 = \varepsilon / 2\text{x}10^6 = (15\text{V} / 2\text{x}10^6\text{F}^{-1}) = 7{,}5\ \mu C$

$Q_4 = 4Q_3 = 4 \text{ x } 7{,}5\mu C = 30\ \mu C$

$Q_1 = 6Q_3 = 6 \text{ x } 7{,}5\mu C = 45\ \mu C$

$Q_2 = 3Q_4/4 = 22{,}5\ \mu C$

c) La carga que circuló por el interruptor S_2 es la carga neta en la rama de la derecha:

$$\Delta Q = Q_4 - Q_3 = 30\ \mu C - 7{,}5\ \mu C = 22{,}5\ \mu C$$

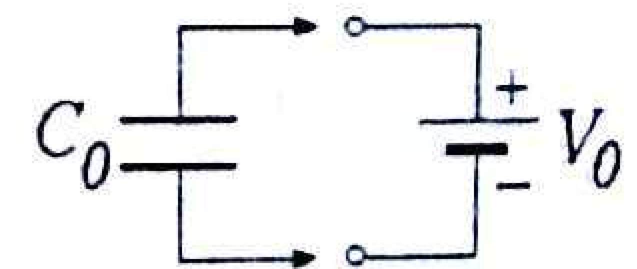
que debe coincidir con el negativo de la carga neta en la rama de la izquierda.

Respuesta:

a) $Q_1 = Q_2 = 30\mu C$
$Q_3 = Q_4 = 12\mu C$
b) $Q_1 = 45\mu C$, $Q_2 = 22{,}5\mu C$
$Q_3 = 7{,}5\mu C$, $Q_4 = 30\mu C$
c) $\Delta Q = 22{,}5\mu C$

PR-5.14. *Alto voltaje mediante cadena de capacitores*

Un capacitor C_o se carga mediante una pila de voltaje V_o. A continuación este capacitor se desconecta de la pila y se conecta a otro capacitor C_1. Luego C_o se desconecta y se usa para cargar otro capacitor C_2; después C_o carga a un tercer capacitor, C_3, y así sucesivamente. Finalmente los capacitores cargados C_1, C_2, C_3, etc,..se acoplan uno a continuación de otro. ¿Cuál será la máxima diferencia de potencial obtenible entre los extremos de la cadena?



Suponga que

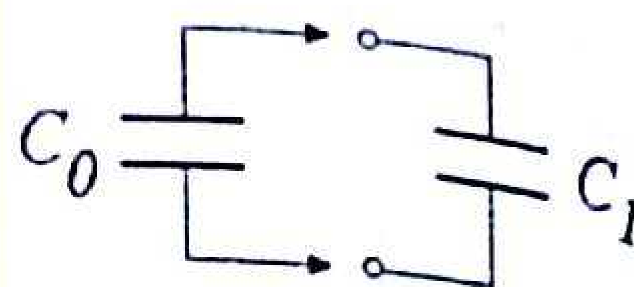
$C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_0/100$

Solución: Después de desconectar el capacitor C_0 de la pila, queda con una carga inicial $Q_0 = C_0V_0$. Al conectar C_0 con el capacitor $C_1 = C$, esta carga se distribuye hasta que los voltajes de los dos capacitores en paralelo, sean iguales.

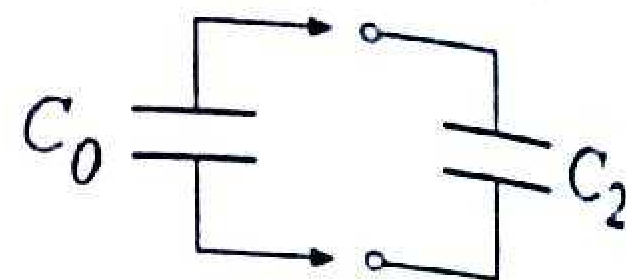
$$V_1 = \frac{Q_0}{C_{eq}} = \frac{C_0 V_0}{C_0 + C_1} = (\frac{C_0}{C_0 + C})V_0$$

Cuando se desconecta C_o, queda con un voltaje V_1 y la carga que lleva es:

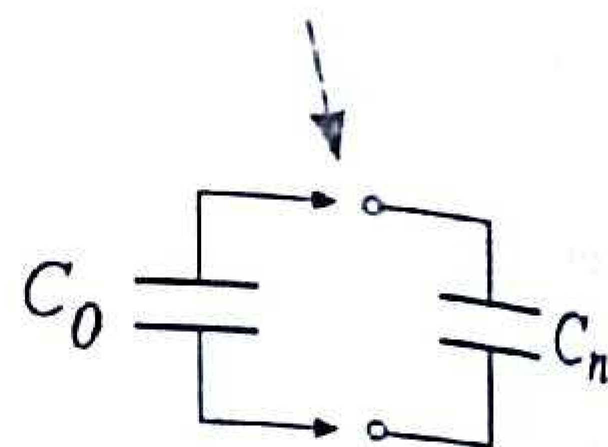
$$Q_0' = C_0 V_1 = (\frac{C_0^2}{C_0 + C})V_0$$



Después de conectar C_o con el capacitor $C_2 = C$, esta carga se distribuye hasta igualar los voltajes. El nuevo voltaje de C_o en paralelo con C_2 será:



$$V_2 = \frac{Q_0'}{C_0 + C_2} = (\frac{1}{C_0 + C})(\frac{C_0^2}{C_0 + C})V_0 = (\frac{C_0}{C_0 + C})^2 V_0$$

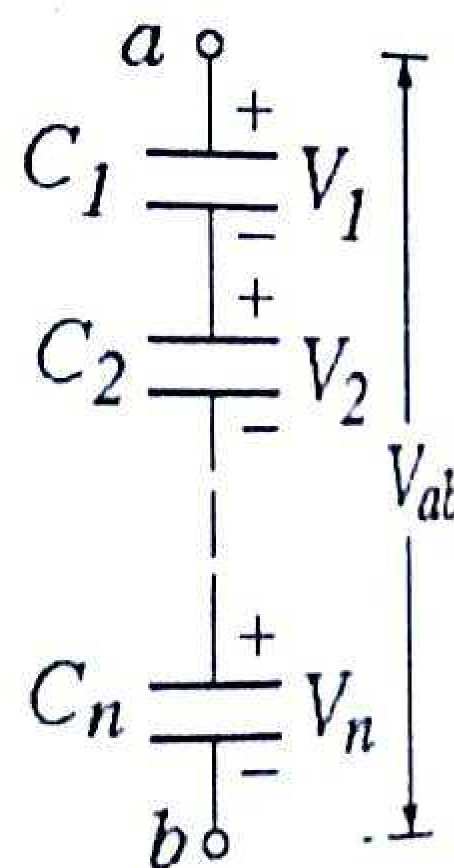


Podemos repetir esta operación n veces y tendremos así un conjunto de capacitores cargados a expensas de C_o, con voltajes respectivos V_1, V_2, V_3, ...,V_n, siendo el voltaje del n-simo capacitor:

$$V_n = (\frac{C_0}{C_0 + C})^n V_0$$

Si ahora conectamos los capacitores cargados, uno a continuación de otro, con las polaridades indicadas, el voltaje total en los extremos es la suma:

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + .. + V_n + ..$$



Observe que las cargas individuales de los capacitores se mantienen sin re-distribuirse (¿por qué ?)

$$V_{ab} = (\frac{C_0}{C_0 + C})V_0 + (\frac{C_0}{C_0 + C})^2 V_0 + ... + (\frac{C_0}{C_0 + C})^n V_0 + ..$$

$$V_{ab} = \frac{C_0 V_0}{C_0 + C}[1 + r^2 + r^3 + .. + r^n + ..]$$

El término en corchetes es una serie geométrica cuya razón es: $r = \frac{C_0}{C_0 + C} < 1$, y cuya suma viene dada por:

$$[1 + r + r^2 + r^2 + ..] = \frac{1}{1 - r} = \frac{1}{1 - C_0/(C_0 + C)} = \frac{C_0 + C}{C}$$

La diferencia de potencial en los extremos de la cadena es:

$$V_{ab} = \frac{C_0 V_0}{C_0 + C}\frac{C_0 + C}{C} = (\frac{C_0}{C})V_0$$

En el caso particular para $C_0 / C = 100$, tenemos:

$$V_{AB} = 100 V_0.$$

Respuesta:

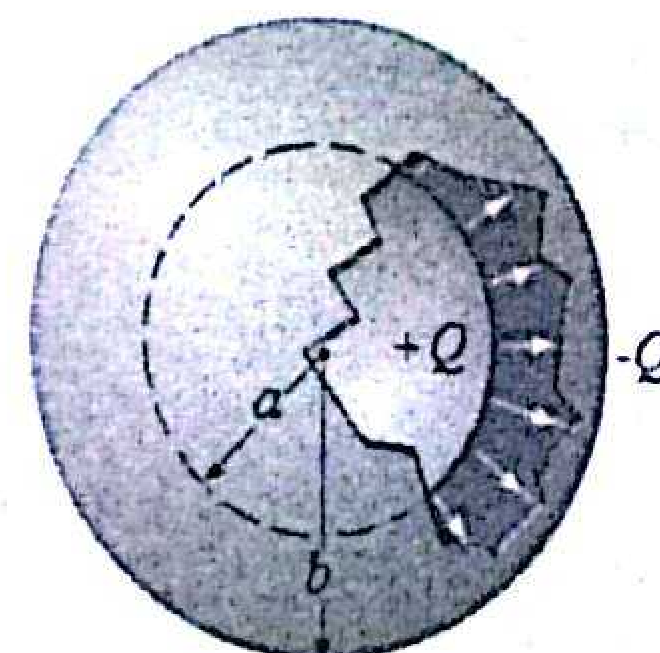
$$V_{ab} = (\frac{C_0}{C})V_0 = 100 V_0$$

PR-5.15. *Capacitor esférico: Enfoque energético*

Un capacitor está constituido por dos esferas metálicas concéntricas de radios a y b con el espacio entre ellas vacío. Las esferas tienen cargas $+Q$ y $-Q$.
a) Calcule la energía almacenada en el capacitor.
b) A partir de la energía calcule la capacitancia.

Solución: a) El campo eléctrico es cero dentro de la esfera interna y también es cero afuera de la superficie externa. Entre las dos esferas metálicas su valor es:

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



La densidad de energía:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2})^2 = \frac{1}{32}\frac{Q^2}{\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

Si dividimos el volumen, en conchas esféricas de radio r, área superficial $4\pi r^2$ y espesor dr, la energía total contenida en el espacio entre las esferas es:

$$U = \int u_E dV = \int_a^b (\frac{1}{32}\frac{Q^2}{\pi^2\varepsilon_0 r^4})4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left.\frac{-1}{r}\right|_a^b = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

b) Comparando con la expresión para la energía almacenada en términos de C, encontramos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0(\frac{ab}{b - a})$$

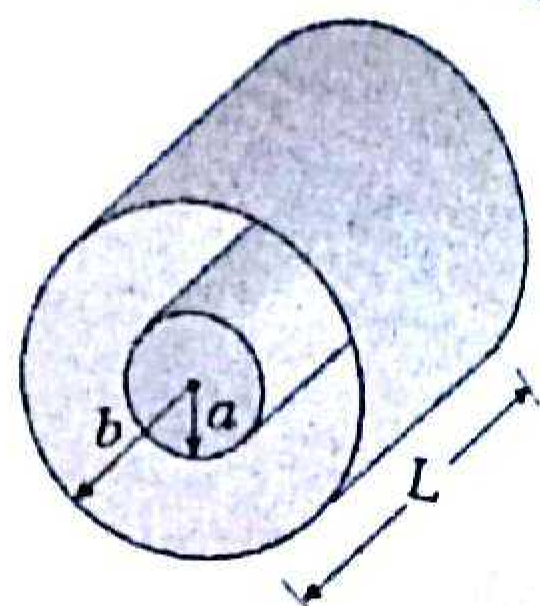
Respuesta:

$$C = 4\pi\varepsilon_0(\frac{ab}{b - a})$$

PR-5.16. *Energía en un capacitor cilíndrico.*

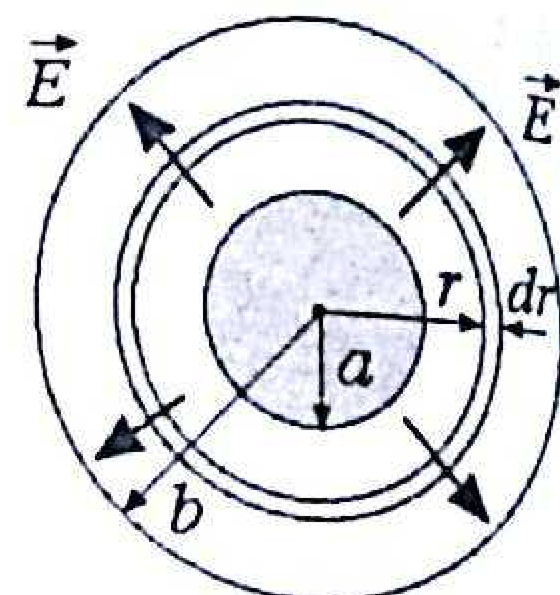
Considere un capacitor cilíndrico de radios a y b, que está cargado. Ignorando los efectos de borde, demuestre que la mitad de la energía electrostática está almacenada dentro de un cilindro imaginario cuyo radio es:

$$r=\sqrt{ab}$$



Solución: Si Q es la carga en el cilindro interno, entonces el campo eléctrico es radial y su magnitud a una distancia r del eje, se determina aplicando la ley de Gauss:

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}$$



Donde L es la longitud del cilindro. La densidad de energía (energía por unidad de volumen) en esa región es:

$$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2L^2}$$

Si consideramos un casquete cilíndrico de longitud L, radio r y espesor dr, (volumen $dV=2\pi rLdr$), la energía contenida es:

$$dU=u_E dV=\left(\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2L^2}\right)(2\pi rLdr)=\frac{Q^2dr}{4\pi\varepsilon_0 Lr}$$

Por lo tanto, la energía total almacenada en una región cilíndrica de radio interno a y radio externo r es:

$$U_r=\int_a^r u_E dV=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_a^r\frac{dr}{r}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

La energía total almacenada dentro del capacitor se obtiene para $r=b$:

$$U_{total}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si queremos hallar un radio r tal que $U_r=U_{total}/2$, entonces:

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}ln\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{ab}$$

Respuesta:

$$\boxed{r=\sqrt{ab}}$$

PR-5.17. *Atracción entre las placas de un capacitor*

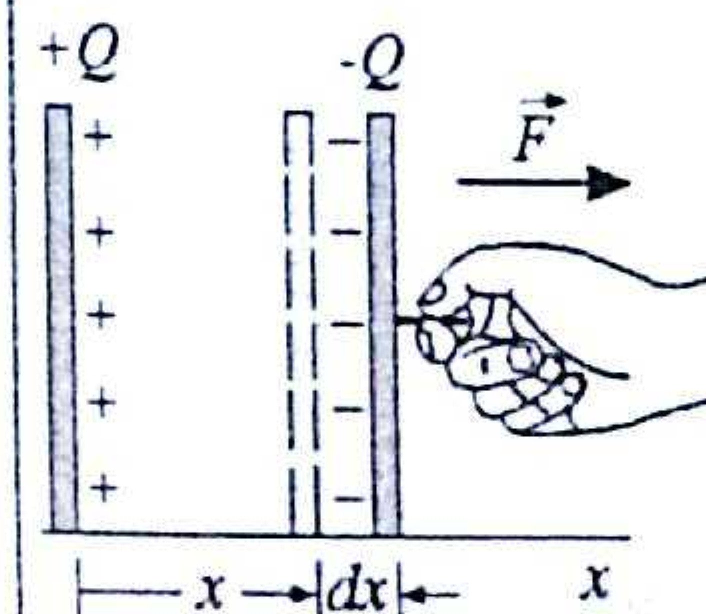
Determine la fuerza de atracción entre las dos placas de un capacitor de placas paralelas. Considere los dos casos:

a) El capacitor tiene cargas fijas $\pm Q$.

b) El capacitor está conectado a una batería y la diferencia de potencial V es constante.

c) ¿Por qué las dos expresiones de la fuerza son distintas?

Solución: a) Si A es el área de las placas y x es su separación, la energía electrostática almacenada en el capacitor con carga Q es:



$$U(x)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2x}{\varepsilon_0 A}$$

La fuerza de atracción entre las placas es:

$$F=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$$

b) Si el capacitor tiene voltaje V constante, la energía almacenada es:

$$U(x)=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x}V^2$$

La fuerza de atracción entre las placas es:

$$F=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2$$

c) Si tomamos en cuenta que, $Q=CV=(\varepsilon_0 A/x)V$, vemos que, en realidad los dos resultados son iguales pero expresados en forma diferente. En el primer caso, Q es constante y V varía, mientras que, en el segundo caso, V es constante y Q varía.

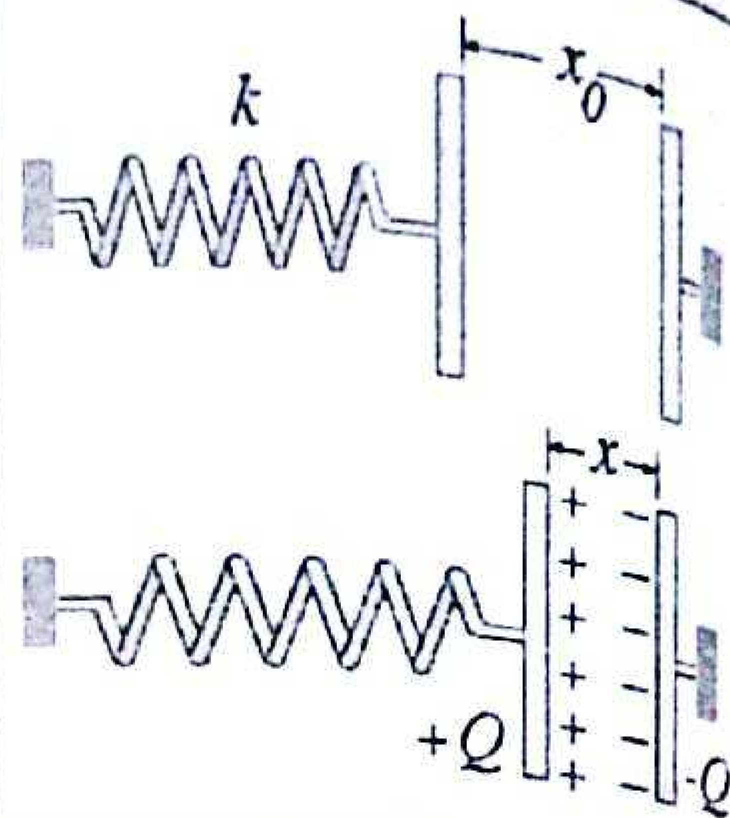
Respuesta:

a) $F=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$

b) $F=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2$

PR-5.18. ¿Cuánto se estira el resorte?

Un capacitor de placas paralelas con área A tiene una de sus placas fija a una pared y la otra está conectada a un resorte de constante elástica k. Si en las placas se colocan cargas $+Q$ y $-Q$, ¿cuánto se estira el resorte?



Solución: La placa de la izquierda estará sometida a dos fuerzas, la fuerza elástica ejercida por el resorte $\vec{F}_r = -k(x - x_0)\hat{x}$ que está dirigida hacia la izquierda y la fuerza de atracción eléctrica ejercida por la otra placa que está dirigida hacia la derecha. Esta última fue calculada en el problema anterior:

$$\vec{F}_e = +\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{x}$$

En equilibrio, las dos fuerzas tienen igual magnitud, por lo tanto:

$$k(x - x_0) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$$

El estiramiento del resorte es:

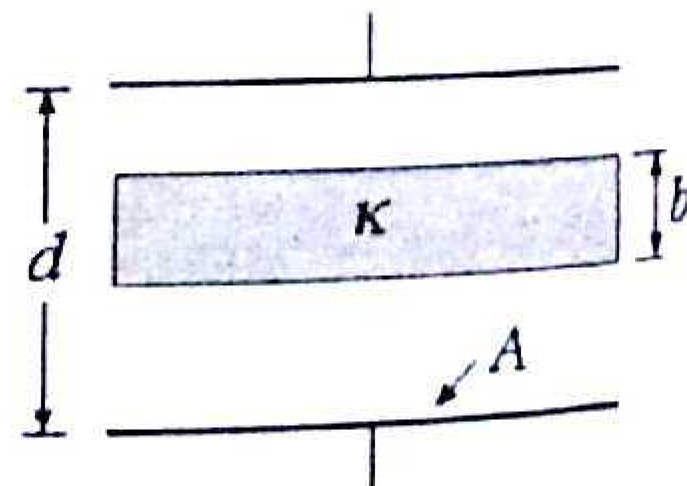
$$\Delta x = x - x_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 k A}$$

Respuesta:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 k A}$$

PR-5.19. Capacitor parcialmente lleno con dieléctrico

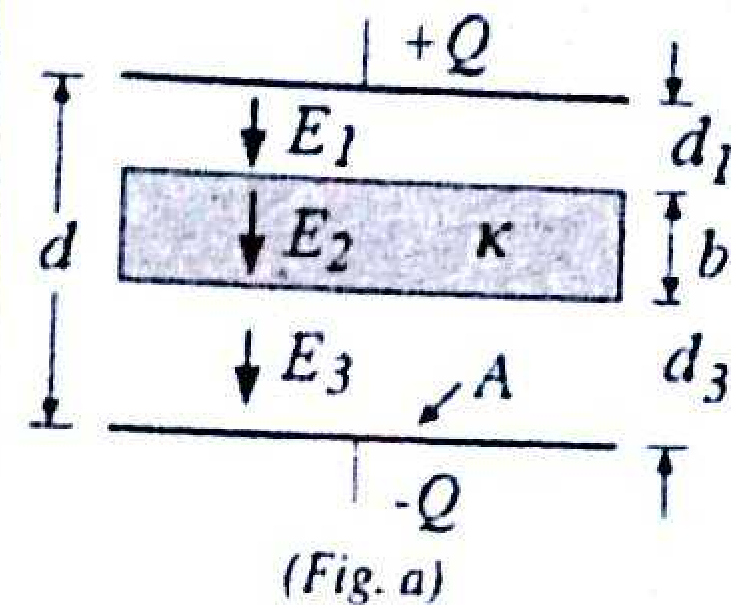
Un bloque de material de constante dieléctrica κ y de espesor b es insertado entre las placas de un capacitor de placas paralelas de área A y separación d. Determine la nueva capacitancia.



Solución: Supongamos una carga $+Q$ en la placa superior y una carga $-Q$ en la placa inferior (Fig. a). Los campos eléctricos en las diferentes regiones son uniformes y se obtienen aplicando la ley de Gauss.

En las regiones vacías, los campos son:

$$E_1 = E_3 = E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$



(Fig. a)

Mientras que en la región con dieléctrico el campo eléctrico aplicado se reduce en un factor κ.

$$E_2 = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}$$

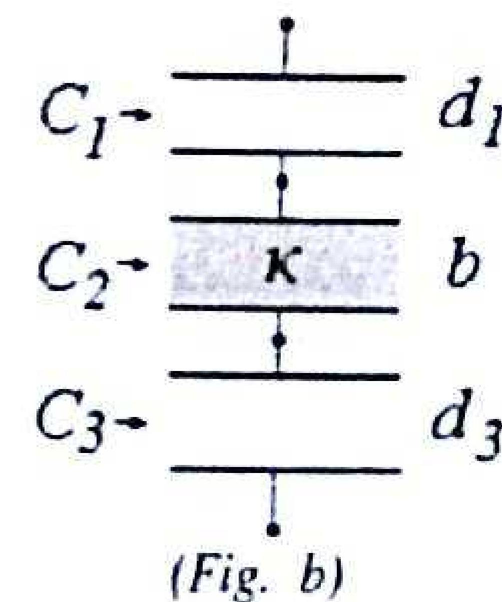
La diferencia de potencial entre las placas es la suma de las tres diferencias de potencial:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = E_0 d_1 + (\frac{E_0}{\kappa})b + E_0 d_3$$

$$V = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}[d_1 + \frac{b}{\kappa} + d_3] = \frac{Q_0}{\kappa\varepsilon_0 A}[\kappa(d_1 + d_3) + b]$$

Tomando en cuenta que: $d_1 + d_3 = d - b$, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa(d_1 + d_3) + b} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}$$



(Fig. b)

Se observa que el resultado no depende de la ubicación del dieléctrico dentro de las placas. Este resultado también podría haberse obtenido de una manera mas sencilla, si consideramos que el capacitor está constituido por *tres capacitores en serie*, de igual área y estando el del medio lleno con dieléctrico (Fig. b).

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{b}{\kappa\varepsilon_0 A} + \frac{d_3}{\varepsilon_0 A}$$

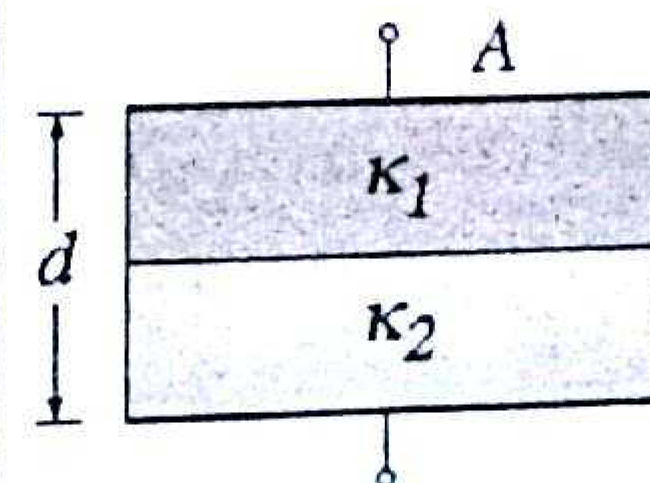
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}[d - b + \frac{b}{\kappa}] \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}$$

Respuesta:

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}$$

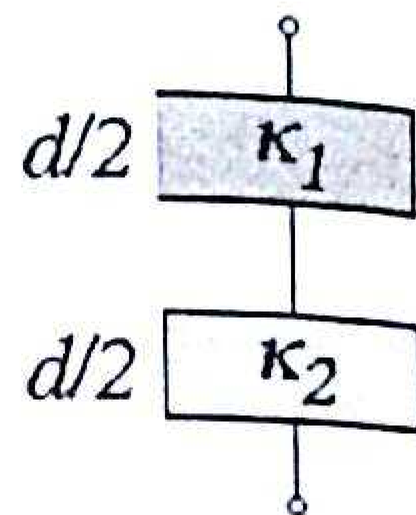
PR-5.20. Capacitor plano con dos dieléctricos I.

Sea un capacitor de placas paralelas, de área A y separación d. Se insertan entre las placas dos bloques dieléctricos de igual área A y espesor $d/2$, y constantes dieléctricas respectivas, κ_1 y κ_2. Halle la capacitancia.



Solución: *Metodo 1*: Si las placas tienen cargas $+Q$ y $-Q$ los campos eléctricos en la región superior e inferior son:

$$E_1 = \frac{Q}{\kappa_1 \varepsilon_0 A} \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{Q}{\kappa_2 \varepsilon_0 A}$$



La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right) = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 A}\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)$$

Metodo 2: La capacitancia no se altera si imaginamos que en la interfaz de los dieléctricos existe una película metálica muy delgada. Cuando las placas del capacitor tienen cargas $+Q$ y $-Q$ se puede suponer que en la laminita imaginaria, habría carga $+Q$ en una cara y carga $-Q$ en la otra, de forma tal que la carga neta global de la laminita sería cero. Con estas placas ficticias, podemos considerar entonces que el capacitor original es equivalente a dos capacitores conectados *en serie* con capacitancias respectivas:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d/2} \qquad C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A}{d/2}$$

Sumando los inversos de las capacitancias:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/2}{\kappa_1 \varepsilon_0 A} + \frac{d/2}{\kappa_2 \varepsilon_0 A} = \frac{d}{2\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right)$$

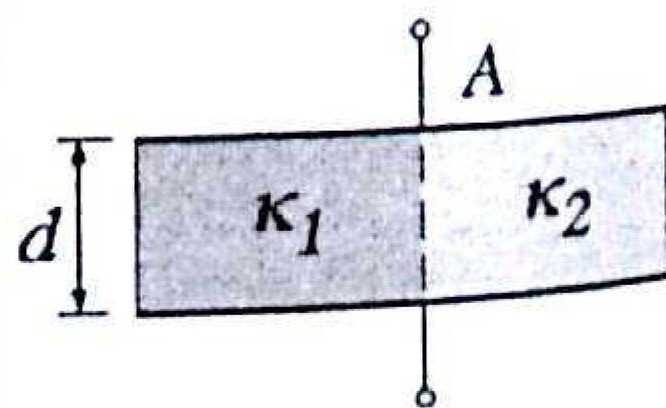
Por lo tanto: $C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)$

Respuesta:

$$C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)$$

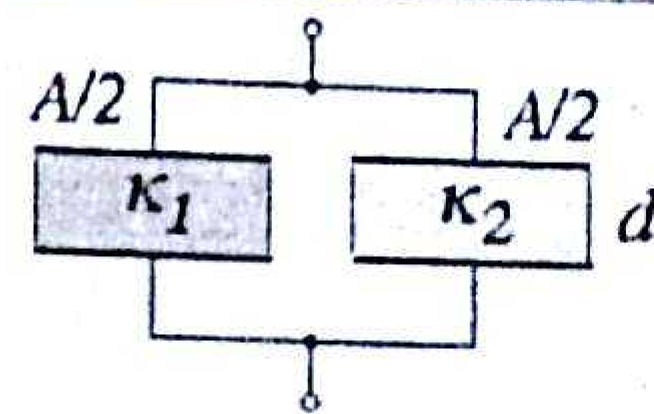
PR-5.21. *Capacitor plano con dos dieléctricos II.*

Sea un capacitor de placas paralelas, de área A y separación d. Se insertan entre las placas dos bloques dieléctricos de igual espesor d y área $A/2$, y constantes dieléctricas respectivas, κ_1 y κ_2. Halle la capacitancia.



Solución: Podemos considerar que este capacitor es equivalente a dos capacitores de igual espesor d y área $A/2$, conectados *en paralelo*, como indica la figura.

La capacitancia equivalente es la suma de las capacitancias individuales:



$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A/2}{d} + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A/2}{d}$$

La capacitancia es:

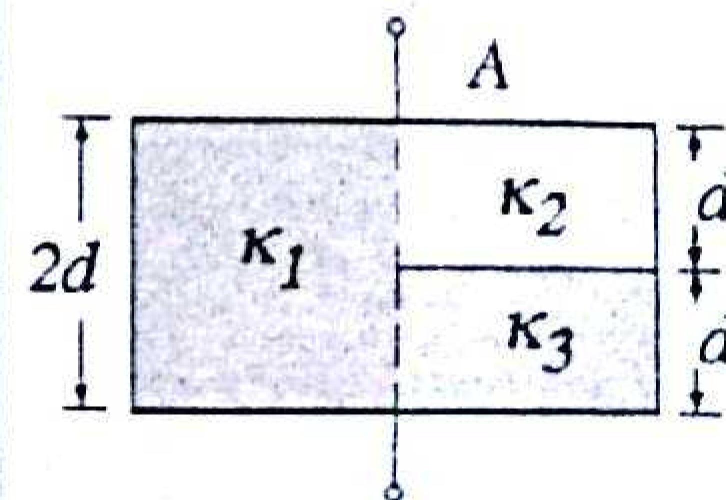
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)$$

Respuesta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)$$

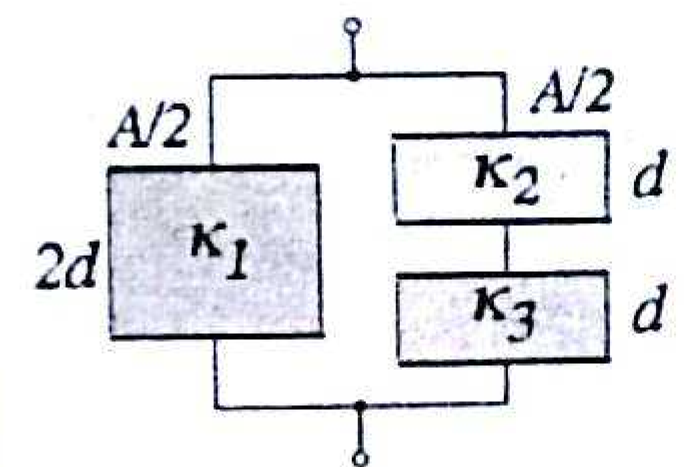
PR-5.22. *Capacitor plano con tres dieléctricos.*

Sea un capacitor de placas paralelas, de área A y separación $2d$. Se insertan entre las placas tres bloques dieléctricos con constantes dieléctricas respectivas: κ_1, κ_2 y κ_3, como se muestra en la figura. Halle la capacitancia.



Solución: Podemos considerar que este capacitor es equivalente a tres capacitores, dos de los cuales C_2 y C_3 de espesor d y área $A/2$ están conectados en serie, y la combinación de estos, queda conectada en paralelo, con C_1, este último de espesor $2d$ y área $A/2$. La capacitancia equivalente de C_2 en serie con C_3 viene dada por:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$



La capacitancia equivalente de C_1 en paralelo con C_{23} es:

$$C = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Sustituyendo las expresiones para cada una de las capacitancias:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{4d} \quad C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A}{2d} \quad C_3 = \frac{\kappa_3 \varepsilon_0 A}{2d}$$

Se obtiene finalmente:

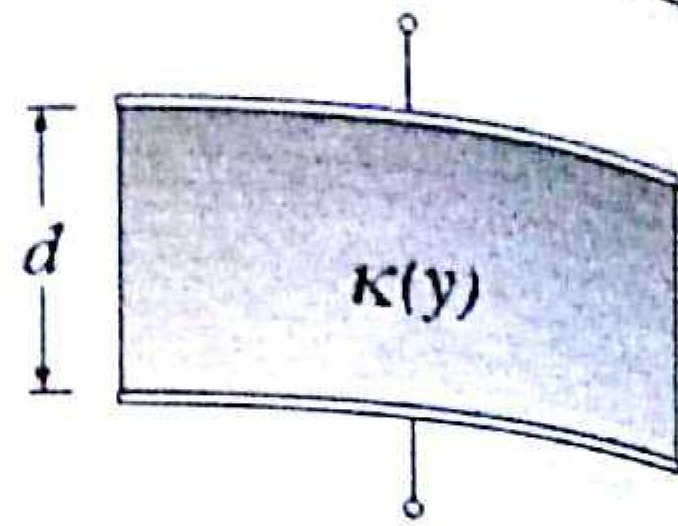
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{4d}\left[\kappa_1 + \frac{2\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}\right]$$

Respuesta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{4d}\left[\kappa_1 + \frac{2\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}\right]$$

PR-5.23. *Capacitor con dieléctrico lineal I*

Un capacitor de placas paralelas cuadradas, de área $L \times L$, y separación entre placas $d << L$. Está relleno con un dieléctrico no uniforme, cuya constante varía linealmente de una placa a la otra. En la placa inferior el valor de la constante dieléctrica es κ_0, mientras que en la superior, el valor es κ_1. Determine la capacitancia.



Solución: La constante dieléctrica es una función lineal de la coordenada y:

$$\kappa(y) = \kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)\frac{y}{d}$$

Por lo tanto, dividiremos el dieléctrico en tiras de espesor Δy, y área $L \times L$. La capacitancia de esta tira es:

$$C(y) = \kappa(y)\frac{\varepsilon_0 L^2}{\Delta y}$$

Desde el punto de vista eléctrico, todas las tiras desde $y = 0$ hasta $y = d$, se pueden considerar como capacitores conectados *en serie*. El inverso de la capacitancia total es:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \sum_i \frac{\Delta y_i}{\kappa_i \varepsilon_0 L^2}$$

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dy}{\kappa(y)\varepsilon_0 L^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 L^2}\int_0^d \frac{dy}{\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)y/d}$$

Integrando:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1 - \kappa_0)} \ln[\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)\frac{y}{d}]\Big|_0^d$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1 - \kappa_0)} \ln\frac{\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)}{\kappa_0} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1 - \kappa_0)} \ln\frac{\kappa_1}{\kappa_0}$$

Tomando el inverso, se obtiene la capacitancia buscada:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\ln(\kappa_1/\kappa_0)}$$

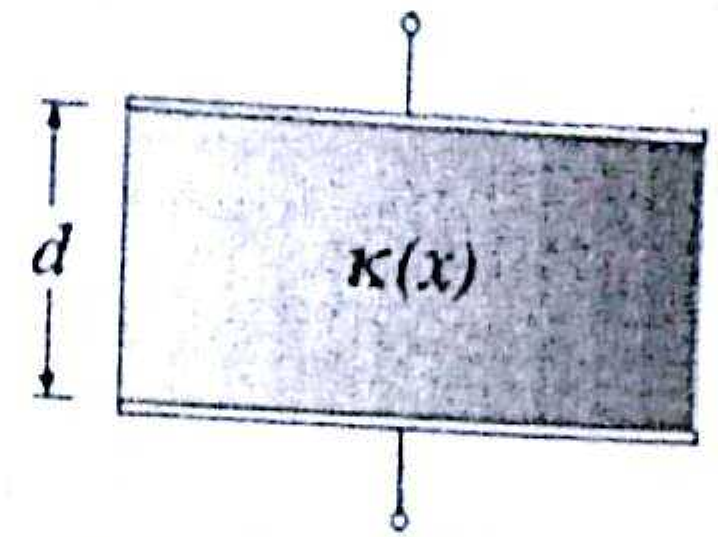
Se puede verificar que, en el límite $\kappa_1 \to \kappa_0$, se obtiene la expresión conocida para un dieléctrico uniforme.

Respuesta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\ln(\kappa_1/\kappa_0)}$$

PR-5.24. *Capacitor con dieléctrico lineal II*

Un capacitor de placas paralelas cuadradas, de área $L \times L$, y separación entre placas $d << L$. Está relleno con un dieléctrico no uniforme, cuya constante varía linealmente de un lado al otro. En el lado izquierdo el valor de la constante dieléctrica es κ_0, mientras que en el lado derecho, el valor es κ_1. Determine la capacitancia.



Solución: La constante dieléctrica es una función lineal de la coordenada x:

$$\kappa(x) = \kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)\frac{x}{L}$$

Dividiremos el dieléctrico en tiras de espesor Δx, ancho L y altura d. La capacitancia elemental de esta tira es:

$$dC(x) = \kappa(x)\frac{\varepsilon_0 L dx}{d} = [\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)\frac{x}{L}]\frac{\varepsilon_0 L dx}{d}$$

Todas las tiras se pueden considerar como capacitores conectados *en paralelo*. Las capacitancia equivalente es la suma de las capacitancias elementales:

$$C = \int_0^L [\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0)\frac{x}{L}]\frac{\varepsilon_0 L dx}{d}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{d}[\kappa_0 x + \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\varepsilon_0 L}{d}[\kappa_0 L + \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{L}\frac{L^2}{2}]$$

La capacitancia resulta proporcional a la media aritmética de las constantes dieléctricas en los extremos:

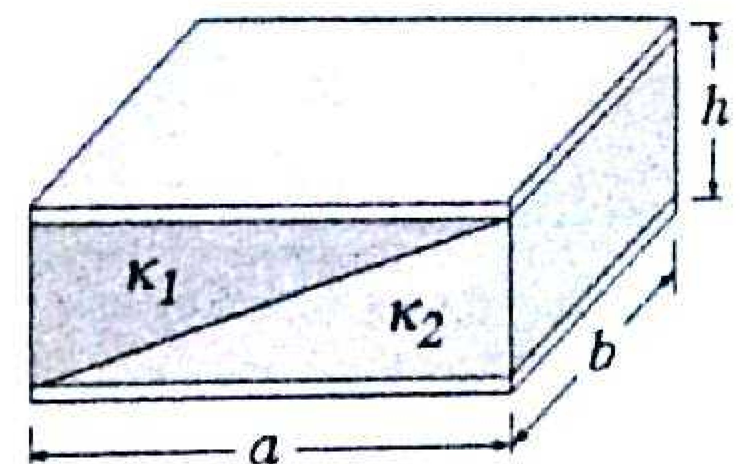
$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{2}$$

Respuesta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{2}$$

PR-5.25. *Dos dieléctricos en forma de cuña.*

Un capacitor de placas rectangulares paralelas, con lados a y b y con separación entre placas, h, tiene entre sus placas dos materiales en forma de cuña y de constantes dieléctricas respectivas κ_1 y κ_2. Determine la capacitancia.



Solución: Sea una tajada elemental de espesor dx, a una distancia x desde el borde izquierdo. Tenemos así un capacitor constituido por dos capacitores de placas paralelas con igual área (bdx) conectados en serie. Uno de los capactores con dieléctrico κ_2 tiene altura y:

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h}{a}x$$

El otro capacitor con dieléctrico κ_1 tiene altura ($h - y$):

$$h - y = h - \frac{h}{a}x = \frac{h(a-x)}{a}$$

El inverso de la capacitancia elemental resultante es:

$$\frac{1}{dC} = \frac{1}{\kappa_2\varepsilon_0\dfrac{bdx}{y}} + \frac{1}{\kappa_1\varepsilon_0(\dfrac{bdx}{h-y})}$$

$$\frac{1}{dC} = \frac{hx}{\kappa_2\varepsilon_0 abdx} + \frac{h(a-x)h}{\kappa_1\varepsilon_0 abdx} = \frac{\kappa_1 hx + \kappa_2 h(a-x)}{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 abdx}$$

De modo que la capacitancia elemental es:

$$dC = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 abdx}{\kappa_1 hx + \kappa_2 h(a-x)} = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 abdx}{\kappa_2 ah + (\kappa_1 - \kappa_2)hx}$$

El capacitor completo puede ser visto como una serie en paralelo de infinitos capacitores elementales, cuya capacitancia equivalente es la suma:

$$C = \int dC = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 ab}{(\kappa_1-\kappa_2)h}\int_0^a \frac{dx}{[\dfrac{\kappa_2 a}{(\kappa_1-\kappa_2)} + x]}$$

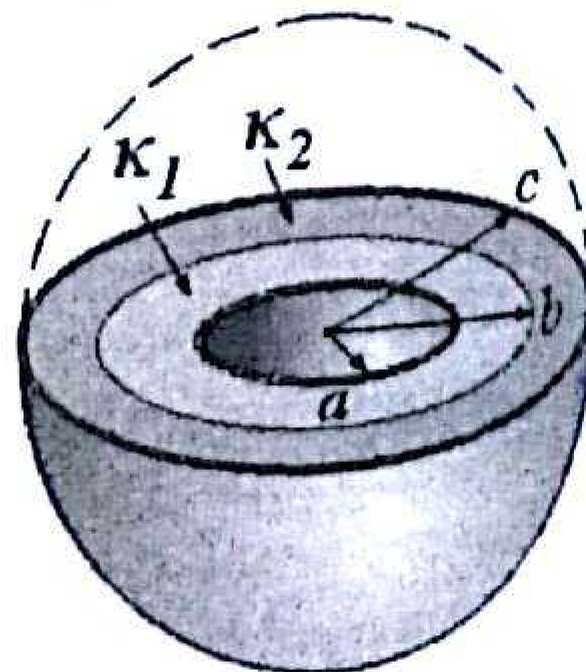
$$C = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 ab}{(\kappa_1-\kappa_2)h}\ln[\frac{\kappa_2 a}{(\kappa_1-\kappa_2)} + x]\Big|_0^a = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 ab}{(\kappa_1-\kappa_2)h}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Respuesta:

$$C = \frac{\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 ab}{(\kappa_1-\kappa_2)h}\ln(\frac{\kappa_1}{\kappa_2})$$

PR-5.26. *Capacitor esférico con dos dieléctricos*

Determine la capacitancia de un capacitor esférico constituido por dos cascarones metálicos de radios a y c, entre los cuales están dos dieléctricos, uno con constante dieléctrica κ_1 en la región entre a y b y el otro con constante dieléctrica κ_2 en la región entre b y c.



Solución: El sistema puede ser considerado como una combinación de dos capacitores esféricos conectados en serie, con capacitancias respectivas:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\kappa_1(\frac{ab}{b-a}) \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_0\kappa_2(\frac{bc}{c-b})$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

La capacitancia eefectiva es:

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{[4\pi\varepsilon_0\kappa_1(\dfrac{ab}{b-a})][4\pi\varepsilon_0\kappa_2(\dfrac{bc}{c-b})]}{4\pi\varepsilon_0\kappa_1(\dfrac{ab}{b-a}) + 4\pi\varepsilon_0\kappa_2(\dfrac{bc}{c-b})}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{\kappa_1\kappa_2 abc}{\kappa_1(c-b)a + \kappa_2(b-a)c}$$

Respuesta:

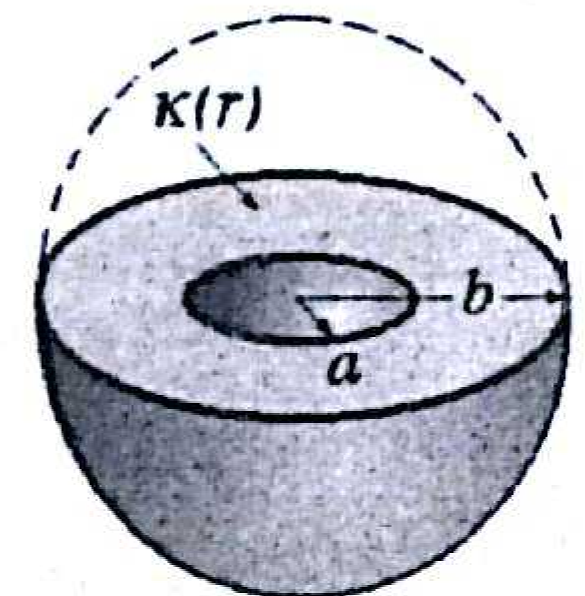
$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{\kappa_1\kappa_2 abc}{\kappa_1(c-b)a + \kappa_2(b-a)c}$$

PR-5.27. *Dieléctrico inhomogéneo en capacitor esférico*

Determine la capacitancia de un capacitor esférico constituido por dos cascarones metálicos de radios a y b, entre los cuales está un dieléctrico con un constante dieléctrica isotrópica que depende de r.

$$\kappa(r) = \frac{A}{r}$$

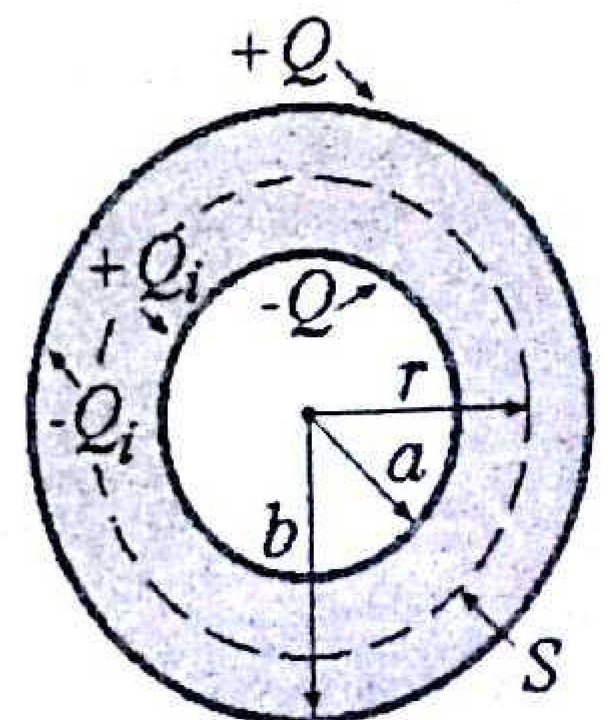
Siendo A una constante.



Solución: Cuando se colocan cargas $+Q$ y $-Q$ en las esferas metálicas se inducen cargas superficiales $-Q_i$ y $+Q_i$ en las superficies interna y externa del dieléctrico. El campo eléctrico en la región del dieléctrico se obtiene aplicando la ley de Gauss para dieléctricos a una esfera gaussiana de radio r entre a y b.

$$\oint_S \kappa(r)\vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\kappa(r)E\oint_{S_1} dA = \frac{A}{r}E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 A}\frac{1}{r}$$



La diferencia de potencial entre las dos esferas metálicas es:

$$\Delta V = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 A}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 A} ln(\frac{b}{a})$$

La capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 A}{ln(\frac{b}{a})}$$

Respuesta:

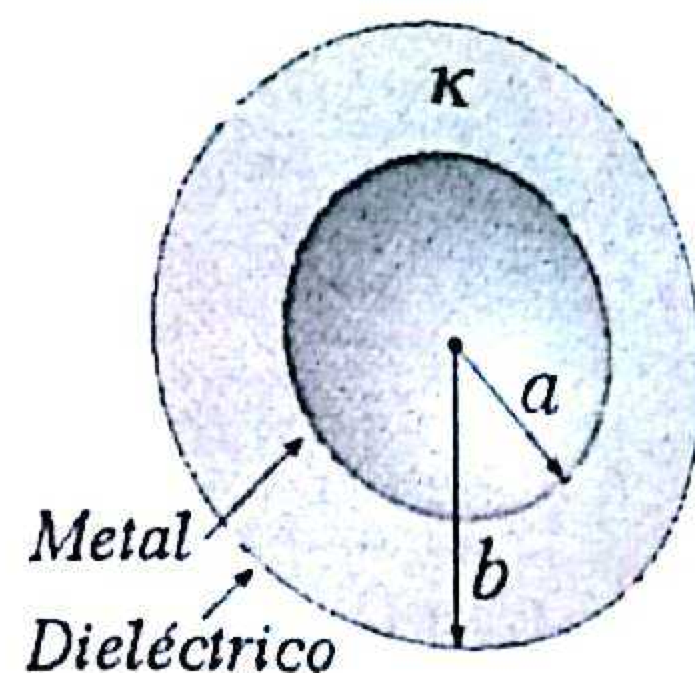
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 A}{ln(b/a)}$$

PR-5.28. *Esfera metálica rodeada con un dieléctrico*

Una esfera metálica de radio a está embebida en una esfera dieléctrica concéntrica de constante dieléctrica κ, que se extiende desde un radio a hasta un radio b.

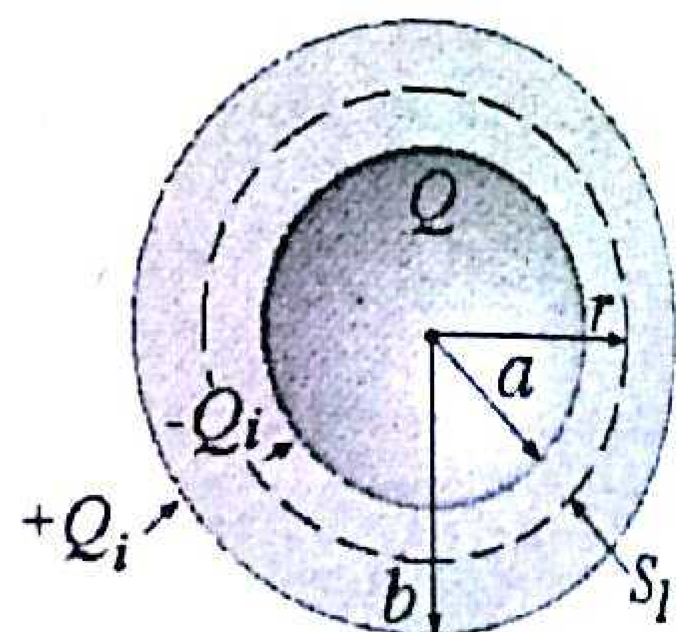
a) Si la esfera metálica tiene una carga Q, determine su potencial eléctrico, suponiendo $V = 0$ en el infinito.

b) Determine la capacitancia del sistema, considerando que el otro electrodo es una esfera metálica de radio infinito.



Solución: a) El campo eléctrico se obtiene aplicando la ley de Gauss a esferas concéntricas imaginarias. En la región del dieléctrico ($a < r < b$), escogemos la esfera gaussiana S_1 de radio r.

$$\oint_{S_1} \kappa\vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \kappa E \oint_{S_1} dA = \kappa E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

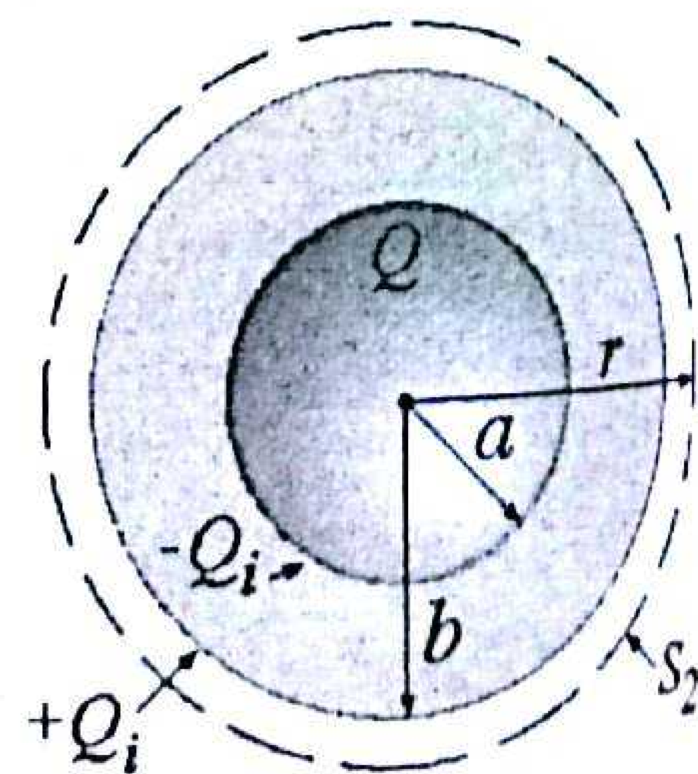


Despejando, encontramos el campo en el dieléctrico:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa r^2} \qquad a < r < b$$

En la región exterior libre de dieléctrico ($r > b$), la carga neta encerrada por la superficie S_2, es sólo la carga libre del conductor, Q:

$$\oint_{S_2} \vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > b)$$



El potencial de la esfera conductora, V_a respecto al infinito es:

$$V_a = -\int_\infty^a \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_\infty^b \vec{E}\bullet d\vec{l} - \int_b^a \vec{E}\bullet d\vec{l}$$

$$V_a = -\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa r^2}dr$$

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_\infty^b + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{1}{r}\Big|_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{b} + \frac{1}{\kappa}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})]$$

b) Considerando que el otro electrodo metálico es una esfera conductora de radio infinito a potencial cero, la capacitancia del sistema es:

$$C = \frac{Q}{V_a - V_\infty} = \frac{4\pi\varepsilon_0\kappa a}{[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)]}$$

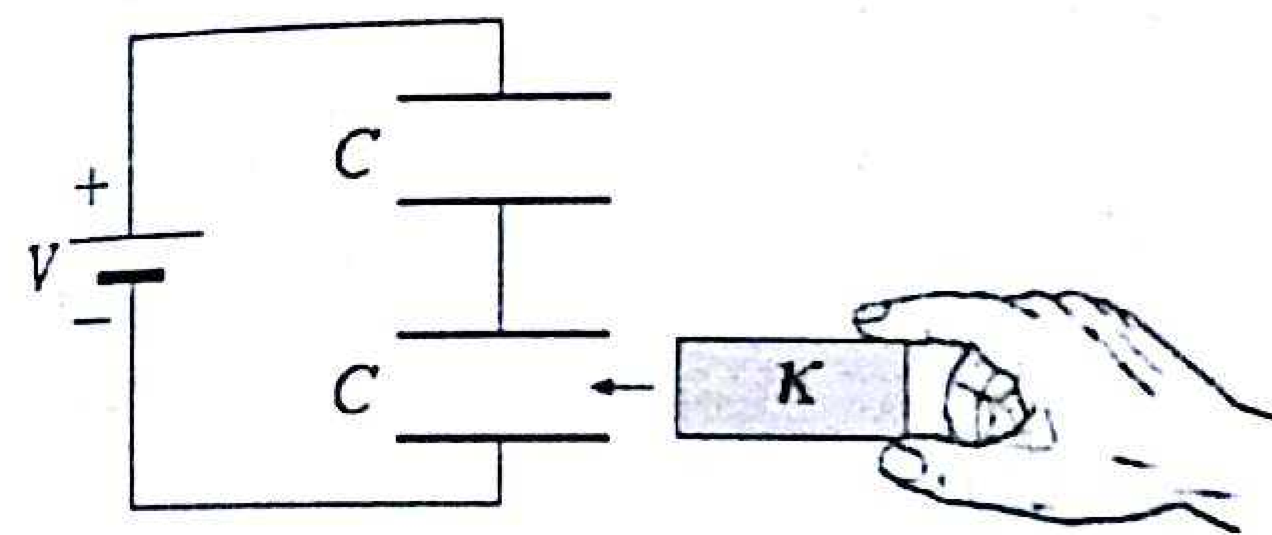
Respuesta:

a) $V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa a}[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)]$

b) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0\kappa a}{[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)]}$

PR-5.29. *¿Qué carga adicional fluye hacia las placas?*

Dos capacitores de placas paralelas de capacitancia C están conectados en serie a una batería de voltaje V.



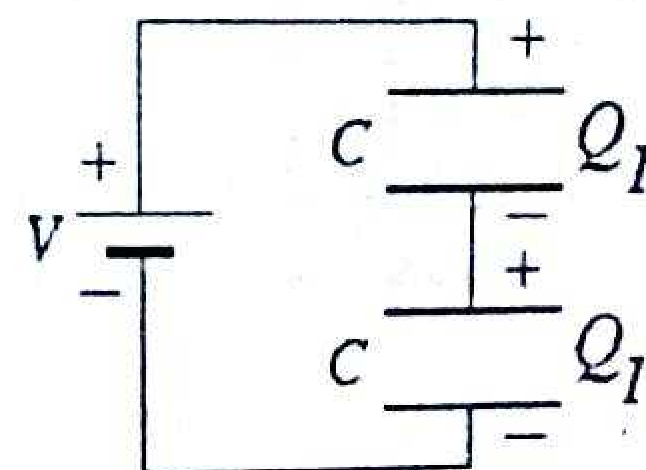
En uno de los capacitores se introduce un bloque dieléctrico de constante dieléctrica κ, llenando todo el espacio entre sus placas.

a) Halle el cambio en la energía total almacenada.

b) Halle la cantidad de carga que fluye hacia las placas al insertar el dieléctrico.

Solución: Inicialmente la capacitancia equivalente de la combinación serie es:

$$C_1 = \frac{CC}{C + C} = \frac{1}{2}C$$



y la carga en cada capacitor:

$$Q_1 = C_1 V = \frac{1}{2}CV$$

La energía almacenada es:

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1 V^2 = \frac{1}{4}CV^2$$

Al de introducir el dieléctrico, la capacitancia varía:

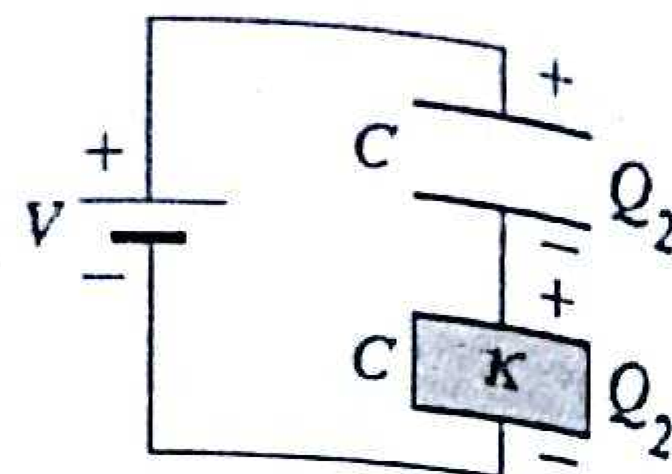
$$C_2 = \frac{C(\kappa C)}{C+\kappa C} = (\frac{\kappa}{\kappa+1})C$$

y la carga en cada capacitor también varía:

$$Q_2 = C_2 V = (\frac{\kappa}{\kappa+1})CV$$

Mientras que la nueva energía almacenada es:

$$U_2 = \frac{1}{2}C_2V^2 = \frac{1}{2}(\frac{\kappa}{\kappa+1})CV^2$$



a) La variación en la energía almacenada es:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(\frac{\kappa}{\kappa+1})CV^2 - \frac{1}{4}CV^2 = \frac{1}{2}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})CV^2$$

Como $\kappa > 1$, la energía almacenada aumenta. Esta energía es suministrada por la batería para mover cargas adicionales hacia los capacitores.

b) La cantidad de carga adicional que fluye hacia las placas al insertar el dieléctrico es.

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = (\frac{\kappa}{\kappa+1})CV - \frac{1}{2}CV = \frac{1}{2}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})CV$$

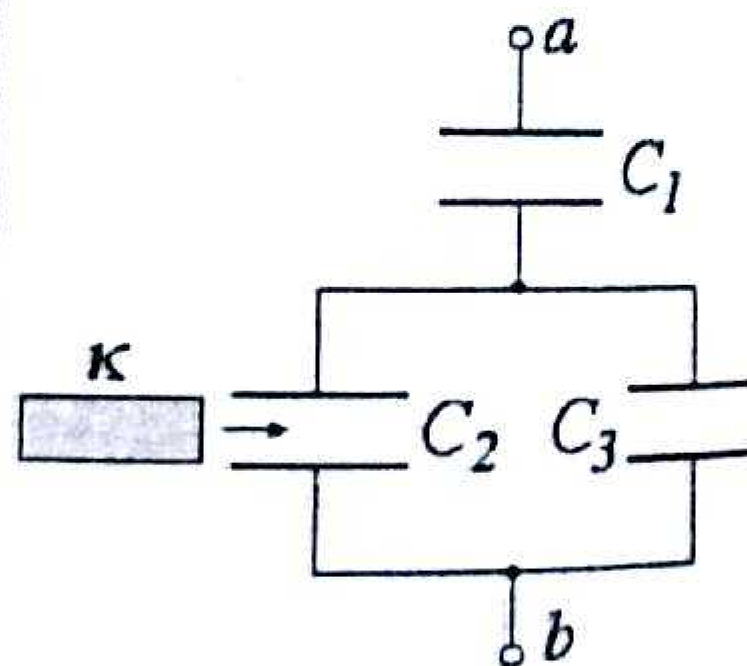
Respuesta:

a) $\Delta U = \frac{1}{2}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})CV^2$,
b) $\Delta Q = \frac{1}{2}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})CV$

PR-5.30. *Trabajo para introducir el dieléctrico.*

Tres capacitores idénticos que tienen igual capacitancia $C_1=C_2=C_3=C_o$, están conectados como se muestra en la figura. Inicialmente los terminales *a* y *b* tienen una diferencia de potencial V_o. A continuación, en el capacitor C_2 se introduce un bloque de constante dieléctrica κ. Determine:

a) Las cargas finales de los capacitores.
a) La nueva diferencia de potencial V_{ab}.
b) El trabajo externo realizado al introducir el dieléctrico.



Solución: a) El capacitor C_1 está en serie con la combinación paralela de C_2 y C_3. Antes de introducir el dieléctrico la capacitancia equivalente está dada por:

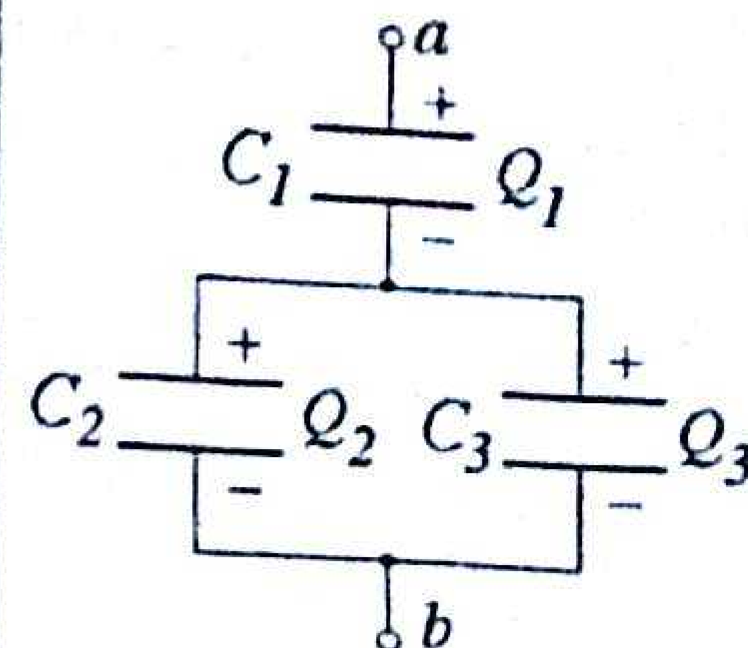
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{2C_0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}C_0$$

La carga total almacenada Q es:

$$Q = CV_0 = \frac{2}{3}C_0V_0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q = \frac{2}{3}C_0V_0$$

Además:

$$Q_2 + Q_3 = Q = \frac{2}{3}C_0V_0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_3 = \frac{1}{3}C_0V_0$$



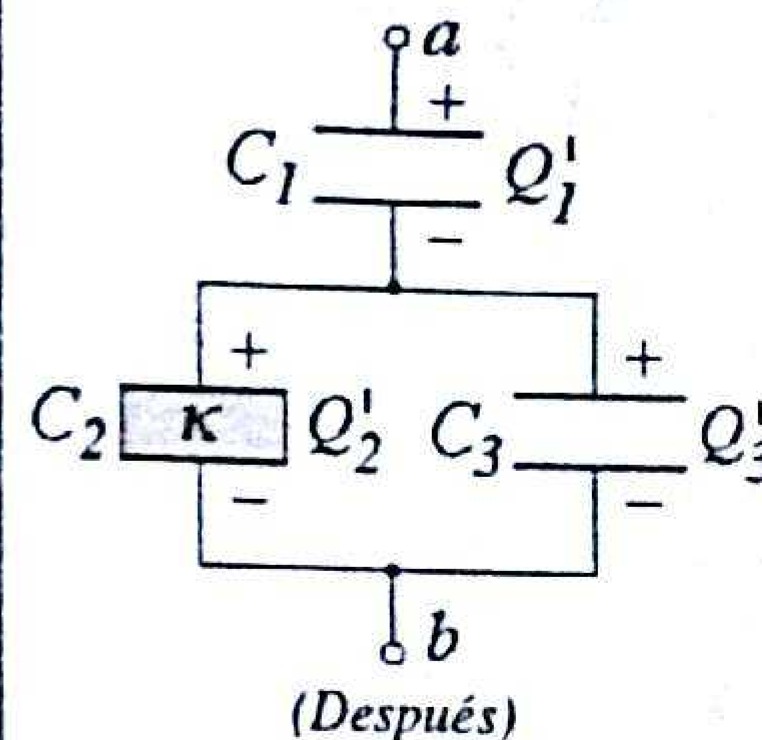
(Antes)

Después de introducir el dieléctrico, la carga total Q se conserva pero se re-distribuye entre C_2 y C_3, hasta igualar sus voltajes, $V_2' = V_3'$, por lo tanto:

$$\frac{Q_2'}{C_2'} = \frac{Q_3'}{C_3'} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2'}{\kappa C_0} = \frac{Q_3'}{C_0} \quad \Rightarrow \quad Q_2' = \kappa Q_3'$$

Tomando en cuenta que: $Q_2'+Q_3' = Q = (2/3)C_oV_o$, tenemos:

$$Q_1' = \frac{2}{3}C_0V_0 \qquad Q_2' = \frac{2}{3}\frac{\kappa C_0V_0}{\kappa+1} \qquad Q_3' = \frac{2}{3}\frac{C_0V_0}{\kappa+1}$$



(Después)

b) La nueva diferencia de potencial es:

$$V_{ab}' = V_1' + V_2' = \frac{Q_1'}{C_1'} + \frac{Q_2'}{C_2'} = \frac{\frac{2}{3}C_0V_0}{C_0} + \frac{\frac{2}{3}\frac{\kappa C_0V_0}{\kappa+1}}{\kappa C_0}$$

$$V_{ab}' = \frac{2}{3}(\frac{\kappa+2}{\kappa+1})V_0$$

c) El cambio en la energía electrostática almacenada en los capacitores al introducir el dieléctrico: $\Delta U = U_f - U_i$,

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q_fV_f - \frac{1}{2}Q_iV_i$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}C_0V_0)[\frac{2}{3}(\frac{\kappa+2}{\kappa+1})V_0 - V_0]$$

$$\Delta U = -\frac{1}{9}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})C_0V_0^2$$

La energía almacenada disminuye, lo cual significa que el dieléctrico es succionado hacia el capacitor realizándose trabajo *sobre* el agente externo.

Respuesta:

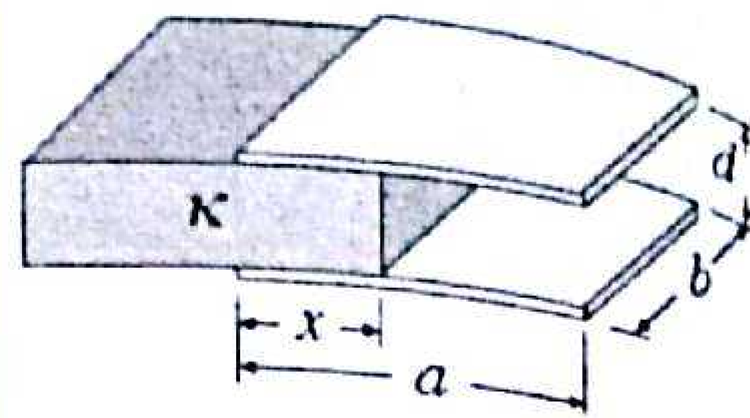
a) $Q_1' = \frac{2}{3}C_0V_0$, $Q_2' = \frac{2}{3}\frac{\kappa C_0V_0}{\kappa+1}$
$Q_3' = \frac{2}{3}\frac{C_0V_0}{\kappa+1}$
b) $V_{ab}' = \frac{2}{3}(\frac{\kappa+2}{\kappa+1})V_0$
c) $W = -\frac{1}{9}(\frac{\kappa-1}{\kappa+1})C_0V_0^2$

PR-5.31. *El capacitor cargado captura al dieléctrico.*

Sea un capacitor de placas paralelas rectangulares con lados a y b y con separación entre placas, d. El capacitor está cargado con carga Q, y se le acerca gradualmente un bloque dieléctrico de constante κ.

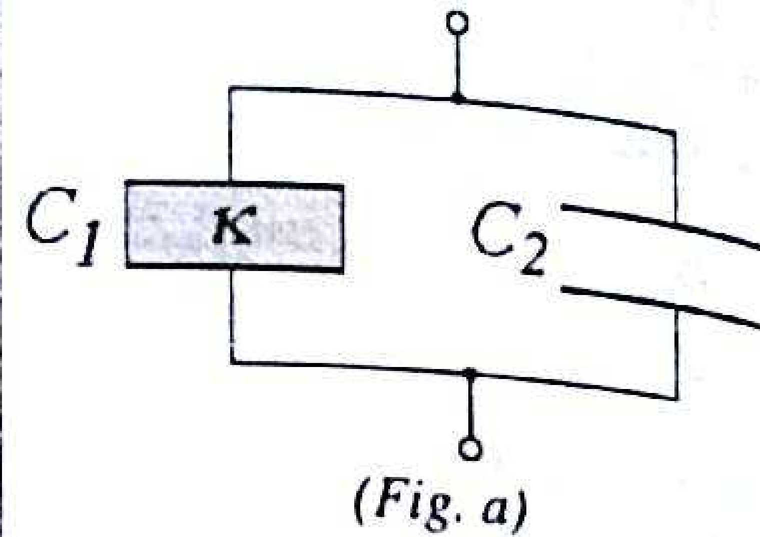
a) Determine la fuerza ejercida sobre el dieléctrico cuando está introducido a una distancia x dentro de las placas.

b) ¿Por qué el dieléctrico es atraído hacia las placas?



Solución: a) Cuando el dieléctrico es introducido hasta una distancia x, el capacitor equivale a dos capacitores en paralelo, uno de las cuales tiene dieléctrico y el otro no (Fig. a). La capacitancia equivalente es la suma:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa\varepsilon_0 xb}{d} + \frac{\varepsilon_0(a-x)b}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[a + x(\kappa - 1)]$$



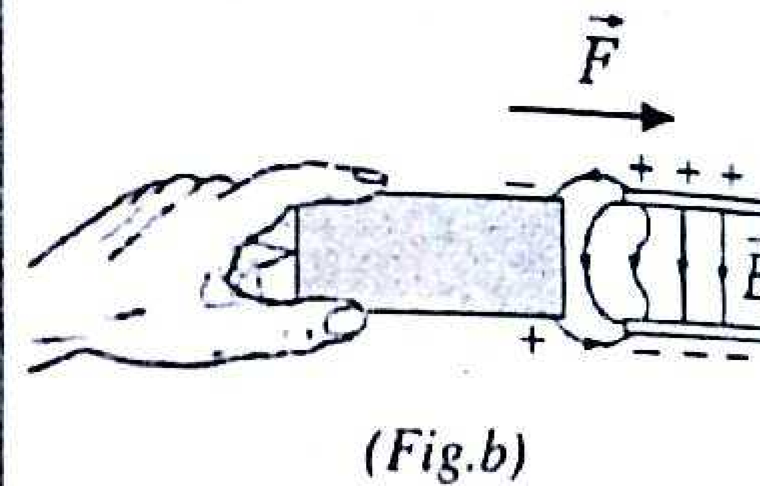
(Fig. a)

La energía almacenada en el capacitor es:

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b[a + x(\kappa-1)]}$$

Si cambia la distancia x, sin que varíe la carga Q, el cambio de energía almacenada viene dado por:

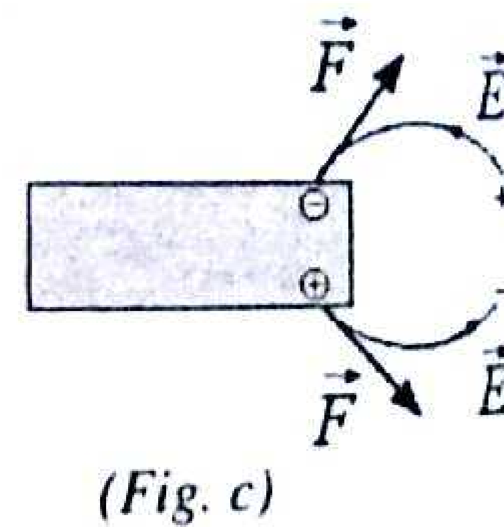
$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{(\kappa-1)}{[a + x(\kappa-1)]^2}$$



(Fig.b)

El hecho de que $\partial U/\partial x$ sea negativo significa que al incrementarse x, la energía almacenada disminuye y por lo tanto, se realiza trabajo sobre el agente externo. El trabajo del campo electrostático es: $dW = Fdx = -dU$. Por lo tanto, el dieléctrico es atraído hacia el capacitor y la fuerza requerida para sostenerlo es:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{(\kappa-1)}{[a + x(\kappa-1)]^2}$$



(Fig. c)

Observe que el valor de F es máximo para $x = 0$.

b) La fuerza se origina por la naturaleza no uniforme del campo eléctrico cerca de los bordes de las placas del capacitor. La componente horizontal del campo actúa sobre las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico, produciendo una fuerza horizontal neta dirigida hacia el interior del capacitor.

Respuesta:

$$F = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{(\kappa-1)}{[a + x(\kappa-1)]^2}$$

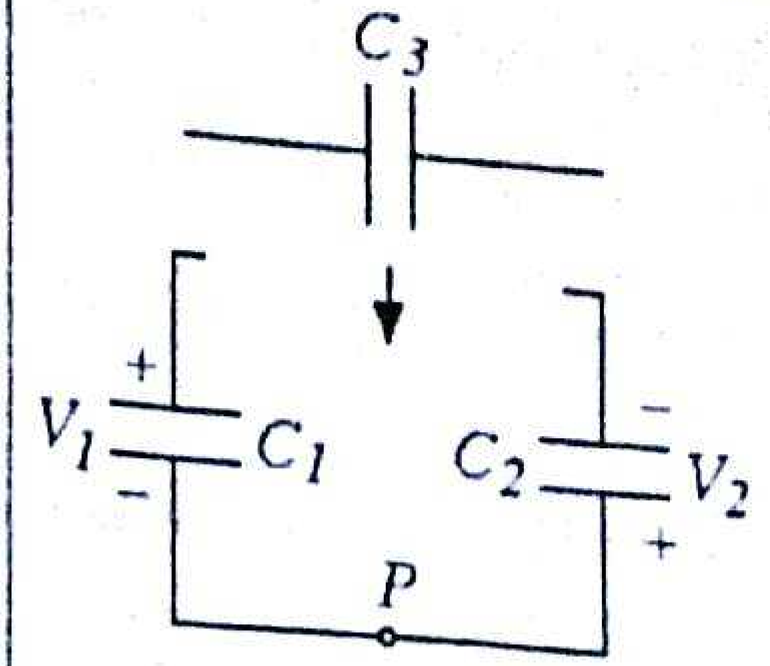
PR-5.32. *Un capacitor que cae sobre otros dos*

Dos capacitores $C_1 = 4\ \mu F$ y $C_2 = 6\ \mu F$ están cargados y con voltajes $V_1 = 15$ v y $V_2 = 12$ v, respectivamente. Dos de las placas de los capacitores están conectadas con polaridad opuesta y los alambres de las otras placas están libres. A continuación, desde arriba cae un capacitor descargado, $C_3 = 3\ \mu F$ sobre los terminales libres.

a) Calcule las cargas finales en los tres capacitores.

b) Calcule los voltajes finales de los tres capacitores.

c) ¿Cuánta carga pasó por el punto P del circuito?

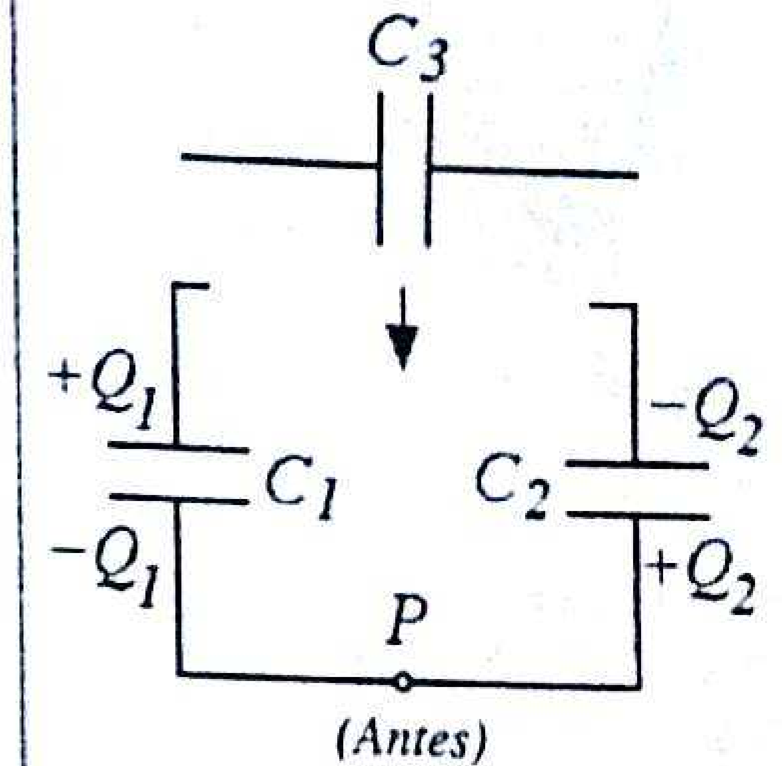


Solución: a) Las cargas iniciales en los capacitores son:

$$Q_1 = C_1 V_1 = (4\mu F)(15v) = 60\mu C$$
$$Q_2 = C_2 V_2 = (6\mu F)(12v) = 72\mu C$$

Por la conservación de la carga, podemos escribir para las diferentes ramas de placas unidas por conductores:

$$Q_1' + Q_3' = Q_1 = 60\mu C \qquad (1)$$
$$Q_2' - Q_1' = Q_2 - Q_1 = 12\mu C \qquad (2)$$



(Antes)

Tomando en cuenta las polaridades de las cargas finales, la relación entre los voltajes de los capacitores es: $V_1' = V_3' - V_2'$

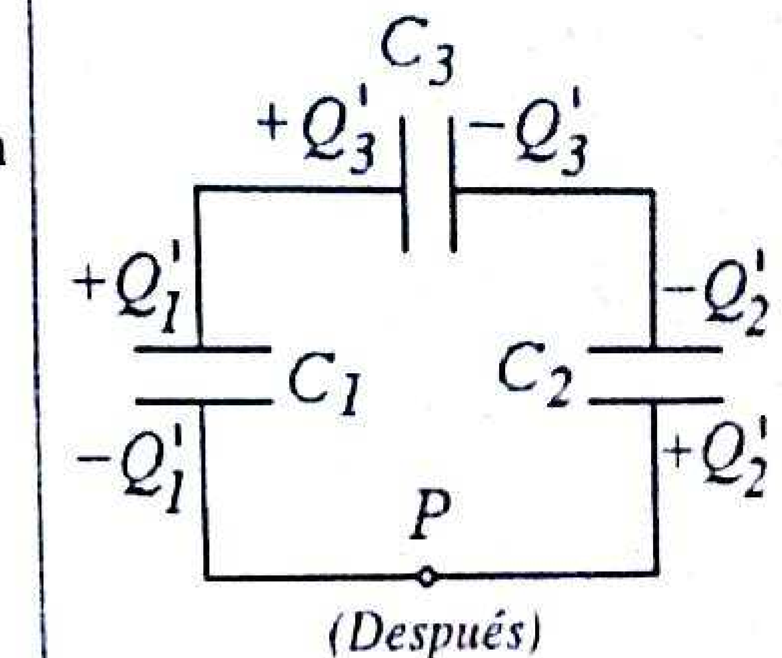
$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_3'}{C_3} - \frac{Q_2'}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1'}{4\mu F} = \frac{Q_3'}{3\mu F} - \frac{Q_2'}{6\mu F}$$

$$3Q_1' = 4Q_3' - 2Q_2' \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (2) podemos despejar Q_2' y Q_3' en términos de Q_1' y sustituirlas en la ecuación (3):

$$3Q_1' = 4(60\mu C - Q_1') - 2(12\mu C + Q_1')$$

$$Q_1' = 24\mu C \qquad Q_2' = 36\mu C \qquad Q_3' = 36\mu C$$



(Después)

b) Los voltajes finales en los capacitores son:

$$V_1' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{24\mu C}{4\mu F} = 6v$$

$$V_2' = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{36\mu C}{6\mu F} = 6v \qquad V_3' = \frac{Q_3'}{C_3} = \frac{36\mu C}{3\mu F} = 12v$$

c) La carga que circuló por el punto P fue:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_2' = 72\mu C - 36\mu C = 36\mu C$$

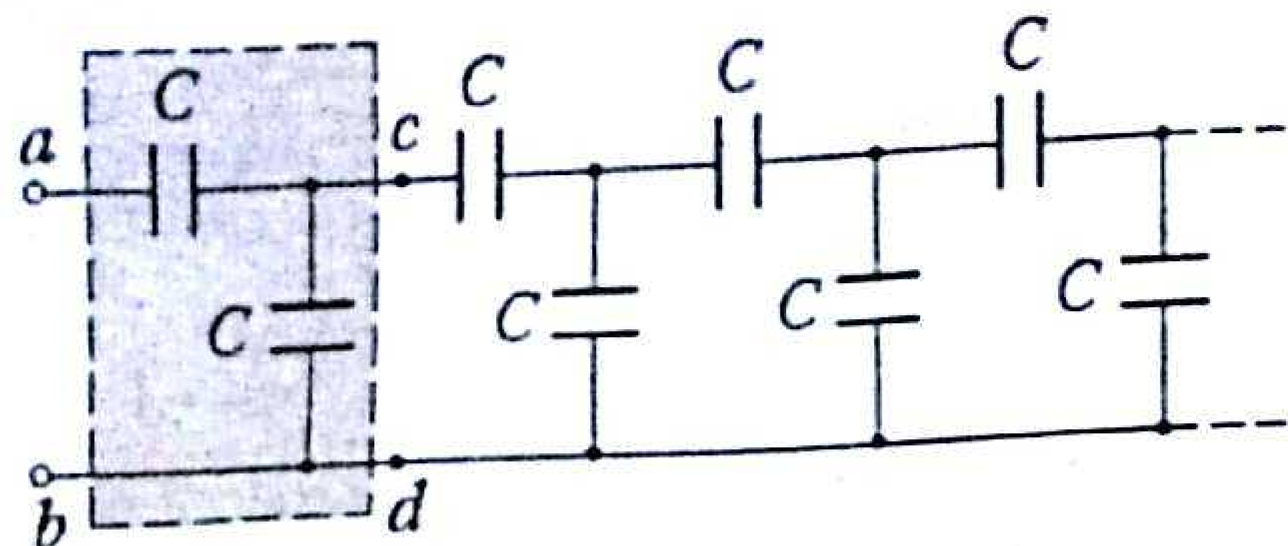
La carga circuló desde C_2 hacia C_1.

Respuesta:

a) $Q_1' = 24\mu C$, $Q_2' = Q_3' = 36\mu C$
b) $V_1' = V_2' = 6V$, $V_3' = 12V$
c) $\Delta Q = 36\mu C$

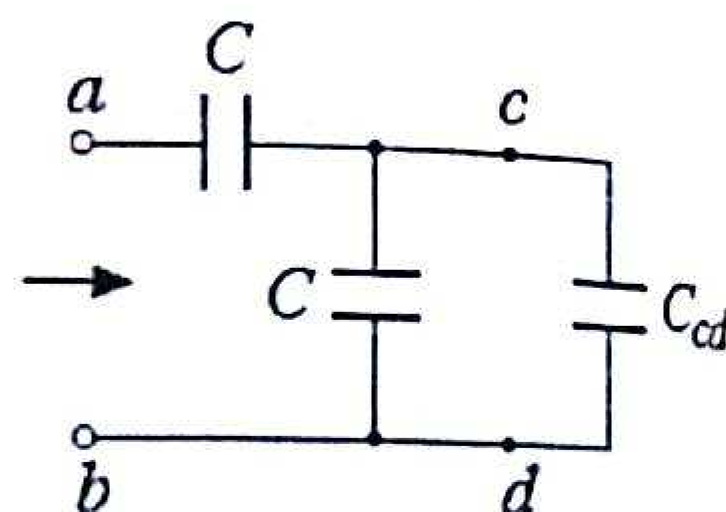
PR-5.33. *Una cadena ilimitada de capacitores*

Una cadena de capacitores consiste de un número infinito de eslabones repetidos de dos capacitores idénticos C.



Halle la capacitancia equivalente entre los terminales a y b.

Solución: La adición de un eslabón al principio de un circuito infinito no puede variar su capacitancia. Por lo tanto, la capacitancia equivalente entre los terminales a y b no se altera si la primera unidad es removida, es decir: $C_{ab} = C_{cd}$. De acuerdo al circuito equivalente mostrado a la derecha, el primer capacitor C queda en serie con la combinación del segundo capacitor C en paralelo con C_{cd}:



$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{cd}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{ab}}$$

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{2C + C_{ab}}{C(C + C_{ab})}$$

Resultando la ecuación cuadrática:

$$C_{ab}^2 + CC_{ab} - C^2 = 0$$

cuya solución es:

$$C_{ab} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2}$$

Aquí solo la raíz positiva tiene significado físico:

$$C_{ab} = (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})C$$

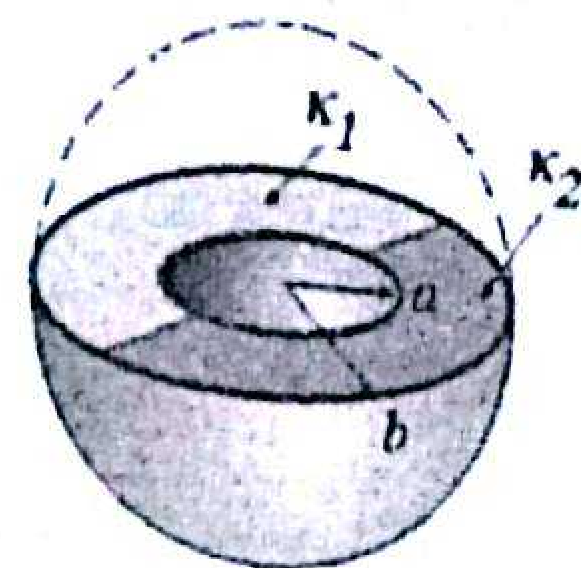
Respuesta:

$$C_{ab} = (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})C$$

PR-5.34. *Capacitor esférico con dos dieléctricos II*

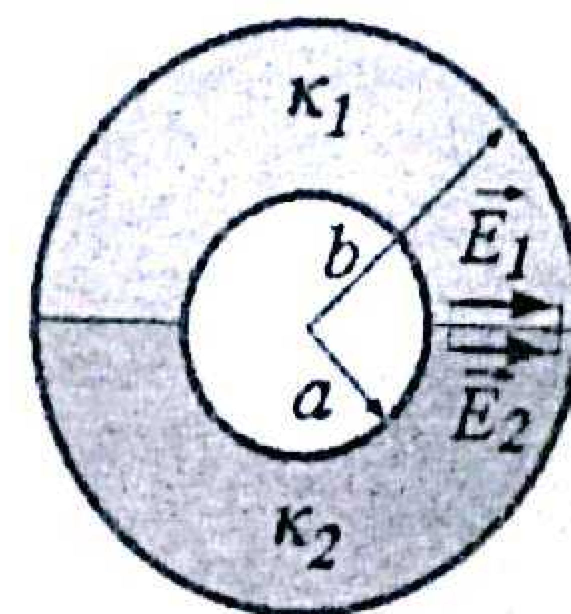
La región entre dos cascarones metálicos esféricos de radios respectivos a y b, está ocupada la mitad por un dieléctrico de constante dieléctrica κ_1 y la otra mitad por un dieléctrico de constante dieléctrica κ_2.

a) Halle el campo eléctrico en cada una de los dieléctricos
b) Calcule la capacitancia.



Solución: a) El campo eléctrico es igual en ambos dieléctricos como podemos deducir, calculando la circulación del campo en el camino rectangular mostrado en la figura:

$$\oint_C \bar{E} \bullet d\bar{l} = (E_1 - E_2)h = 0 \Rightarrow \qquad E_1 = E_2$$



Para determinar el campo, escogemos una superficie gaussiana de radio r, con dos secciones semi esféricas:

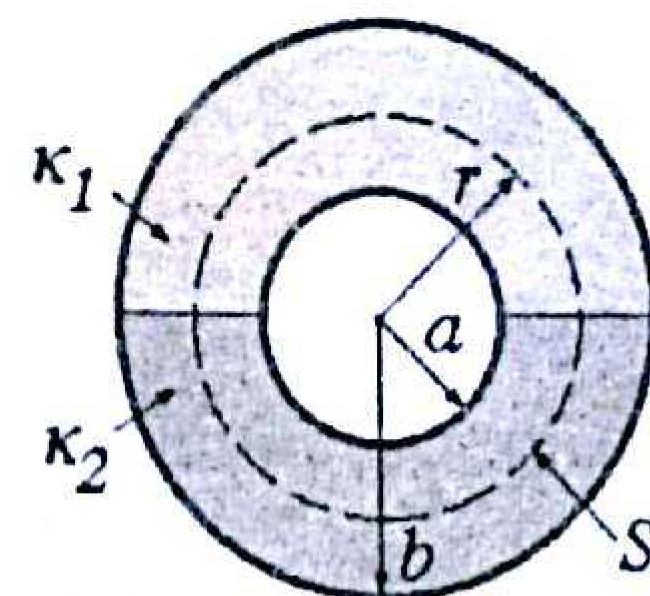
$$\varepsilon_0 \oint_S \kappa \bar{E} \bullet d\bar{A} = \varepsilon_0 \int_{S_1} \kappa_1 \bar{E}_1 \bullet d\bar{A} + \varepsilon_0 \int_{S_2} \kappa_2 \bar{E}_2 \bullet d\bar{A} = Q$$

$$\varepsilon_0 \kappa_1 (2\pi r^2) E_1 + \varepsilon_0 \kappa_2 (2\pi r^2) E_2 = Q$$

En virtud de que $E_1 = E_2 = E$, se obtiene:

$$2\pi r^2 \varepsilon_0 E(\kappa_1 + \kappa_2) = Q$$

$$\bar{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2(\kappa_1 + \kappa_2)}\hat{r}$$



b) La diferencia de potencial entre a y b es:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \bar{E} \bullet d\bar{l} = -\int_b^a \frac{Qdr}{2\pi\varepsilon_0 r^2(\kappa_1 + \kappa_2)}$$

$$\Delta V = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(\kappa_1 + \kappa_2)}(-\frac{1}{r})\Big|_b^a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(\kappa_1 + \kappa_2)}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

y la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0(\kappa_1 + \kappa_2)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Respuesta:

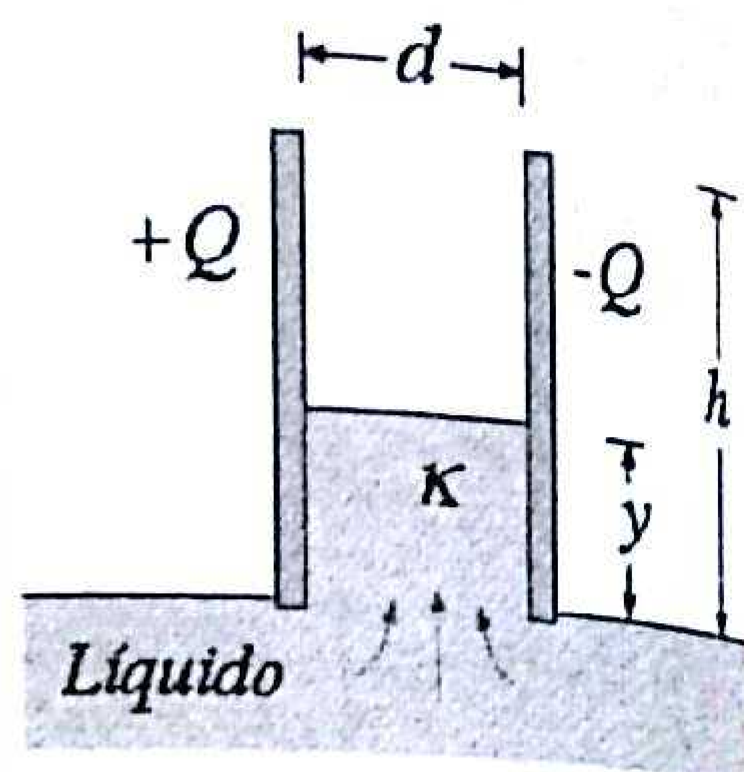
a) $\bar{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2(\kappa_1 + \kappa_2)}\hat{r}$
b) $C = \frac{2\pi\varepsilon_0(\kappa_1 + \kappa_2)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

PR-5.35. *¿Hasta qué altura subirá el líquido?*

Un capacitor está constituido por dos láminas metálicas paralelas de altura h, ancho a y separación d. El capacitor se carga mediante una batería de voltaje V, luego se desconecta de la batería y se coloca por el borde inferior tocando la superficie de un líquido de constante dieléctrica κ, contenido un recipiente muy grande..

Si se desprecian los efectos capilares sobre el líquido, determine la altura y que subirá la superficie del líquido dentro del capacitor.

Solución: En los bordes de las placas existe un campo eléctrico $\vec{E}$ no-uniforme que polariza las moléculas del líquido, el cual fluye atraído hacia el espacio entre las placas. En este proceso, la capacitancia aumenta y como las cargas Q en las placas se mantienen constante, la energía en el campo eléctrico disminuye. El trabajo realizado por el campo se traduce en un incremento de la energía potencial del centro de gravedad de la columna de líquido. Aplicando la conservación de la energía:



$$\frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2C} + Mg\frac{y}{2}$$

Siendo las capacitancias inicial y final, respectivamente:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 ha}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \kappa\frac{\varepsilon_0 ay}{d} + \frac{\varepsilon_0 a}{d}(h-y) = \frac{\varepsilon_0 a}{d}[h + y(\kappa - 1)]$$

La masa de la columna se expresa en términos de la densidad ρ del líquido, $M = \rho(ayd)$. Sustituyendo estas expresiones en la primera ecuación, se obtiene:

$$\frac{Q^2}{2\frac{\varepsilon_0 ha}{d}} = \frac{Q^2}{2\frac{\varepsilon_0 a}{d}[h + y(\kappa - 1)]} + \frac{1}{2}(\rho ayd)gy$$

Simplificando:

$$Q^2(\kappa - 1) = \rho g \varepsilon_0 ha^2 y[h + y(\kappa - 1)]$$

Si expresamos la carga en términos del potencial de la batería, $Q = C_0 V$, se obtiene:

$$(\frac{\varepsilon_0 ha}{d}V)^2(\kappa - 1) = \rho g \varepsilon_0 ha^2 y[h + y(\kappa - 1)]$$

Reordenando, nos queda la ecuación cuadrática:

$$y^2 + (\frac{h}{\kappa - 1})y - \frac{\varepsilon_0 hV^2}{\rho g d^2} = 0$$

El valor de y esta dado por la raíz positiva de la ecuación :

$$y = -\frac{h}{2(\kappa - 1)} + \sqrt{\frac{h^2}{4(\kappa - 1)^2} + \frac{\varepsilon_0 hV^2}{\rho g d^2}}$$

Se observa que la altura que sube el líquido es independiente del ancho a de las láminas.

Respuesta:

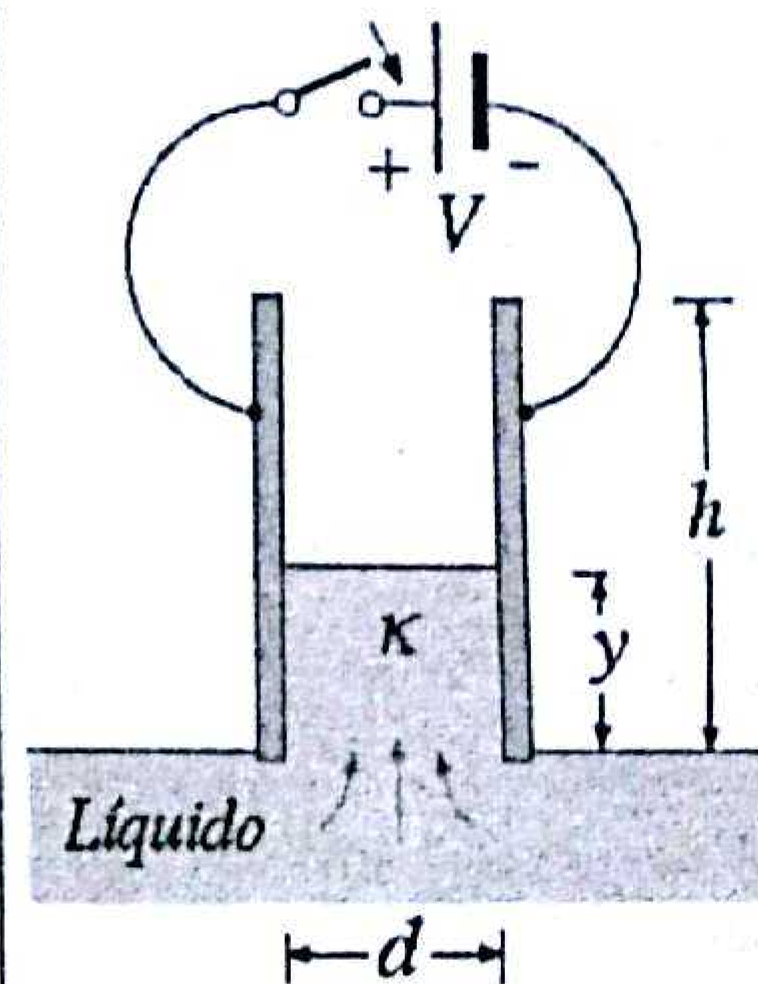
$$y = \sqrt{\frac{h^2}{4(\kappa - 1)^2} + \frac{\varepsilon_0 hV^2}{\rho g d^2}} - \frac{h}{2(\kappa - 1)}$$

PR-5.36. *¿Hasta qué altura subirá el líquido II?*

Un capacitor constituido por dos láminas metálicas paralelas de altura h, ancho a y separación d, están tocando la superficie de un líquido de constante dieléctrica κ, contenido un recipiente muy grande.

Si se conectan las placas a una batería de voltaje V, determine la altura y que subirá la superficie del líquido dentro del capacitor.

Solución: En contraste con la situación anterior, ahora la batería tiene que realizar dos tipos de trabajo: enviar cargas a las placas y además elevar la columna de líquido. La energía por unidad de volumen en un campo eléctrico es $u_E = \vec{E} \bullet \vec{D}/2$, siendo $\vec{D} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}$ el vector desplazamiento eléctrico. La energía electrostática total almacenada en las dos regiones es:



$$U(y) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 ad(h-y) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\kappa E^2 ady$$

La fuerza sobre el dieléctrico es:

$$F = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 ad(\kappa - 1)$$

Esta fuerza tiene como efecto una reducción en la presión ($\Delta p = F/ad$) que puede sostener el líquido a una altura y, es decir, $\Delta p = \rho g y$. Por lo tanto:

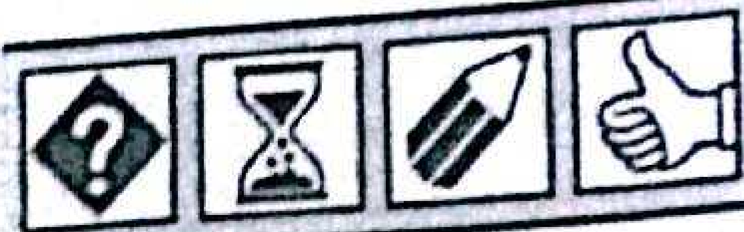
$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 E^2 ad(\kappa - 1)}{ad} = \rho g y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 E^2(\kappa - 1)}{\rho g}$$

Sustituyendo el campo eléctrico $E = Vd$, se obtiene:

$$y = \frac{\varepsilon_0 V^2(\kappa - 1)}{2\rho g d^2}$$

Respuesta:

$$y = \frac{\varepsilon_0 V^2(\kappa - 1)}{2\rho g d^2}$$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-5.01. ***La capacitancia de un capacitor.....***

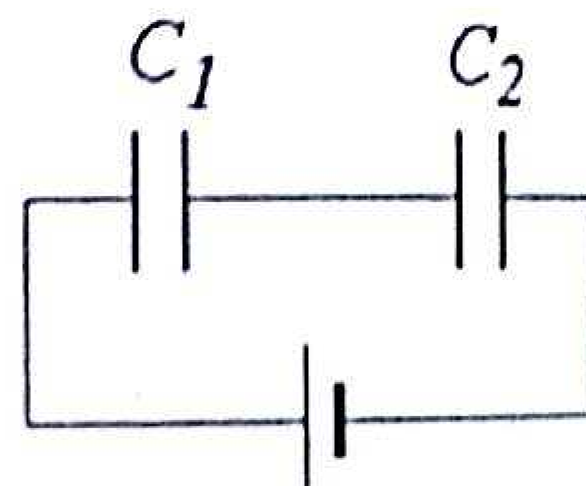
a) Es la cantidad de carga total que es capaz de almacenar.
b) Es el voltaje requerido para almacenar la unidad de carga.
c) Es la carga que se transfiere entre un conductor y otro cuando se conectan a una batería de un voltio.
d) Es el cociente entre el voltaje y la carga.
e) Depende del tamaño, forma y disposición geométrica de los conductores.

PE-5.02. ***Efecto de triplicar la carga del capacitor***

Considere un capacitor de capacitancia C, que tiene una cierta carga. Si le agregamos mas carga al capacitor hasta triplicar la carga original, entonces su capacitancia será…

a) $3C$ b) $C/3$ c) C d) $9C$ e) $C/9$

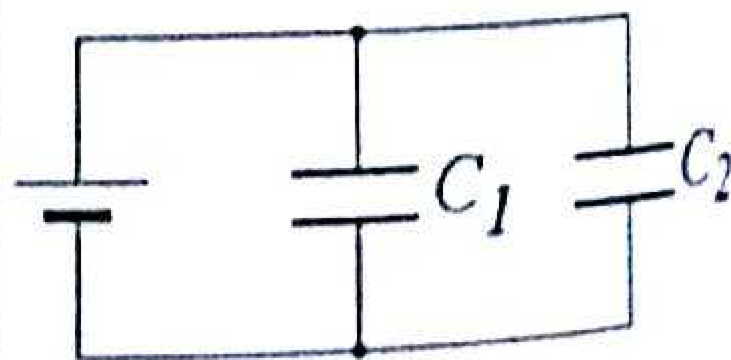
PE-5.03. ***En los capacitores en serie...***



Cuando conectamos dos capacitores desiguales ($C_1 > C_2$) *en serie* con una batería, al comparar sus cargas Q, diferencias de potencial V, y energías almacenadas U, podemos afirmar que.....

a) $Q_1>Q_2$, b) $V_1>V_2$, c) $Q_2>Q_1$, d) $V_2>V_1$, e) $U_1>U_2$

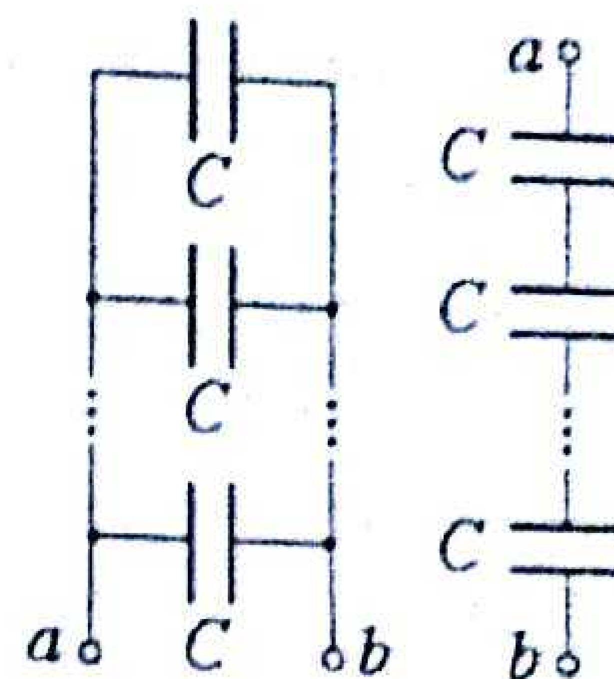
PE-5.04. ***En los capacitores en paralelo.....***



Cuando conectamos dos capacitores desiguales ($C_1 > C_2$) *en paralelo* con una batería, al comparar sus cargas Q, diferencias de potencial V, y energías almacenadas U, podemos afirmar que.....

a) $U_1>U_2$, b) $V_1>V_2$, c) $Q_1=Q_2$, d) $U_2>U_1$, e) $Q_2>Q_1$

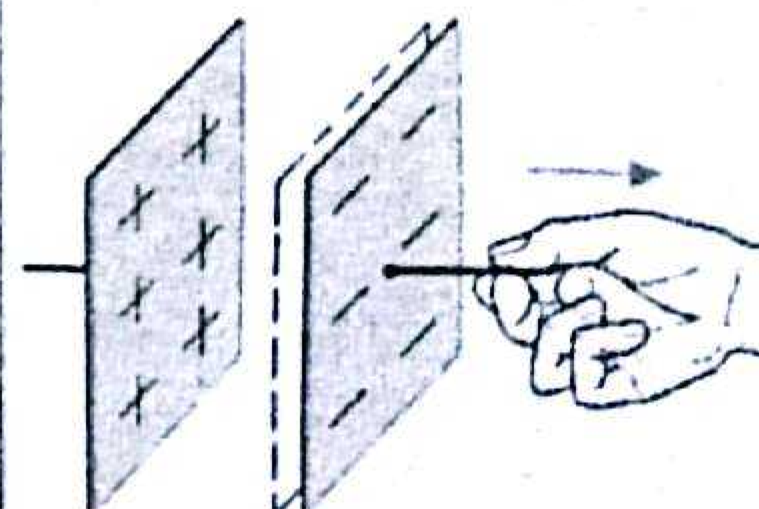
PE-5.05. ***Paralelo vs. Serie.***



Sea un grupo de N capacitores idénticos que van a ser conectados en serie o en paralelo a una batería. Si comparamos las cargas almacenadas usando las dos combinaciones, la relación (Q_{par}/Q_{ser}) es igual a…

a) 1 b) N c) N^2 d) $\sqrt{N}$, e) N^{-2}

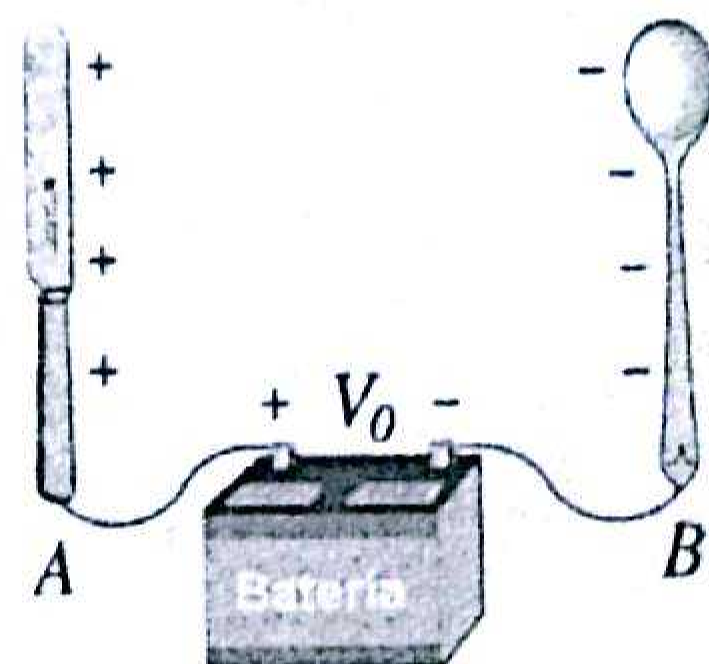
PE-5.06. ***¿Qué sucederá al separar las placas !?***



Un capacitor de placas plano-paralelas, se carga hasta una diferencia de potencial y luego *se desconecta de la fuente*. Si separamos las placas hasta el doble de la separación original. Este proceso *hará duplicar* el valor de:

a) la capacitancia. b) la fuerza entre las placas.
c) la carga en cada placa. d) la energía almacenada.
e) el campo eléctrico entre las placas.

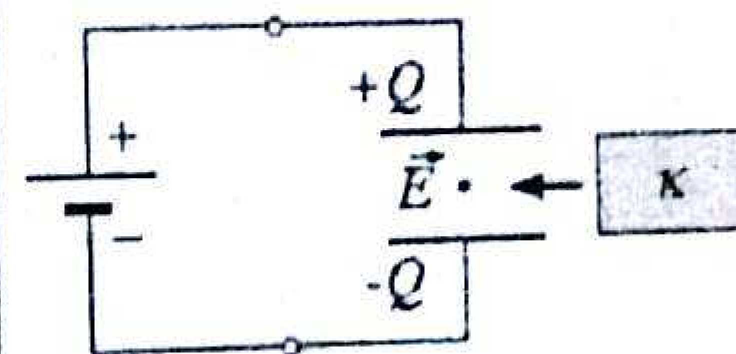
PE-5.07. ***Acercando dos metales cargados..***



Dos objetos metálicos A y B están inicialmente a cierta distancia, conectados a los bornes de una batería de V_o voltios, adquiriendo cargas iguales y opuestas. Luego se *desconecta* la batería y se *acercan* los dos objetos hasta la mitad de su separación inicial. En esta nueva situación se tendrá:

a) $V_{AB} < V_o$ b) $V_{AB} = V_o$ c) $V_{AB} = 2V_o$
d) $V_{AB} > 2V_o$ e) $V_o < V_{AB} < 2V_o$

PE-5.08. ***¿Qué sucederá al introducir el dieléctrico?***

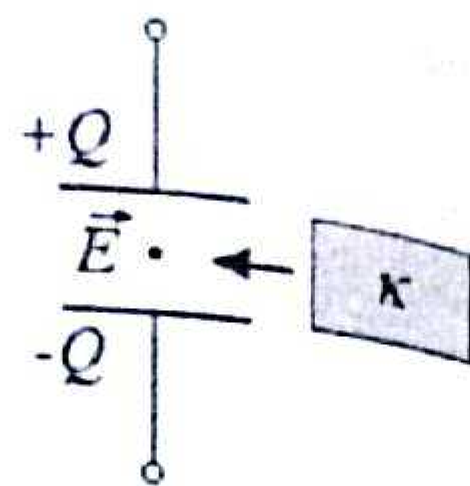


Un capacitor se mantiene conectado a una batería y se le introduce un dieléctrico. Podemos afirmar que al insertar el dieléctrico:

a) Q permanece constante y E permanece constante.
b) Q disminuye y E permanece constante.
c) Q aumenta y E disminuye.
d) Q aumenta y E aumenta.
e) Q aumenta y E permanece constante.

PE-5.09. *¿Qué sucede al potencial y al campo?*

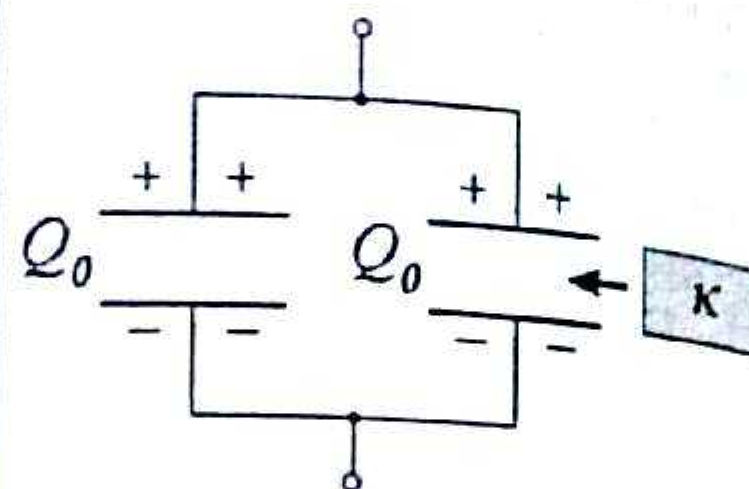
Un capacitor se carga mediante una batería y luego se aísla. A continuación se le introduce un dieléctrico que llena todo el espacio entre su placas. Podemos decir que al insertar el dieléctrico:



a) V permanece contante y E disminuye.
b) V disminuye y E permanece constante.
c) V disminuye y E disminuye.
d) V permanece constante y E aumenta.
e) V permanece constante y E permanece constante.

PE-5.10. *¿Cuánta carga se transfiere?*

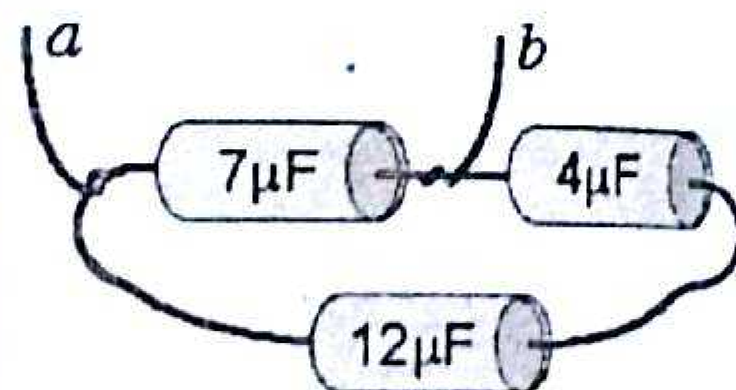
Dos capacitores idénticos están conectados en paralelo y cada uno posee una carga Q_o. A continuación se introduce un dieléctrico de constante $\kappa = 3$ en uno de ellos. Esto provoca que se transfiera de un capacitor al otro una cantidad de carga...



a) $\frac{1}{2}Q_0$, b) $\frac{2}{3}Q_0$, c) $\frac{3}{4}Q_0$, d) $\frac{1}{3}Q_0$, e) $\frac{1}{4}Q_0$

PE-5.11. *¿Cuál es la capacitancia equivalente?*

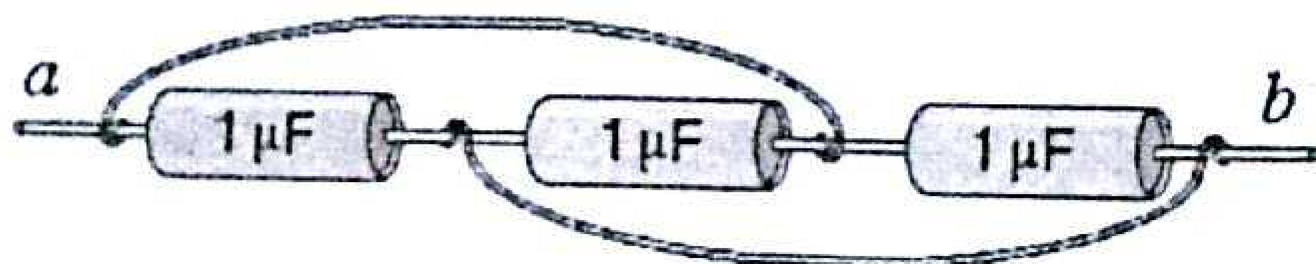
Tres capacitores de 4 μF , 7 μF y 12 μF se encuentran conectados mediante alambres de la manera mostrada. ¿Cuál será la capacitancia equivalente entre los terminales a y b?



a) 7 μF, b) 10 μF, c) 11 μF, d) 16 μF, e) 23 μF

PE-5.12. *¿Conexión serie, paralela o qué?*

Tres capacitores idénticos de 1 μF se encuentran conectados mediante alambres de la siguiente manera:

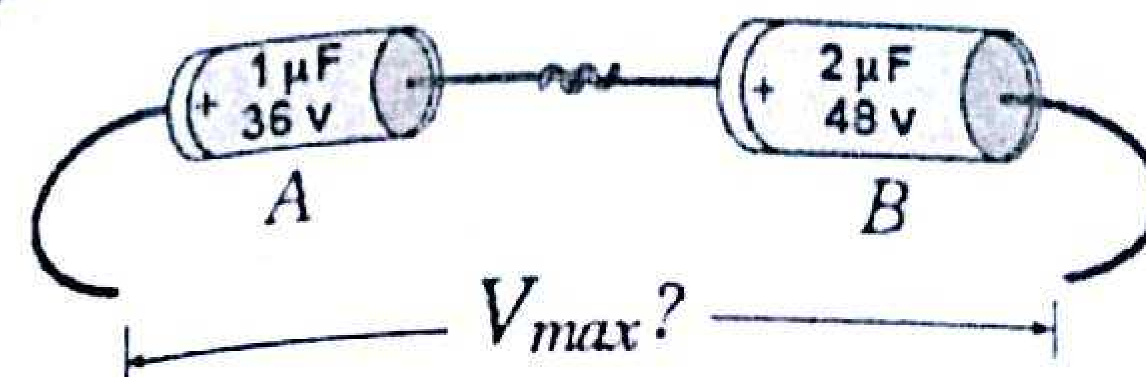


¿Cuál será la capacitancia equivalente entre a y b?

a) C_{ab} = 1 μF
b) C_{ab} = 3 μF
c) C_{ab} = 2 μF
d) C_{ab} = 2/3 μF
e) C_{ab} = 3/2 μF

PE-5.13. *¡Cuidado con exceder el voltaje!*

Sean dos capacitores A y B que tienen las siguientes especificaciones del fabricante: A: 1μF / 36v, B: 2μF / 48v



Si se conectan en serie, el máximo voltaje que podríamos aplicar en los extremos del circuito sin que los capacitores se dañen es:

a) 36 v
b) 42 v
c) 48 v
d) 54 v
e) 84 v

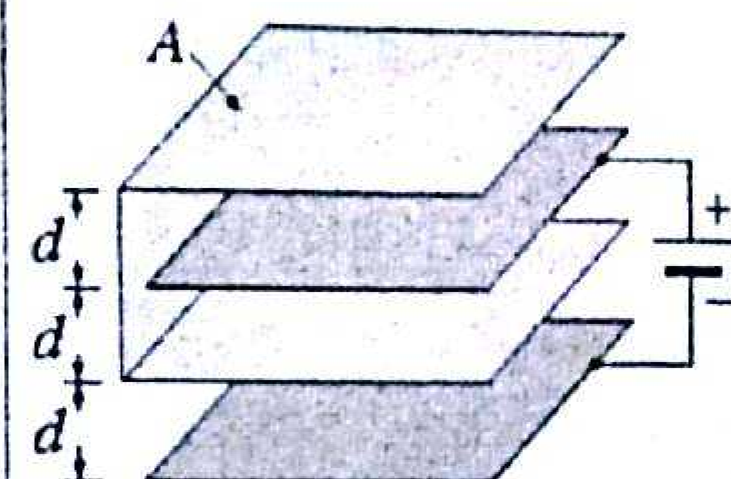
PE-5.14. *Voltaje de un capacitor con cargas distintas*

Una de las placas de un capacitor plano de capacitancia C, tiene una carga $+Q$ y la otra tiene una carga $+4Q$. La diferencia de potencial entre las dos placas es:

a) $\frac{1}{2}\frac{Q}{C}$, b) $\frac{3}{2}\frac{Q}{C}$, c) $\frac{5}{2}\frac{Q}{C}$, d) $\frac{2}{3}\frac{Q}{C}$, e) $5\frac{Q}{C}$

PE-5.15. *Capacitancia de juego de placas I*

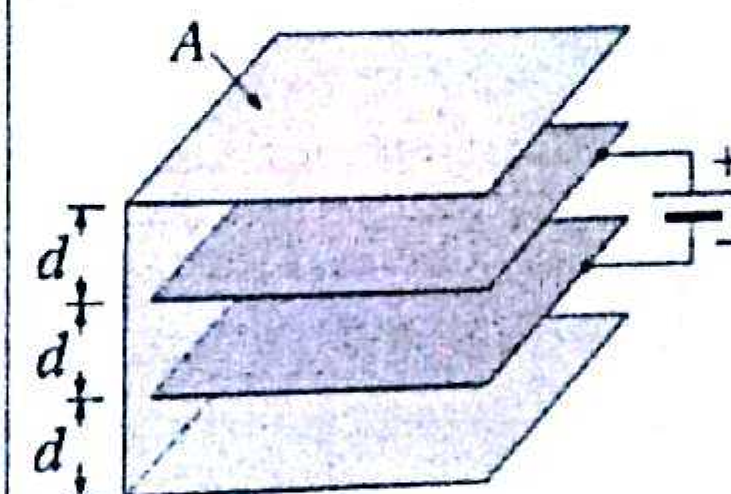
Cuatro placas metálicas idénticas de igual área A, están en forma paralela en el aire y a distancias consecutivas d. El conjunto se conecta a los terminales de una batería, como se indica en la figura. La capacitancia del sistema es:



a) $C = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ b) $C = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ c) $C = 3\frac{\varepsilon_0 A}{d}$
d) $C = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ e) $C = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

PE-5.16. *Capacitancia de juego de placas II*

Cuatro placas metálicas idénticas de igual área A, están en forma paralela en el aire y a distancias consecutivas d. El conjunto se conecta a los terminales de una batería, como se indica en la figura. La capacitancia del sistema es:



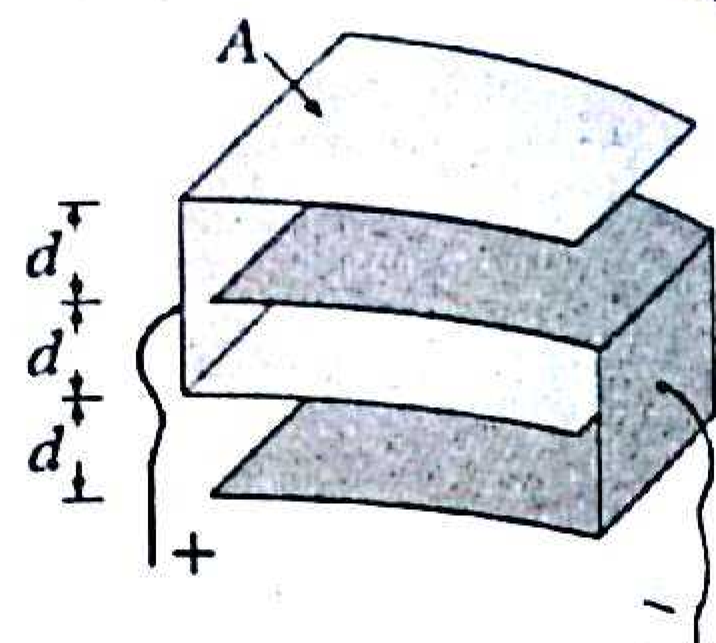
a) $C = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ b) $C = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ c) $C = 3\frac{\varepsilon_0 A}{d}$
d) $C = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ e) $C = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

PE-5.17. *Capacitancia de juego de placas III*

Cuatro placas metálicas idénticas de igual área A, están en forma paralela en el aire y a distancias consecutivas d. El conjunto se conecta a los terminales de una batería, como se indica en la figura. La capacitancia del sistema es:

a) $C = 3\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ b) $C = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ c) $C = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

d) $C = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ e) $C = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

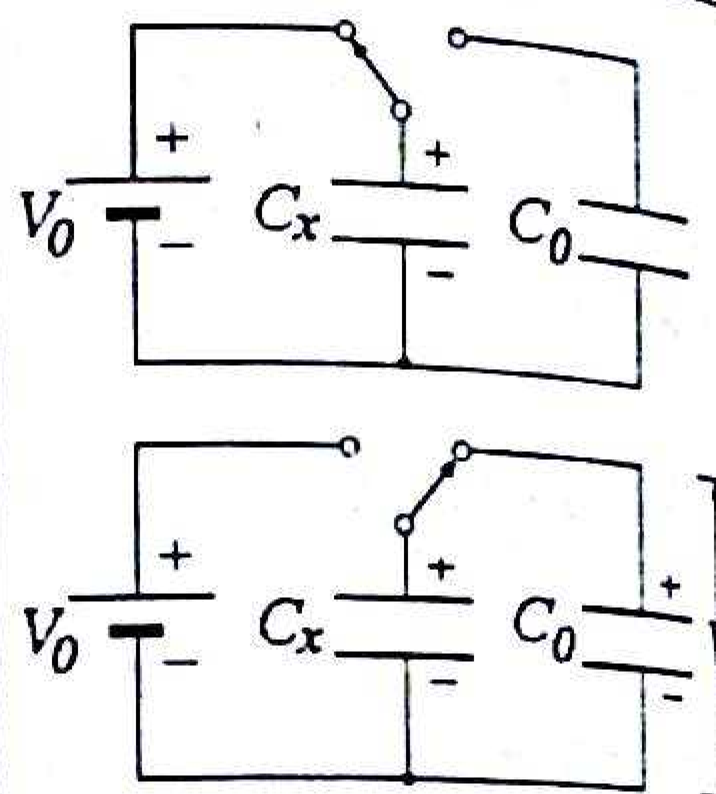


PE-5.18. *Un método para medir la capacitancia*

Un capacitor aislado de capacitancia desconocida C_x, se ha cargado con una batería de voltaje V_o = 12 voltios. Cuando el capacitor cargado se desconecta de la batería y se conecta a un capacitor patrón conocido de valor C_o = 1 μF, el voltaje a través de la combinación cae a un valor V = 8 voltios. ¿Cuánto vale la capacitancia desconocida?

a) C_x= 0,75 μF b) C_x= 1,25 μF c) C_x= 1,50 μF

d) C_x=0,5 μF e) C_x= 2,0 μF



CAP. 5: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
5.01					✓
5.03				✓	
5.05			✓		
5.07	✓				
5.09			✓		
5.11		✓			
5.13				✓	
5.15				✓	
5.17	✓				

	a	b	c	d	e
5.02			✓		
5.04	✓				
5.06				✓	
5.08					✓
5.10	✓				
5.12		✓			
5.14		✓			
5.16					✓
5.18					✓

André Marie Ampère

(1775 - 1836)



Estampilla de correos en honor a Ampere

Nace en Lyon, Francia, este gran genio considerado el Newton de la electricidad. Niño prodigio por sus conocimientos en matemática. Su juventud transcurrió bajo el signo de una terrible tragedia, al ver morir a su padre en la guillotina luego de ser condenado por el tribunal durante la revolución francesa. Fue Profesor en la Universidad de Lyon, en la École Polytechnique y en el College de France. Ampere une a sus habilidades matemáticas una imaginación intuitiva. Cuando en 1820, Hans Christian Oersted desde Dinamarca reportaba que durante una clase de física había observado que las corrientes eléctricas afectaban la aguja de una brújula, inmediatamente a Ampere se le ocurrió la idea de que si una corriente ejerce una fuerza sobre un imán, por la tercera ley de Newton, un imán debería ejercer una fuerza sobre una corriente. El experimento se llevó a cabo sin demora y dio el resultado esperado - un alambre que conduce corriente cerca de un imán experimenta una fuerza magnética. Con los rudimentarios aparatos de que disponía, Ampere también experimentó con diferentes configuraciones de alambres portadores de corrientes, descubre la interacción entre corrientes eléctricas y demuestra que dos corrientes paralelas del mismo sentido se atraen en tanto que las de sentido contrario se rechazan, como lo hacen las cargas eléctricas en reposo. Los experimentos de Ampere sobre las acciones dinámicas de las corrientes fueron sustentados por el riguroso soporte matemático que el gran teórico les dio. Halló la expresión que relaciona el campo magnético con la corriente eléctrica, conocida como Ley de Ampere y también una expresión que permite calcular la fuerza magnética sobre un segmento de alambre con corriente. Estos trabajos fueron publicados en la magistral memoria "Teoría matemática de los fenómenos dinámicos, únicamente inducida por la experiencia". Ampere estableció que un imán es equivalente a una distribución de corrientes y propuso que el magnetismo en la materia es debido a corrientes circulando en diminutos circuitos cerrados. Esta conjetura de Ampere no pudo ser experimentalmente verificada. Sin embargo, hoy en día se acepta que las propiedades magnéticas de la materia son debidas a momentos dipolares magnéticos de las partículas subatómicas, que se relacionan con sus momentos angulares de spin intrínsecos. Ampere fue un hombre intensamente religioso y su vida estuvo ensombrecida por situaciones dolorosas. Se dice que el guillotinamiento de su padre lo llevó a una severa depresión y melancolía que no habló por un año; su mujer le fue arrebatada en la flor de la juventud por una implacable enfermedad y su segundo matrimonio fue un martirio. Murió a los 63 años de neumonía. Tandem felix (Por fin feliz), es el epitafio de la lápida del torturado genio. El nombre de Ampere queda perpetuado en la unidad SI de corriente eléctrica.

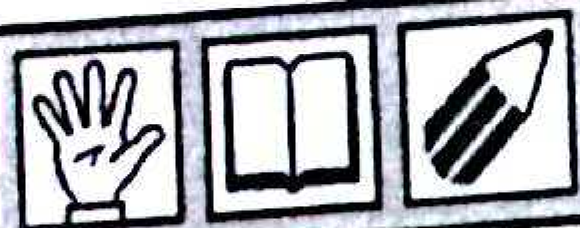
6

CORRIENTE Y RESISTENCIA

Hasta ahora hemos estudiado situaciones donde las cargas eléctricas se encuentran en reposo (electrostática). La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad se refieren a las cargas en movimiento, es decir, a las corrientes eléctricas que surgen de cualquier flujo de cargas. El transporte de las cargas bajo la aplicación de campos eléctricos está limitado por cierta especie de fricción que se opone a la fuerza eléctrica. Para describir estos procesos en forma macroscópica se definen la resistividad y la conductividad eléctrica que son característicos de los materiales. La dificultad en establecer una corriente eléctrica, se expresa definiendo la resistencia eléctrica como la relación entre el voltaje aplicado y la corriente que pasa por el material. La resistencia de muchos materiales es constante dentro de aun amplio rango de voltajes aplicados, este enunciado se conoce como la ley de Ohm. A nivel microscópico se puede describir la resistencia en forma cualitativa mediante un modelo clásico del movimiento de electrones en una red cristalina de átomos. Analizaremos en forma cualitativa los factores que contribuyen a la resistencia, y por último se consideran aspectos energéticos de la corriente eléctrica.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Corriente eléctrica.
- Densidad de corriente.
- Resistencia, resistividad y conductividad.
- La ley de Ohm.
- Modelo clásico de conducción eléctrica.
- Energía eléctrica y potencia.
- Combinaciones de resistencias.

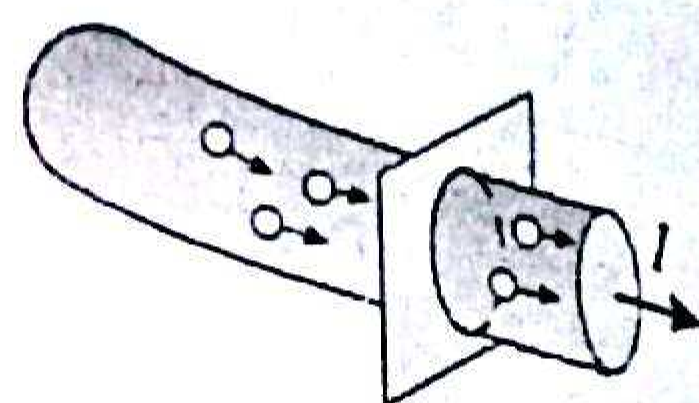


LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Una corriente eléctrica es cualquier flujo neto de carga. Se define la intensidad de la corriente como la rapidez de flujo de carga eléctrica a través de una superficie imaginaria, tal como la sección transversal de un conductor. Si ΔQ es la carga que fluye por la sección del conductor en un tiempo Δt, se define la intensidad de la corriente por la relación:

$$I = Lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad SI de corriente es el ampere: 1A = 1 C/s

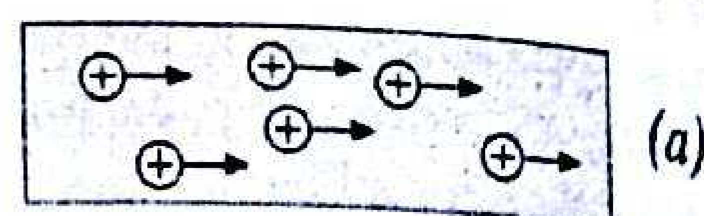


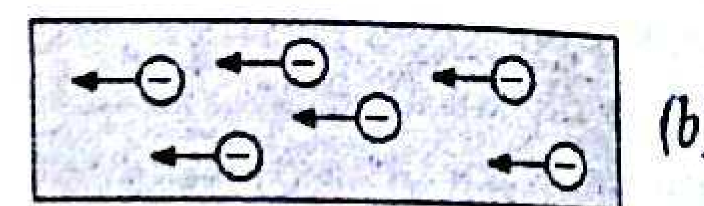
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$1\,Ampere = 1\,\frac{Coulomb}{segundo}$$

SENTIDO DE LA CORRIENTE

En un medio deben existir partículas cargadas que tengan cierta libertad de desplazarse para que se produzca una corriente. Los portadores de carga pueden ser electrones, iones (positivos o negativos), o partículas macroscópicas que tenga carga neta. Como la corriente siempre posee un sentido, es por lo tanto, una cantidad escalar con signo. Por convención, se toma como sentido positivo de la corriente, el de la trayectoria que seguirían las cargas positivas (Fig. a), aún cuando se trate de cargas negativas que se mueven en dirección contraria (Fig. b).

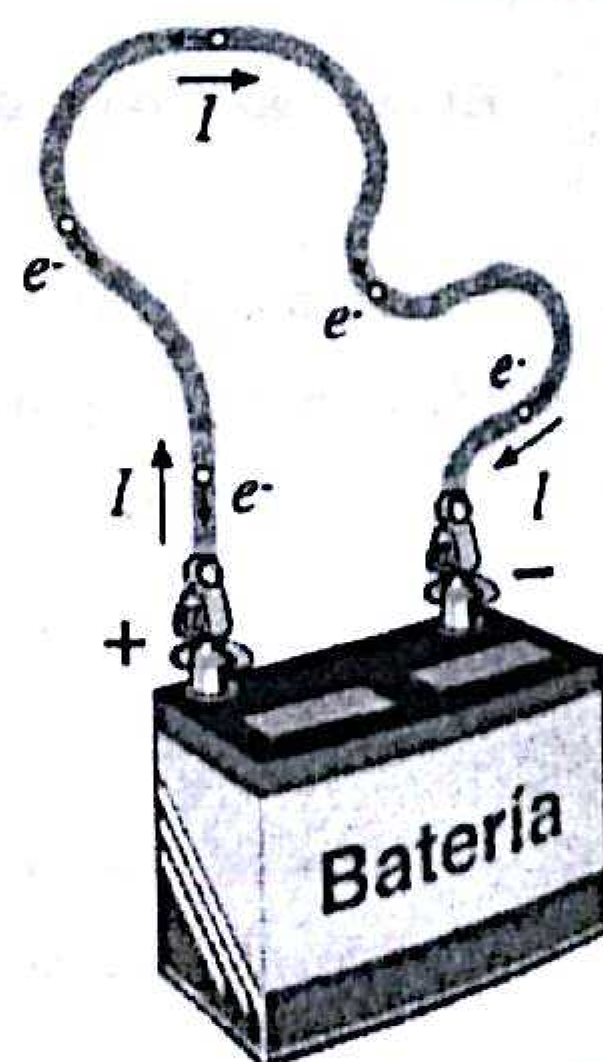




Sentido convencional de la corriente

Para establecer una corriente en un conductor se requiere que exista una diferencia de potencial entre sus extremos. La corriente (en el sentido convencional) fluye desde el lado de potencial mayor hacia el lado de potencial menor y el flujo será continuo solo en un circuito cerrado donde exista una batería.

Cuando se conecta una batería a un conductor metálico, la diferencia de potencial entre los bornes de la batería crea un campo eléctrico dentro del conductor. Los electrones libres de un extremo del alambre son atraídos al borne positivo y al mismo tiempo, en el otro extremo los electrones dejan el borne negativo de la batería y entran al alambre. Así se establece un flujo continuo de electrones, de tal forma que la corriente de electrones es equivalente una corriente de cargas positivas en sentido contrario.



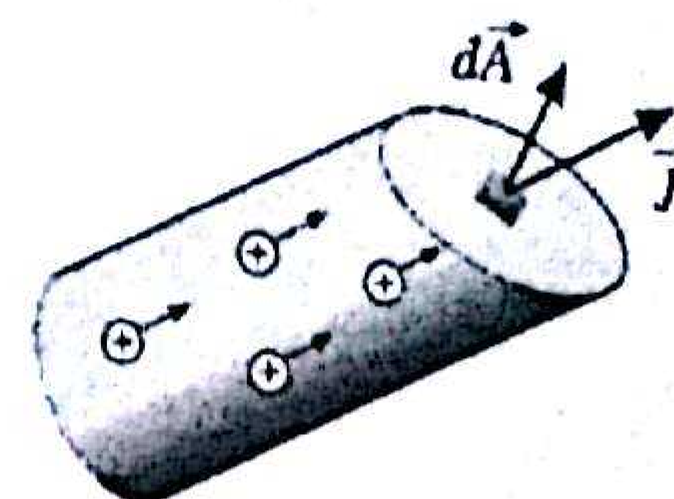
DENSIDAD DE CORRIENTE

Se define la densidad de corriente promedio que atraviesa una superficie, como la corriente I por unidad de área transversal A:

$$J = I/A \qquad (A/m^2)$$

La densidad de corriente es un vector, $\vec{J}$, cuya dirección y sentido corresponden a los del vector velocidad del movimiento ordenado de los portadores positivos y cuya magnitud es la corriente por unidad de área.

La densidad de corriente, puede ser no uniforme y podemos expresar la corriente que atraviesa un elemento de una superficie como: $dI = \vec{J} \bullet d\vec{A}$, donde $d\vec{A}$ es el vector área de dicho elemento.



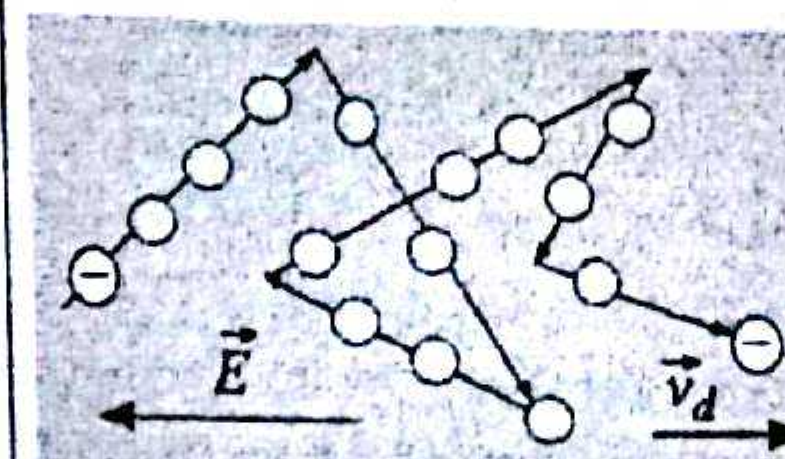
Corriente total

$$I = \int \vec{J} \bullet d\vec{A}$$

VELOCIDAD DE ARRASTRE

El movimiento de los electrones de conducción es errático, chocando frecuentemente con los iones e impurezas de la red, los cuales están casi estacionarios. El número de electrones que se mueve en una dirección queda balanceado por igual número de ellos que se mueven en dirección opuesta.

Cuando se aplica una diferencia de potencial, se establece un campo eléctrico que provoca una tendencia de los electrones a moverse en sentido opuesto al campo eléctrico. Aunque el campo $\vec{E}$ acelera los electrones, debido a los choques, sus velocidades no aumentan indefinidamente. El resultado es que los electrones adquieren un movimiento lento y ordenado, con una velocidad promedio v_d, llamada velocidad de arrastre.

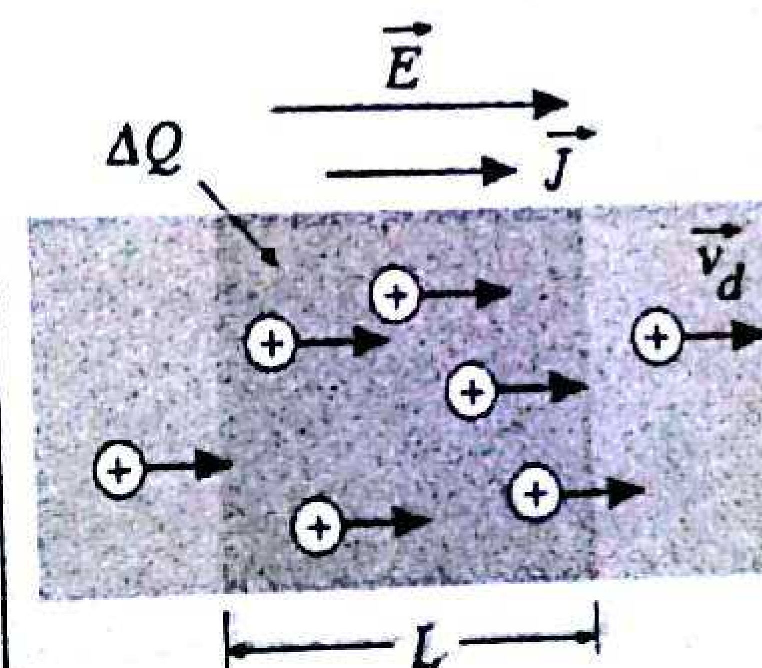


Los choques provocan una ruta en zig-zag del electrón

MODELO CLÁSICO DE CONDUCCIÓN

En este modelo se supone la existencia de electrones desligados de sus átomos, que son libres de moverse como si fuese un gas ideal. Por conveniencia, vamos a considerar el desplazamiento equivalente de portadores de cargas positivas en la dirección del campo $\vec{E}$.

Al aplicar un campo eléctrico, los portadores se desplazan con una velocidad promedio o de arrastre, $\vec{v}_d$.



Si hay n partículas por unidad de volumen, con carga q, la carga total dentro de un trozo de material de longitud de longitud L y área A es:

$$\Delta Q = nq(AL)$$

Esta cantidad de carga ΔQ es que pasa por cualquier sección del conductor en un tiempo Δt. La corriente es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nqAL}{L/v_d} = nqAv_d$$

De modo que la densidad de corriente (promedio) es:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d.$$

Densidad de corriente

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

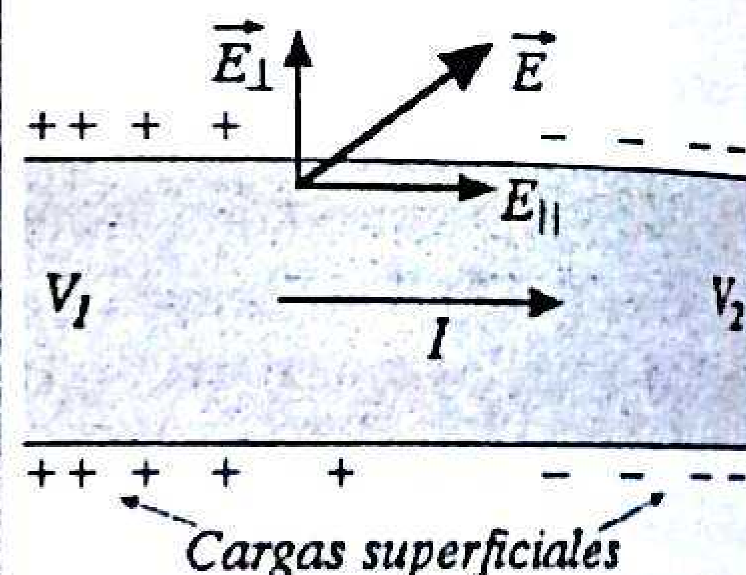
CARGAS SUPERFICIALES Y CAMPO $\vec{E}$ EN UN CONDUCTOR

Hemos visto que en electrostática el campo eléctrico interno de un conductor es cero, mientras que en la superficie del conductor, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie. Esto ya no se cumple cuando circula una corriente eléctrica. Ahora las condiciones no son estáticas y existe un flujo continuo de cargas desde los terminales de la fuente, por todos los alambres alrededor del circuito.

En la situación estacionaria, un cierto número de cargas se acumulan en la superficie del conductor. Estas cargas se distribuyen de manera no uniforme y generan un campo eléctrico que tiene una componente a lo largo del conductor. Es justamente esta componente la responsable del flujo de corriente. Las cargas superficiales en los conductores con corriente son raramente mencionadas en los libros de texto* a pesar de que cumplen tres funciones muy importantes:

1) Mantienen la distribución de potencial a lo largo del circuito.
2) Generan un campo eléctrico en el exterior del conductor.
3) Aseguran el flujo continuo de los portadores de cargas.

* J. D. Jackson, *Am. J. Phys. 64 (79) 1996.*



La corriente en un alambre es debida al campo $\vec{E}$ que producen las cargas en su superficie.

CONDUCTIVIDAD Y RESISTIVIDAD

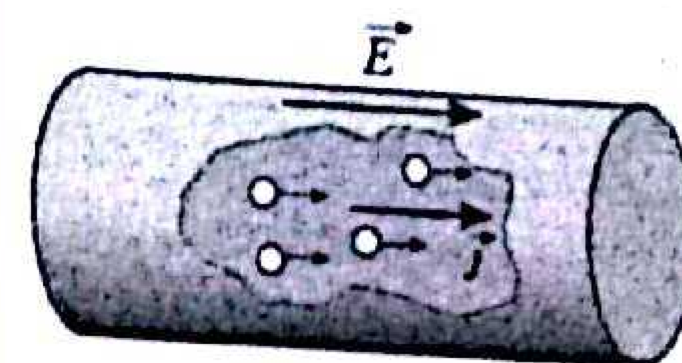
La densidad de corriente $\vec{J}$ es proporcional al campo eléctrico $\vec{E}$ en el alambre:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

Donde la constante de proporcionalidad, σ, es la conductividad del material. La unidad SI de la conductividad es el Siemens (1 Siemens = ohm.metro)$^{-1}$).

El inverso de la conductividad se llama la resistividad:

$$\rho = 1/\sigma \text{ (ohm·metro)}$$



$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

Conductividad *Resistividad*

RESISTENCIA

Para tomar en cuenta la forma y tamaño del conductor, definimos la resistencia eléctrica como el cociente entre la diferencia de potencial aplicada V entre sus extremos y la corriente I que fluye:

$$R = \frac{V}{I}$$

Observe que la resistividad ρ es una propiedad intrínseca del tipo de material, mientras que la resistencia R es una propiedad de la muestra particular del material y depende de su forma y tamaño.

La unidad SI de resistencia es el ohm: (1Ω = 1V/A).

$$R = \frac{V}{I}$$

Símbolo de Resistencia



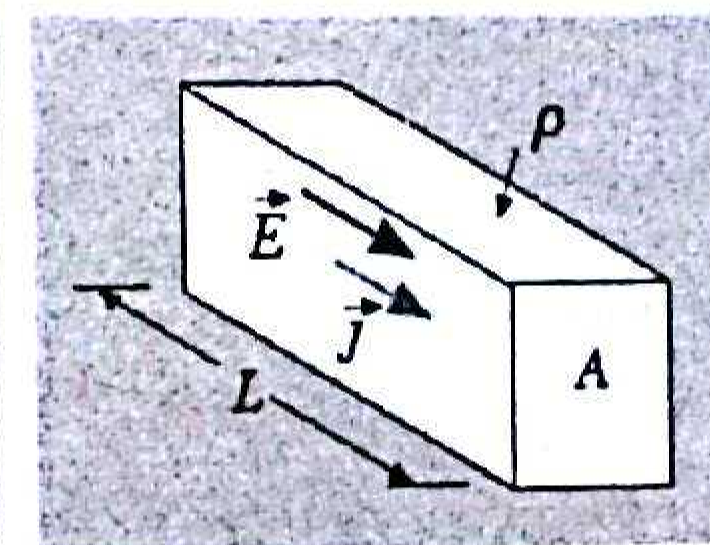
El ohm: 1Ω = 1Voltio/Ampere

CONDUCTOR CON SECCIÓN CONSTANTE

Sea un conductor homogéneo e isotrópico, de longitud L y de sección constante con área A. Si se aplica una diferencia de potencial, el campo es uniforme, ($E = V/L$) y la corriente es:

$$I = JA = \left(\frac{E}{\rho}\right)A = \left(\frac{V}{\rho L}\right)A$$

Despejando ($V / I = R$) encontramos que la resistencia de un conductor es proporcional a la resistividad del material y a su longitud, y es inversamente proporcional al área de su sección transversal, A.



Resistencia de un conductor de sección constante

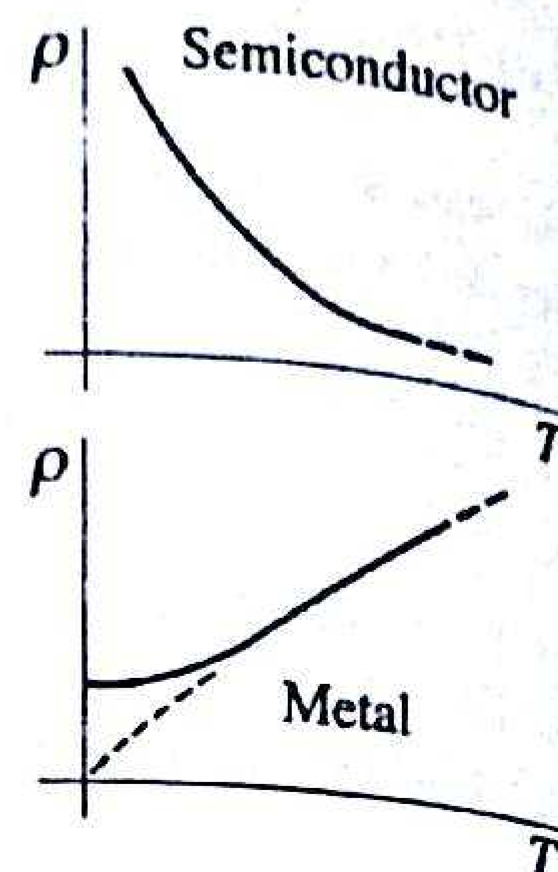
$$R = \rho\left(\frac{L}{A}\right)$$

LA RESISTIVIDAD Y LA TEMPERATURA

Usualmente la resistividad ρ de un material depende de la temperatura. En algunos materiales como el grafito y los semiconductores, la resistividad disminuye con la temperatura. Por otra parte, en los metales, la resistividad aumenta con la temperatura. Esto se debe a que al calentar el material, se incrementa las amplitudes de vibración de los iones, lo cual aumenta la probabilidad de choques con los electrones móviles. En el rango de temperaturas cercanas a la ambiental la resistividad de un metal crece en forma lineal:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Siendo ρ_0 (en Ω·m) la resistividad a alguna temperatura T_o de referencia, y α(en °C^{-1}) es una constante denominada *coeficiente térmico de resistividad.*



La resistividad de un metal aumenta con la temperatura

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

LEY DE OHM

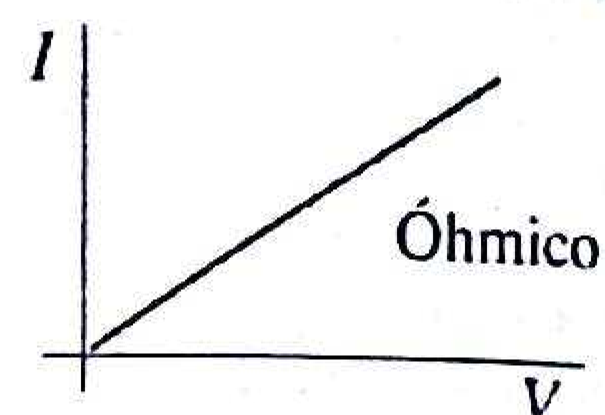
Existen muchos materiales para los cuales J es una función lineal de E, es decir, la resistividad es independiente del campo aplicado). Se dice que estos materiales obedecen la ley de Ohm.

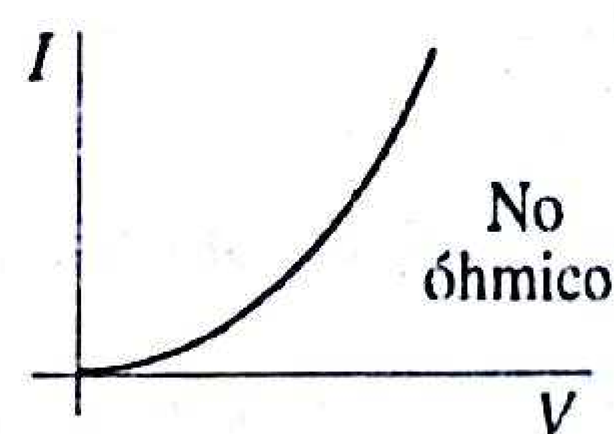
$$\rho = E / J = constante$$

Si ρ es independiente de E, entonces la resistencia R es independiente de V (si se mantienen constantes la temperatura y la presión) y el conductor obedece la ley de Ohm.

$$R = V / I = constante$$

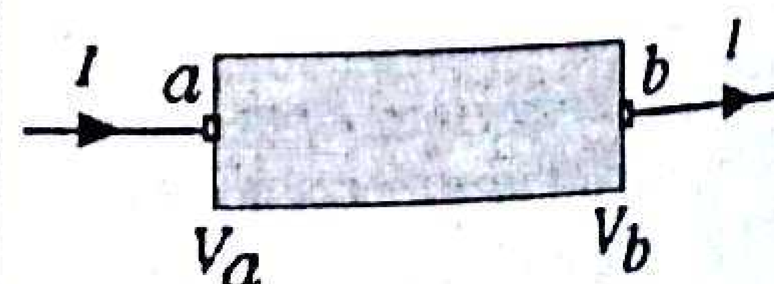
Hay muchas sustancias cuyo comportamiento con el voltaje no es lineal y por lo tanto no obedecen la ley de Ohm. En realidad, la ley de Ohm no constituye una ley física, sino que expresa una característica particular de ciertos materiales.





POTENCIA Y ENERGÍA ELÉCTRICA

Supongamos una porción de un circuito que puede ser un resistor, un generador, u otro elemento. En los terminales del elemento existe una diferencia de potencial $V_{ab} = (V_a - V_b)$ y la corriente circula internamente en dirección de a a b. En un tiempo dt pasará una carga $dQ = I\,dt$ y el trabajo hecho sobre dicha carga es:



$$dW = V_{ab}\,dQ = V_{ab}\,I\,dt$$

Este trabajo representa una energía transferida al elemento, por lo tanto, la potencia eléctrica o tasa de transferencia de energía es:

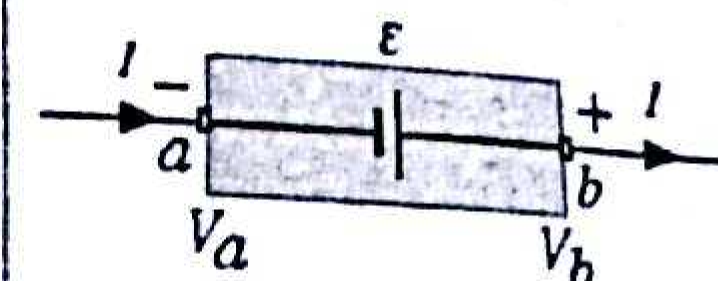
$$P = \frac{dW}{dt} = V_{ab} I \qquad \text{(Watts)}$$

Tasa de transferencia de energía eléctrica

$$P = V_{ab} I$$

Según sea el elemento del circuito, podemos considerar dos casos:

a) Si $V_b > V_a$, entonces la carga positiva gana energía potencial. El elemento le *suministra energía* eléctrica a expensas de otro tipo de energía. Podría tratarse de una batería, la cual convierte energía química, etc.., en eléctrica.

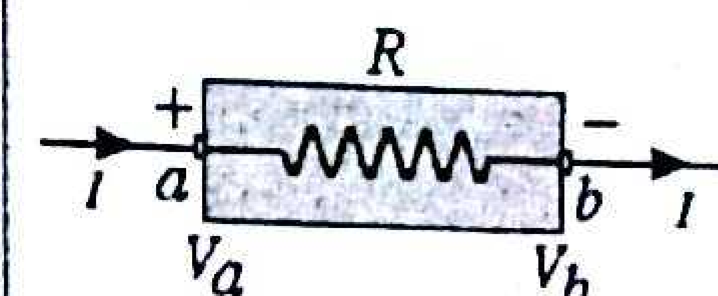


a) *Batería*: suministra energía

b) Si $V_a > V_b$, entonces la carga pierde energía potencial. El elemento *consume energía* y podría tratarse de un resistor R. La pérdida de energía en un resistor ocurre por colisiones de los portadores de carga con los átomos de la red, y genera *energía térmica*. Como la caída de potencial en el resistor es $V_{ab} = iR$, la potencia eléctrica es:

$$P = V_{ab} I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R} \qquad \text{(Watts)}$$

Hemos obtenido tres expresiones alternativas para la potencia disipada en un resistor.



b) *Resistor*: consume energía

Potencia eléctrica disipada en un resistor

$$P = V_{ab} I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}$$

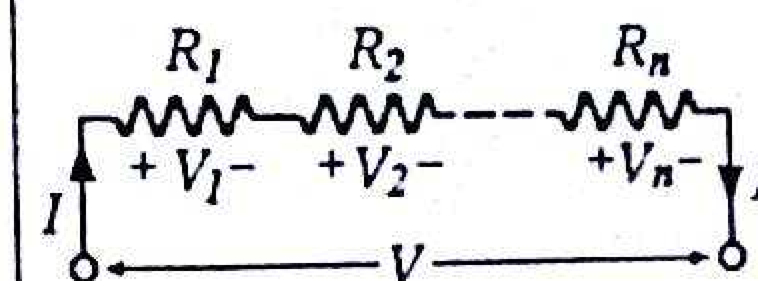
RESISTORES EN SERIE

Cuando varios resistores, R_1, R_2,....,R_n, se conectan en serie, la corriente en cada uno de ellos es la misma, $I_1 = I_2$ ....= I. De manera que las caídas de potencial individuales son: $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$,........*etc*. La suma de estos voltajes $V_1 + V_2 + ... + V_n$, es el voltaje total:

$$V = I\,(R_1 + R_2 .... + R_n)$$

Por lo tanto, podemos reemplazar la combinación por una sola resistencia equivalente que es la suma de las resistencias en serie:

$$R_s = V / I = R_1 + R_1 + ... + R_n$$



Las resistencias en serie se suman

$$R_s = R_1 + R_1 + ... + R_n$$

RESISTORES EN PARALELO

Cuando varios resistores R_1, R_2,....,R_n están conectadas en paralelo, la caída de potencial es idéntica en cada una de ellos:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = ... = I_n R_n = V$$

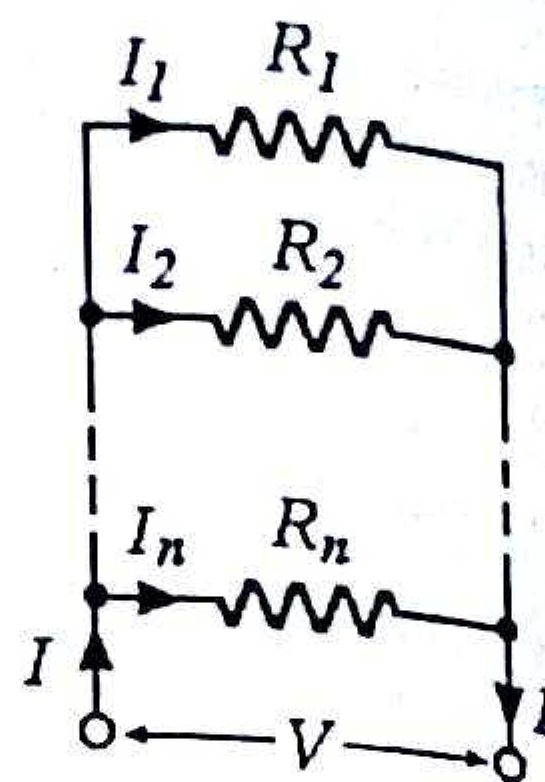
Además, la suma de las corrientes individuales es la corriente total.

$$I = I_1 + I_1 + ... + I_n = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + .. + \frac{V}{R_n}$$

$$I = V[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}] = V[\frac{1}{R_p}]$$

De modo que el inverso de la resistencia total es:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$



Los recíprocos de las resistencias en paralelo se suman

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

Se observa que…

1) La resistencia equivalente de una combinación en serie siempre es mayor que la mayor de sus componentes.

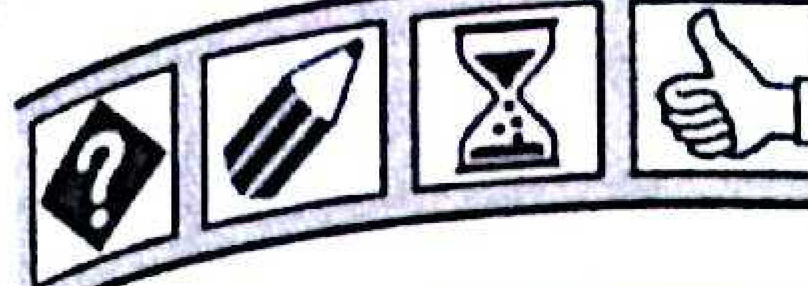
$$R_s = \sum_{i=1}^{N} R_i \qquad \Rightarrow \qquad R_s > R_1, R_2, R_3...$$

$$R_s > R_1, R_2, R_3...$$

2) La resistencia equivalente de una combinación en paralelo siempre es menor que la menor de sus componentes:

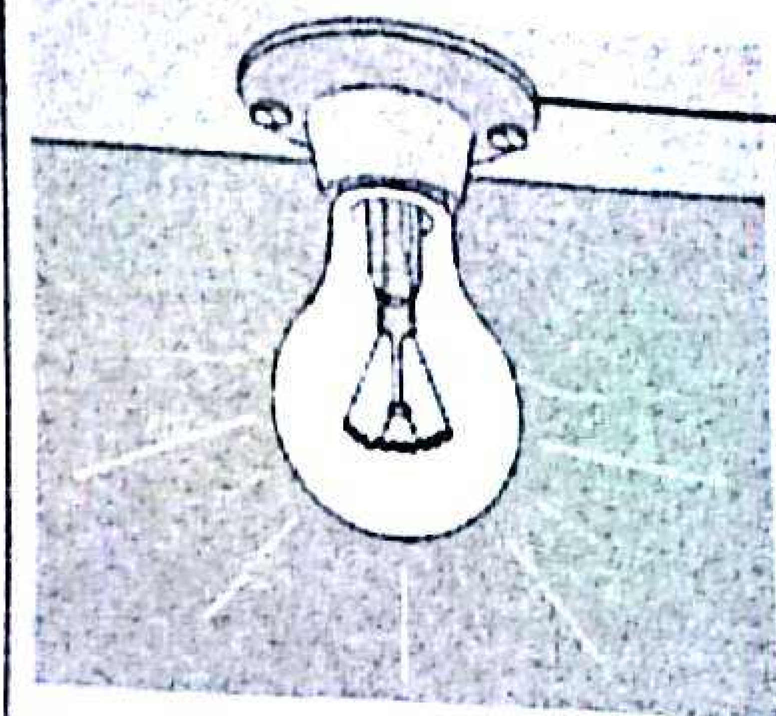
$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \qquad \Rightarrow \qquad R_p < R_1, R_2, R_3...$$

$$R_p < R_1, R_2, R_3...$$



PR-6.01. ***¿Por qué el bombillo prende casi al instante?***

Suponga un cable de cobre #18, que conecta un bombillo de 100 W a la red de alimentación de 120 voltios.
a) Calcule la densidad de corriente en el cable.
b) Calcule la velocidad de arrastre de los electrones.
c) Demuestre que el tiempo que le tomaría a un electrón trasladarse en un cable de 5 m de largo es de varias horas.
d) ¿Siendo tan pequeña la velocidad de arrastre de los electrones, por qué un bombillo se enciende casi al instante de accionar el interruptor?



Solución: a) Para un voltaje de alimentación de120 voltios, la corriente en el cable de la lámpara de 100W es:

$$i = \frac{P}{V} = \frac{100\text{W}}{120\text{v}} = 0{,}83\text{A}$$

Si A es el área de la sección transversal del alambre, la densidad de corriente es:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{0{,}83\text{A}}{8{,}2\text{x}10^{-7}\text{m}^2} = 1{,}01\text{x}10^6\,\text{A/m}^2$$

Cable de cobre #18

Diámetro: $d = 1{,}02$ mm
Area transv: $A = 8{,}2\text{x}10^{-7}\text{m}^2$

b) En el cobre existe en promedio, un electrón de conducción por cada átomo, luego el número n de electrones por unidad de volumen es igual al numero de átomos por unidad de volumen. Si ρ es la densidad del cobre, M su masa molecular y N_A el número de Avogadro, entonces:

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{M} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\rho N_A}{M}$$

$$n = \frac{(8{,}92\text{x}10^3)(6{,}02\text{x}10^{23})}{63{,}5\text{x}10^{-3}} = 8{,}45\text{x}10^{28}\ \text{electrones/m}^3$$

Número de Avogadro

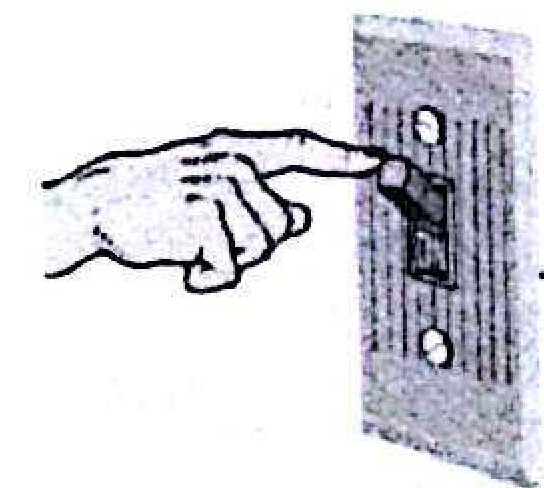
$N_A = 6{,}02\ \text{x}10^{23}$ átomos/mol

Para el cobre:

$M = 63{,}5\ \text{x}10^{-3}$kg/mol
$\rho = 8{,}92\ \text{x}10^3$ kg/m^3

La velocidad de arrastre de los electrones está relacionada con la densidad de corriente: $J = nev_d$, por lo tanto:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{1{,}01\text{x}10^6}{(8{,}45\text{x}10^{28})(1{,}6\text{x}10^{-19})} = 7{,}5\text{x}10^{-5}\ \text{m/s}$$



b) Para recorrer una longitud $L = 5$ m de cable, el tiempo promedio es:

$$t = \frac{L}{v_d} = \frac{5\text{m}}{7{,}5\text{x}10^{-5}\text{m/s}} = 6{,}67\text{x}10^4\text{s} = 18{,}5 \text{ horas.}$$

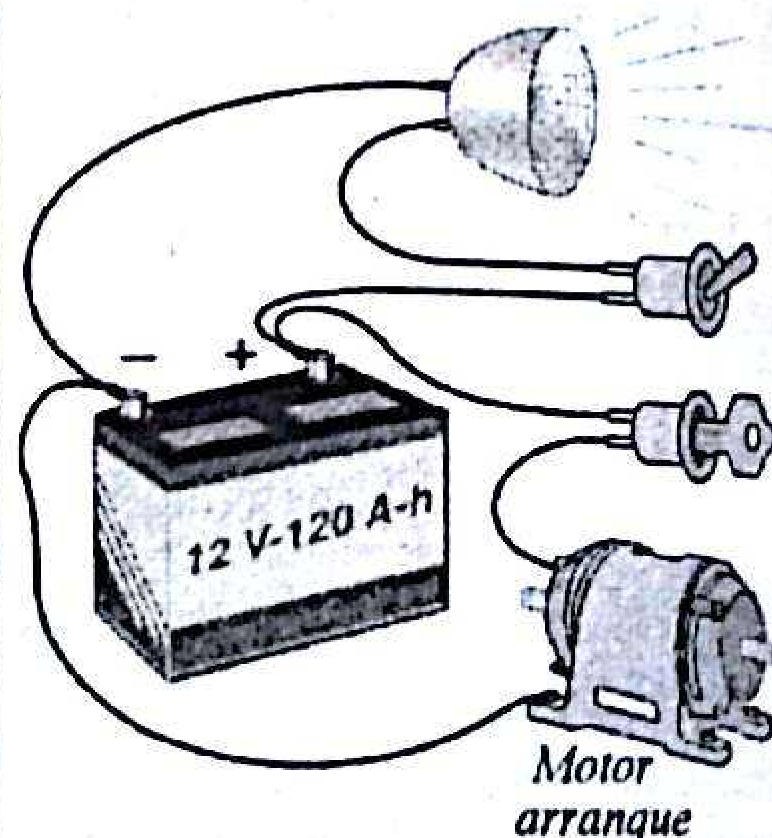
c) El tiempo de 18,5 horas que le tomaría a un electrón viajar desde el interruptor hasta el bombillo, es irrelevante. Cuando se acciona el interruptor, el cambio en la configuración del campo eléctrico que provoca el arrastre de los electrones, viaja por el cable a una velocidad cercana a la de la luz ($3\text{x}10^8$m/s) y tarda del orden de los nanosegundos. Los electrones que provocan el calentamiento del filamento no son los que estaban en las proximidades del interruptor, son los que ya estaban presentes en el propio filamento. Para que el filamento empiece a emitir luz visible, tarda en calentarse un tiempo entre 0,01 y 0,1 segundos.

Respuesta:

a) $J = 1{,}01\text{x}10^6 \text{ A/m}^2$
b) $v_d = 7{,}5\text{x}10^{-5}$m/s
c) $t = 18{,}5$ horas
d) Porque la perturbación viaja a la velocidad de la luz.

PR-6.02. *No dejes encendidas las luces del carro*

La capacidad energética de una batería de automóvil se especifica en Ampere-horas. Así una batería 120 A-h suministrará 120 A en 1 h, o 60 A durante 2 h, etc... Si dicha batería tiene una fem de 12 V y suponiendo que la fem permanece constante hasta la descarga completa.
a) Determine la carga total que puede suministrar.
b) Si dejas encendidas las luces de tu carro, que consumen 72 W, ¿en cuánto tiempo se descargará la batería?
c) Si el motor de arranque demanda 500 A, ¿por cuánto tiempo podrás estar dándole al suiche de arranque?



Solución: a) La corriente es la carga por unidad de tiempo: $i = \Delta Q/\Delta t$, por lo tanto:

$$\Delta Q = 120\text{A}\cdot\text{h} = (120\frac{\text{C}}{\text{s}}\cdot\text{h})(3600\frac{\text{s}}{\text{h}}) = 4{,}32\text{x}10^5\text{C}$$

b) Como la potencia es $P = Vi$, la corriente en las lámparas es $i = P/V = 72\text{W}/12\text{v} = 6\text{A}$ y como $i = \Delta Q/\Delta t$, el tiempo máximo es:

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{i} = \frac{4{,}32\text{x}10^5\text{C}}{12\text{A}} = 7{,}2\text{x}10^4\text{s} = \frac{7{,}2\text{x}10^4\text{s}}{3600\text{s/h}} = 20\text{h}$$

c) Si el motor de arranque demanda 500 A, el tiempo de descarga es:

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{i} = \frac{4{,}32\text{x}10^5\text{C}}{500\text{A}} = 864\text{s} = \frac{864\text{s}}{60\text{s/min}} = 14{,}4\text{min}$$

Respuesta:

a) $\Delta Q = 4{,}32\text{x}10^5$C
b) $\Delta t = 20$h
c) $\Delta t = 14{,}4$min

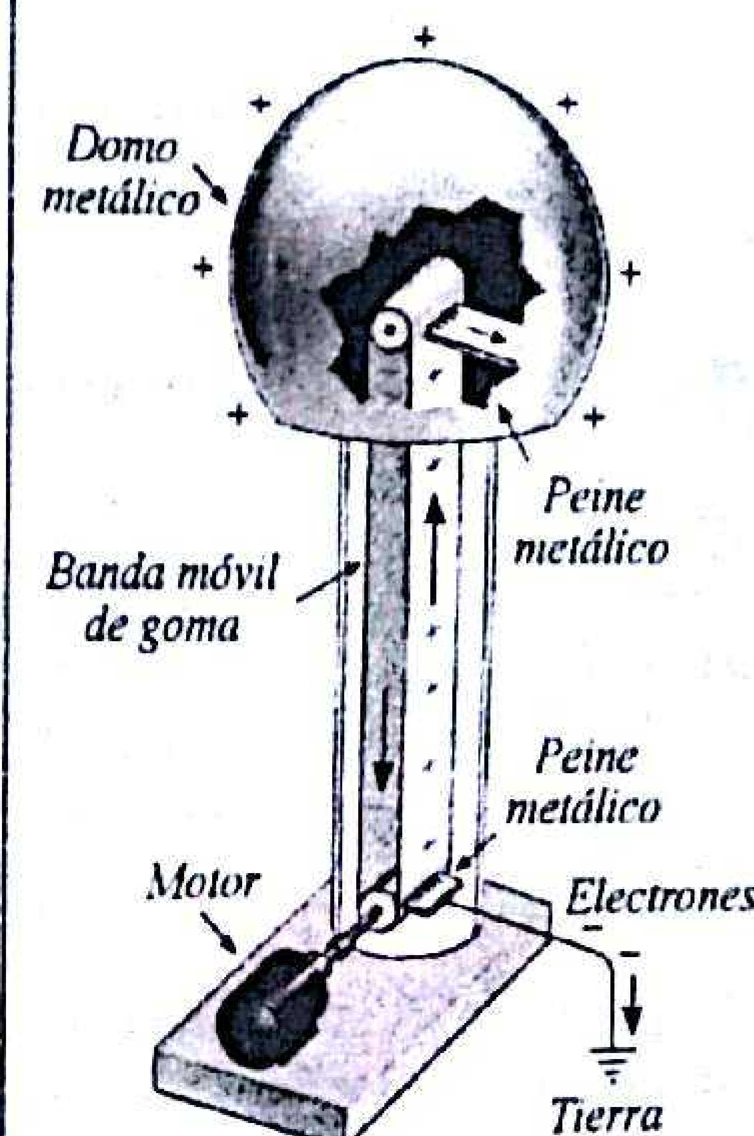
PR-6.03. *Transporte de carga en el Van de Graaff*

El generador de Van de Graaff, de uso común en el laboratorio de demostraciones de física, se basa en el experimento del balde de hielo de Faraday para cargar una gran esfera metálica mediante una correa en movimiento continuo. Los electrones escapan por las puntas de un peine metálico conectado a tierra, la cual actúa de sumidero, dándole a la correa una carga positiva. Por otro peine metálico colocado en la parte superior, la correa cargada atrae electrones de un gran esfera conductora, dándole a la esfera una carga positiva. Se obtiene así una elevada diferencia de potencial (cientos de miles de voltios) entre la esfera y tierra

a) Suponga que el radio de la esfera es $R = 1{,}0$ m, cuánta carga se necesita para elevar su potencial a $V = 10^6$ voltios.
b) Si la correa tiene un ancho de $a = 0{,}5$ m y se mueve a $v = 30$ m/s, llevando una densidad superficial de carga $\sigma = 6{,}7\ \mu\text{C/m}^2$, ¿qué corriente transporta?
c) ¿Cuál es la menor potencia del motor, requerida para accionar la correa?

Solución: a) El potencial electrostático en la superficie de la esfera metálica es: $V = kQ/R$, por lo tanto la carga acumulada es:

$$Q = \frac{VR}{k} = \frac{(10^6\text{v})(1\text{m})}{9{,}0\text{x}10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 1{,}11\text{x}10^{-4}\text{C}$$



b) En un intervalo de tiempo Δt la correa avanza una longitud Δx y la carga transportada en el área $a\Delta x$ es:

$$\Delta Q = \sigma a \Delta x$$

La corriente es:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sigma a \Delta x}{\Delta t} = \sigma a v$$

$$i = (6{,}7\text{x}10^{-6}\text{C/m}^2)(0{,}5\text{m})(30\text{m/s}) = 1{,}0\text{x}10^{-4}\text{ A}$$

c) El menor valor de la potencia del motor requerido es:

$$P = Vi = (10^6\text{v})(1{,}0\text{x}10^{-4}\text{A}) = 100\text{W}$$

Respuesta:

a) $Q = 1{,}11\text{x}10^{-4}$C
b) $i = 100\ \mu$A, c) $P = 100$ W

PR-6.04. *Corriente electrónica en un átomo*

En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón gira en una órbita circular de radio $r = 5{,}3\text{x}10^{-11}$ m alrededor del núcleo.
a) Halle la velocidad del electrón.
b) ¿Cuál es la corriente efectiva asociada al electrón?

Solución: a) Para hallar la velocidad de rotación, aplicamos la segunda ley de Newton, donde la fuerza centrípeta es proporcionada por la atracción electrostática:

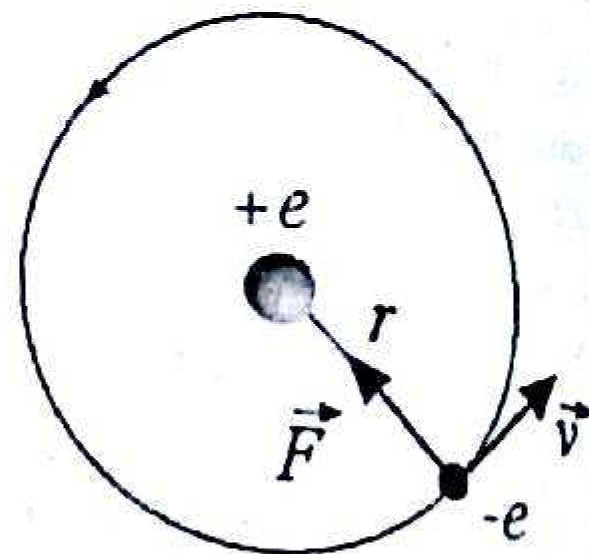
$$F = ma \quad \Rightarrow \quad k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Despejando:

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = \sqrt{\frac{9\text{x}10^9(1{,}6\text{x}10^{-19})^2}{(9{,}1\text{x}10^{-31})(5{,}3\text{x}10^{-11})}} = 2{,}19\text{x}10^6 \text{ m/s}$$

b) El tiempo empleado en dar una vuelta alrededor del protón es: $t = 2\pi r/v$ y la corriente es;

$$i = \frac{e}{t} = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{(1{,}6\text{x}10^{-19})(2{,}19\text{x}10^6)}{2\pi(5{,}3\text{x}10^{-11})} = 1{,}05 \text{ mA}$$



Electrón
Masa: $m = 9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg
Carga: $e = 1{,}6\text{x}10^{-19}$ C

Respuesta:

a) $v = 2{,}19\text{x}10^6$
b) $i = 1{,}05$ mA

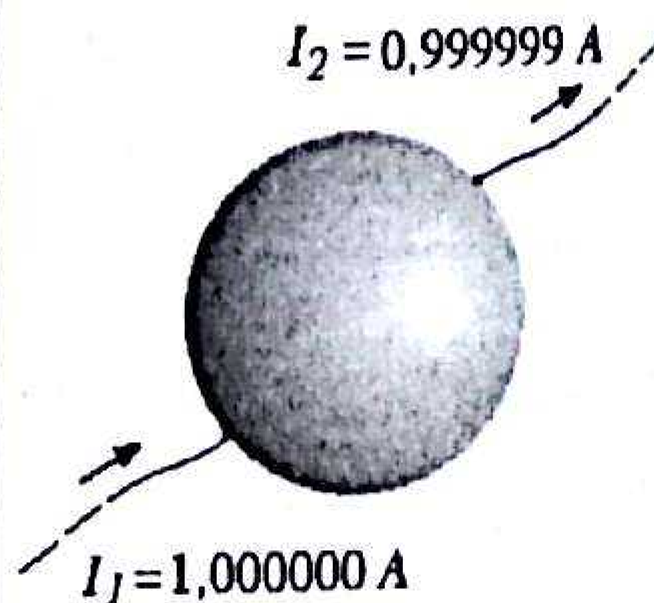
PR-6.05. *¿En cuánto tiempo se carga la esfera?*

Una corriente de 1,000000 A fluye por un alambre hacia una esfera conductora de radio $r = 12$ cm que está aislada. Simultáneamente, por otro alambre sale de la esfera una corriente de 0,999999 A. ¿Cuánto tiempo le tomará a la esfera aumentar su potencial a 1000 voltios?

Solución: En un intervalo de tiempo Δt, la carga de la esfera aumenta en una cantidad ΔQ, que está relacionada con aumento correspondiente en el potencial de la esfera:

$$\Delta V = k\frac{\Delta Q}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \frac{r\Delta V}{k}$$

Por otra parte, si la corriente que entra a la esfera es I_1 y la que sale es I_2, la carga acumulada es: $\Delta Q = (I_1 - I_2)\Delta t$, de modo que el tiempo requerido para acumularla es:



$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I_1 - I_2} = \frac{r\Delta V}{k(I_1 - I_2)}$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos:

$$\Delta t = \frac{(0{,}12)(1000)}{9\text{x}10^9(1{,}000000 - 0{,}999999)} = 0{,}013 \text{ s}$$

Respuesta:

$$\Delta t = \frac{r\Delta V}{k(I_1 - I_2)} = 0{,}013\text{s}$$

PR-6.06. *Calor debido a una corriente lineal*

En una resistencia de 12 Ω la corriente aumenta linealmente de 1 A hasta 5 A en un intervalo de tiempo de 2 s. ¿Cuál es la energía térmica generada en ese tiempo?

Solución: La corriente i (en Amperes) varía linealmente con el tiempo t (en segundos) de acuerdo a la expresión:

$$i(t) = i_0 + (\frac{\Delta i}{\Delta t})t = 1 + (\frac{5-1}{2})t = 1 + 2t$$

La potencia instantánea (energía por unidad de tiempo) desarrollada en la resistencia es i^2R (W), por lo tanto la energía térmica generada durante los 2 segundos es:

$$E_t = \int_0^2 i^2 R dt = \int_0^2 (1+2t)^2 12 dt$$

$$E_t = \frac{1}{2} 12 \frac{(1+2t)^3}{3}\bigg|_0^2 = 248 \text{ J}$$

Respuesta:

$E_t = 248$ J

PR-6.07. *Corriente debida a campo heterogéneo*

Dentro de un conductor óhmico cilíndrico de radio R y conductividad σ existe un campo eléctrico que varía de acuerdo a la ecuación:

$$\bar{E}(r) = E_0(1 - \frac{r}{R})\hat{x}$$

Donde r es la distancia radial desde el eje del cilindro. Determine la corriente que circula por el conductor.

Solución: La densidad de corriente viene dada por:

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} = \sigma E_0(1-\frac{r}{R})\hat{x}$$

Si escogemos un anillo elemental de radio r, ancho dr y área:

$$dA = 2\pi r dr$$

podemos integrar para hallar la corriente total que atraviesa el conductor:

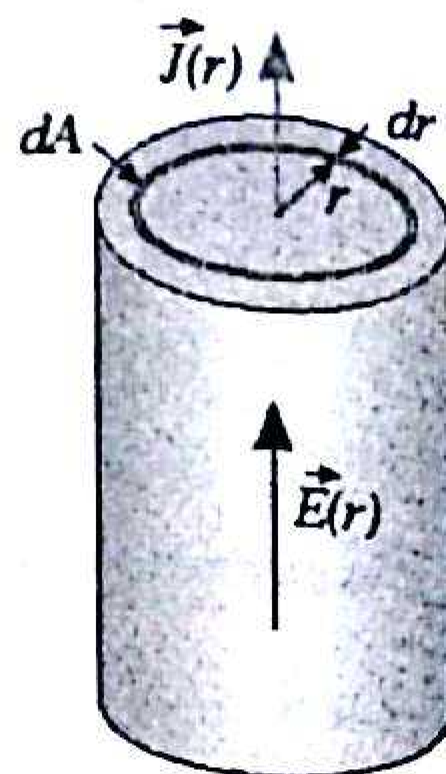
$$I = \int \bar{J}\bullet d\bar{A} = \int_0^R [\sigma E_0(1-\frac{r}{R})](2\pi r dr)$$

Resolviendo:

$$I = 2\pi\sigma E_0 \int_0^R (1-\frac{r}{R})rdr = 2\pi\sigma E_0(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R})\Big|_0^R$$

Simplificando esta expresión, tenemos:

$$I = \frac{1}{3}\pi R^2\sigma E_0$$



Respuesta:

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\pi R^2\sigma E_0}$$

PR-6.08. *En el alambre todo depende de la temperatura*

Cuando un alambre metálico es calentado, no sólo cambia su resistividad sino también su longitud y su área de sección transversal. La relación $R = \rho(L/A)$ indica que los tres factores deberían tomarse en cuenta, al medir la resistencia a varias temperaturas. ¿Cuáles cambios fraccionales en la resistencia R ocurren en un alambre de cobre cuya temperatura cambia en 1°C?

Solución: Para pequeños cambios en la longitud L, el área A y la resistividad ρ, el cambio en la resistencia R es:

$$\Delta R = (\frac{\partial R}{\partial L})\Delta L + (\frac{\partial R}{\partial A})\Delta A + (\frac{\partial R}{\partial \rho})\Delta\rho$$

Como la resistencia es $R = \rho L/A$, las derivadas parciales respecto de cada variable son, respectivamente:

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\rho}{A} = \frac{R}{L} \qquad \frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{\rho L}{A^2} = -\frac{R}{A} \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{L}{A} = \frac{R}{\rho}$$

Reemplazando en la expresión anterior y dividiendo por R, se obtiene el cambio fraccional total en la resistencia:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Para un cambio de temperatura ΔT, los correspondientes cambios fraccionales en longitud, área y resistividad son:

$$\frac{\Delta L}{L} = \beta\Delta T \qquad \frac{\Delta A}{A} = 2\beta\Delta T \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha\Delta T$$

Siendo β (/°C) el coeficiente de dilatación lineal y α (°C-1) el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura. Sustituyendo estas expresiones, se obtiene finalmente:

$$\frac{\Delta R}{R} = (\beta - 2\beta + \alpha)\Delta T = (\alpha - \beta)\Delta T$$

Con los valores numéricos para el cobre:

$$\frac{\Delta R}{R} = (4{,}3\text{x}10^{-3}/°C - 1{,}7\text{x}10^{-5}/°C)1°C = 4{,}3\text{x}10^{-3}$$

El cambio fraccional en R proviene principalmente del cambio fraccional en la resistividad (0,43%), ya que los cambios en la longitud y en el área resultan muy pequeños (0,0017% y 0,0034% respectivamente)

<u>Cobre:</u>

Coef. de dilatación lineal
$\beta = 1{,}7\text{x}10^{-5}/°C$

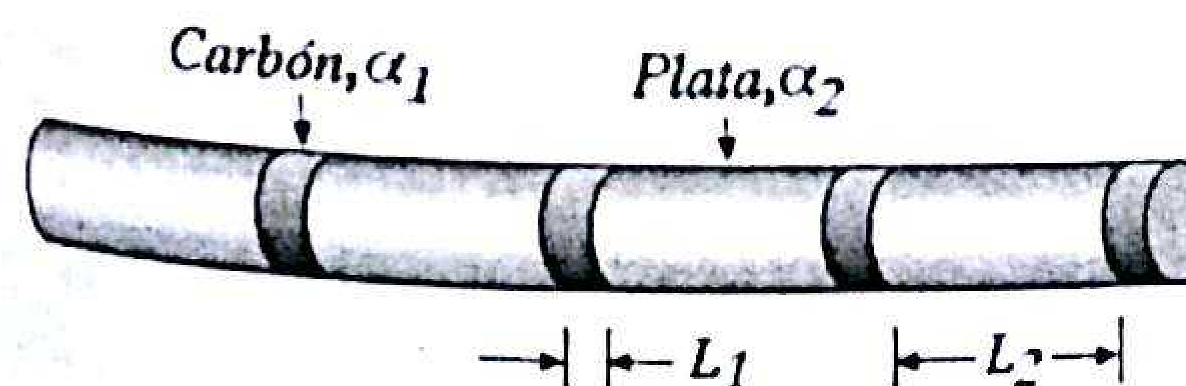
Coeficiente de resistividad
$\alpha = 4{,}3\text{x}10^{-3}/°C$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = (\alpha - \beta)\Delta T = 4{,}3\text{x}10^{-3}}$$

PR 6.09. *Resistencia que no depende de la temperatura*

A un ingeniero se le pide que diseñe un dispositivo cuya resistencia sea independiente de la temperatura para pequeñas variaciones de temperatura alrededor de 20°C.



Para ello coloca en forma alternada, unidades de igual área constituidas de un cilindro de carbón (coeficiente α_1 negativo), al lado de un cilindro de plata de (coeficiente α_2 positivo). ¿Cuál debe ser la relación entre las longitudes del carbón y de la plata?

Solución: La resistencia efectiva de una combinación serie es la suma de las resistencias individuales:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 L_1}{A} + \frac{\rho_2 L_2}{A}$$

Reemplazando las expresiones de las resistividades en función de la variación de temperatura. $\Delta T = T - T_0$:

$$R = \frac{L_1}{A}\rho_{01}[1+\alpha_1 \Delta T] + \frac{L_2}{A}\rho_{02}[1+\alpha_2 \Delta T]$$

$$R = [\frac{L_1}{A}\rho_{01} + \frac{L_2}{A}\rho_{02}] + [\frac{L_1}{A}\rho_{01}\alpha_1 + \frac{L_2}{A}\rho_{02}\alpha_2]\Delta T$$

Carbón (20 °C):
$\rho_{01} = 3{,}5 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot m$
$\alpha_1 = -5{,}0 \times 10^{-4} K^{-1}$

Plata (20 °C):
$\rho_{02} = 1{,}6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$
$\alpha_2 = 3{,}8 \times 10^{-3} K^{-1}$

Para que R no dependa de la variación de la temperatura ΔT debe cumplirse que:

$$\frac{L_1}{A}\rho_{01}\alpha_1 + \frac{L_2}{A}\rho_{02}\alpha_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{L_1}{L_2} = -\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{1{,}6\mathrm{x}10^{-8}}{3{,}5\mathrm{x}10^{-5}}(\frac{3{,}8\mathrm{x}10^{-3}}{-5{,}0\mathrm{x}10^{-4}}) = 3{,}5\mathrm{x}10^{-3}\mathrm{m}$$

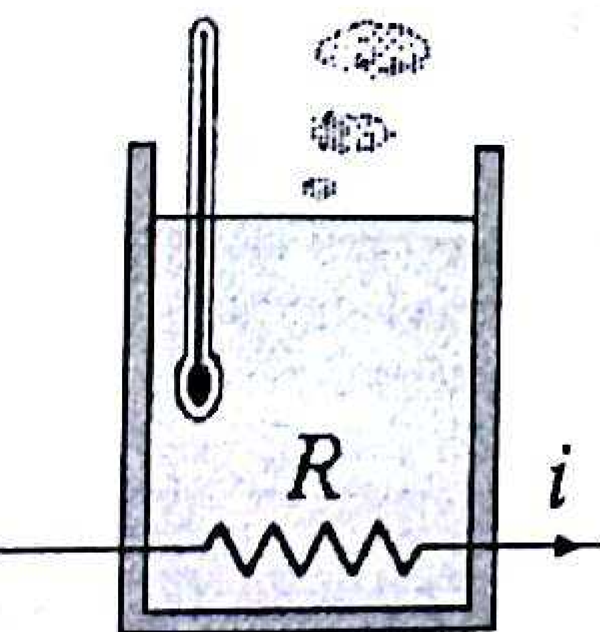
Se requiere 3,5 mm de carbón por cada metro de plata.

Respuesta:

$$\frac{L_1}{L_2} = -\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 3{,}5\mathrm{x}10^{-3}\mathrm{m}$$

PR-6.10. *El agua hierve y luego se evapora*

Un calentador de inmersión de una cafetera eléctrica opera a 120 voltios con una corriente de 4,17 A. Suponga que el 80% del calor generado es absorbido por el agua.
a) ¿Cuánto tiempo tardará en calentar dos litros de agua desde la temperatura de 20 °C hasta su ebullición?
b) Si por un descuido, el calentador no fue apagado, ¿en cuánto tiempo mas se evaporará la mitad del agua?



Solución: a) La potencia disipada en la resistencia es Vi y el calor absorbido por el agua es $mc\Delta T$, siendo m la masa y c el calor especifico del agua. Debido a que 90% de la energía disipada en R va calentar el agua tenemos:

$$0{,}8(VI)t = mc\Delta T$$

$$t_1 = \frac{mc\Delta T}{0{,}8Vi} = \frac{(2{,}0\mathrm{kg})(4180\mathrm{J/kg^\circ C})(100^\circ - 20^\circ)}{0{,}8(120\mathrm{v})(4{,}17\mathrm{A})}$$

Calor específico del agua
$c = 4180$ J/kg°C

$$t_1 = 1670\ \mathrm{s} = 27{,}8\ \mathrm{min}$$

b) El tiempo adicional que le toma para evaporar 1 litro de agua es:

$$t_2 = \frac{mL_v}{0{,}8Vi} = \frac{(1{,}0\mathrm{kg})(2{,}256\mathrm{x}10^6\mathrm{J/kg})}{0{,}8(120\mathrm{v})(4{,}17\mathrm{A})} = 5640\mathrm{s} = 1{,}58\mathrm{h}$$

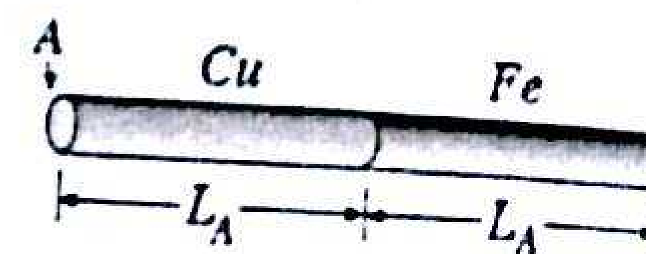
Calor de ebullición del agua
$L = 2256$ kJ/kg

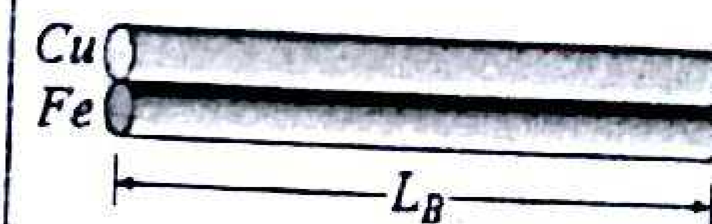
Respuesta:

a) $t_1 = 27{,}8$ min
b) $t_2 = 1{,}58$h

PR-6.11. *Conductores hechos de alambres combinados*

Dos alambres de metales diferentes, cobre y hierro, con igual sección transversal (A = 1 mm²), se combinan para construir dos conductores diferentes. El conductor A consiste de dos alambres de longitud L_A = 50 cm, pegados extremo con extremo. El conductor B consiste de dos alambres de longitud L_B = 1 m, puestos lateralmente.
a) ¿Cuál es la resistencia de la combinación A?
b) ¿Cuál es la resistencia de la combinación B?
c) ¿Cuál de los dos metales disipa mayor potencia?





Solución: Escribimos la resistencia de cada alambre en términos de su resistividad y de las dimensiones geométricas. Para la combinación las resistencias están en serie:

$$R_A = R_{Cu} + R_{Fe} = \rho_{Cu}\frac{L_A}{A} + \rho_{Fe}\frac{L_A}{A} = (\rho_{Cu} + \rho_{Fe})\frac{L_A}{A}$$

$$R_A = (1{,}70\mathrm{x}10^{-8} + 10{,}0\mathrm{x}10^{-8})\frac{0{,}50}{1\mathrm{x}10^{-6}} = 5{,}85\mathrm{x}10^{-2}\Omega$$

Cobre: $\rho = 1{,}70\mathrm{x}10^{-8}\Omega \cdot \mathrm{m}$.
Hierro: $\rho = 10{,}0\mathrm{x}10^{-8}\Omega \cdot \mathrm{m}$.

b) Para la combinación B están en paralelo:

$$R_B = \frac{R_{Cu}R_{Fe}}{R_{Cu} + R_{Fe}} = \frac{(\frac{\rho_{Cu}L_B}{A})(\frac{\rho_{Fe}L_B}{A})}{\frac{\rho_{Cu}L_B}{A} + \frac{\rho_{Fe}L_B}{A}} = \frac{\rho_{Cu}\rho_{Fe}}{\rho_{Cu} + \rho_{Fe}}\frac{L_B}{A}$$

$$R_B = \frac{(1{,}70\mathrm{x}10^{-8})(10{,}0\mathrm{x}10^{-8})}{1{,}70\mathrm{x}10^{-8} + 10{,}0\mathrm{x}10^{-8}}\frac{1{,}0}{1\mathrm{x}10^{-6}} = 1{,}45\mathrm{x}10^{-2}\Omega$$

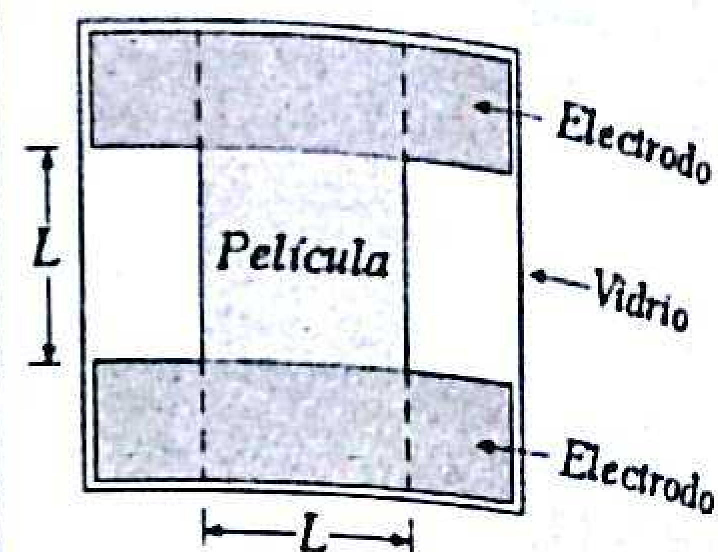
b) En el arreglo A en serie se disipa mas potencia en el hierro que es mas resistivo porque la corriente I es la misma y $P = I^2R$. En el arreglo B en paralelo, se disipa mas potencia en el cobre que es menos resistivo porque el voltaje V es el mismo para ambos y $P = V^2/R$.

Respuesta:

a) $R_A = 0{,}0585\Omega$.
b) $R_B = 0{,}0145\ \Omega$.
c) En A la potencia es mayor en el de hierro, $P_{Fe} > P_{Cu}$.
En B la potencia es mayor en el de cobre, $P_{Cu} > P_{Fe}$.

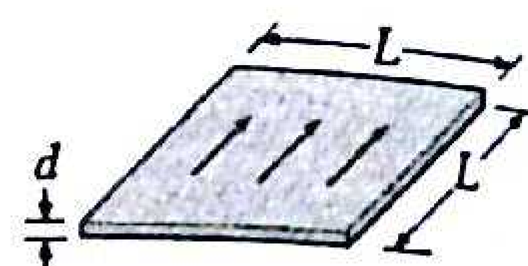
PR-6.12. *Película delgada cuadrada cuya resistencia no depende del tamaño*

Un experimentador obtiene una película delgada de forma cuadrada, depositando aluminio evaporado al vacío sobre una lámina de vidrio. Una vez alcanzado el espesor de película deseado, se protege la región cuadrada de manera que el aluminio se siga depositando a cada lado hasta formar una capa gruesa que sirva de electrodos.
a) Demuestre que la resistencia de la película cuadrada no depende de su tamaño.
b) ¿Cuál debe ser el espesor de la película para obtener una resistencia de 5 Ω?



Solución: a) La resistencia de la película depende de la relación espesor / área:

$$R = \rho\frac{d}{A} = \rho\frac{L}{Ld} = \frac{\rho}{d}$$



Vemos que por tratarse de un cuadrado, la resistencia de la película no depende del lado L, porque en la expresión este se cancela.

Resistividad del aluminio
$\rho = 2{,}75\times10^{-8}\ \Omega\cdot m$

b) Para obtener una película de resistencia 5 Ω, el espesor debe ser:

$$d = \frac{2{,}75\times10^{-8}\Omega\cdot m}{5\Omega} = 5{,}5\times10^{-9} m = 55Å$$

Respuesta:

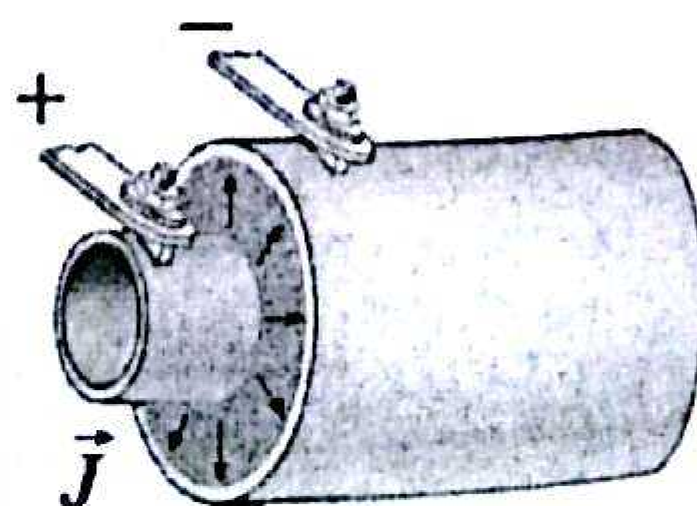
a) $R = \rho/d$.
b) $d = 5{,}5\times10^{-9} m = 55Å$

PR-6.13. *Cilindro hueco con electrodos coaxiales*

El espacio entre dos tubos metálicos coaxiales de radios a y b, se llena con un material de resistividad ρ. Determine la resistencia total de un pedazo del material de longitud L medida entre el tubo interior y el tubo exterior.

Solución: *Método 1:* Si se aplica una diferencia de potencial entre los electrodos, se establece una densidad de corriente radial. Considerando una concha cilíndrica de radio r, la densidad de corriente es uniforme y la corriente que la atraviesa es:

$$I(r) = \int \vec{J}\bullet d\vec{A} = JA = J(2\pi rL)$$



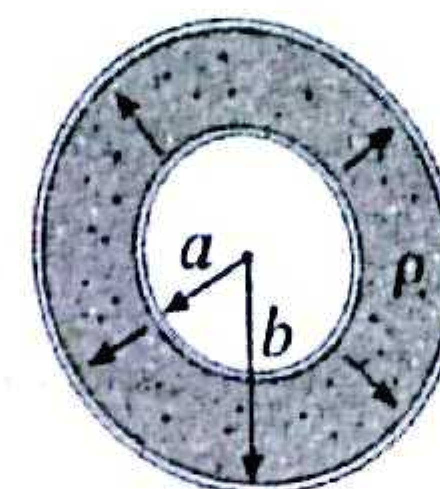
Como $J = E/\rho$, el campo eléctrico a la distancia r es:

$$\vec{E}(r) = \rho\vec{J}(r) = \frac{\rho I}{2\pi rL}\hat{r}$$

La corriente I es la misma en las sucesivas capas cilíndricas, por lo tanto, la diferencia de potencial entre los electrodos es:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}(r)\bullet d\vec{r} = -\int_b^a E_r dr = -\int_b^a \frac{\rho I}{2\pi rL}dr$$

$$\Delta V = -\frac{\rho I}{2\pi L}\ln r\Big|_b^a = \frac{\rho I}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$



La resistencia es:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$

Método 2: Podemos dividir el cilindro en conchas cilíndricas sucesivas, cuyas resistencias están en serie. Una concha cilíndrica de longitud L, radio r y espesor muy delgado dr, tiene su sección transversal constante y su resistencia infinitesimal es:

$$dR = \rho(\frac{longitud}{Area}) = \rho(\frac{dr}{2\pi L})$$

La resistencia total de las conchas *conectadas en serie*, es:

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \rho(\frac{dr}{2\pi L}) = \frac{\rho}{2\pi L}\ln r\Big|_a^b = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$

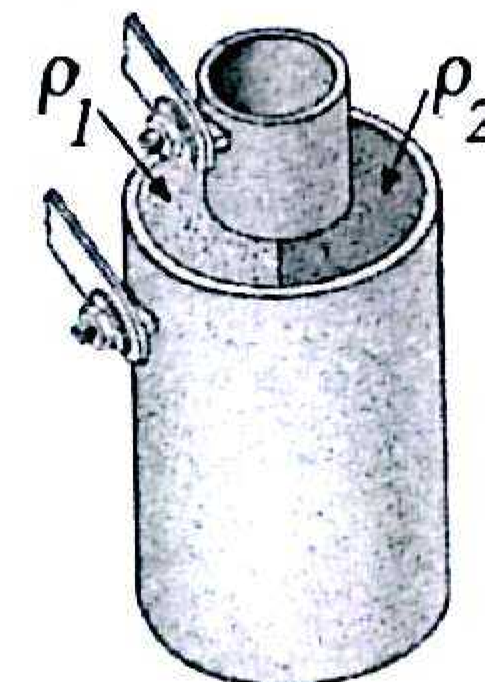
Resultado idéntico al obtenido por el primer método.

Respuesta:

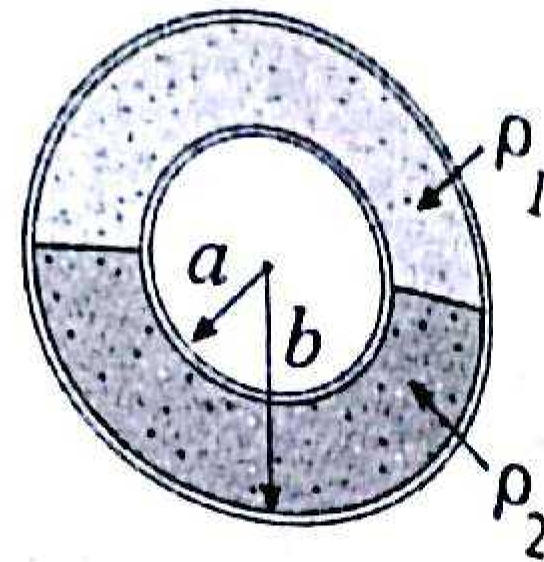
$$R = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$

PR-6.14. *Conductor cilíndrico mixto*

La mitad del espacio entre dos tubos metálicos coaxiales de radios a y b, se llena con un material de resistividad ρ_1 y la otra mitad con un material de resistividad ρ_2. Determine la resistencia total de un pedazo del material cilíndrico de longitud L medida entre el tubo interior y el tubo exterior.



Solución: Como en el problema anterior, en este caso la densidad de corriente también es radial. La corriente se divide entre los dos semicilindros que tienen la misma diferencia de potencial aplicada. Podemos considerarlos como dos resistencias en *paralelo*, siendo la resistencia de cada semicilindro el doble de la calculada en el problema anterior para el cilindro completo.



$$R_1 = \frac{\rho_1}{\pi L}\ln(\frac{b}{a}) \qquad R_2 = \frac{\rho_2}{\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$

La resistencia de la combinación es:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{[\frac{\rho_1}{\pi L}\ln(\frac{b}{a})][\frac{\rho_2}{\pi L}\ln(\frac{b}{a})]}{\frac{\rho_1}{\pi L}\ln(\frac{b}{a}) + \frac{\rho_2}{\pi L}\ln(\frac{b}{a})}$$

$$R = \frac{1}{\pi L}(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2})\ln(\frac{b}{a})$$

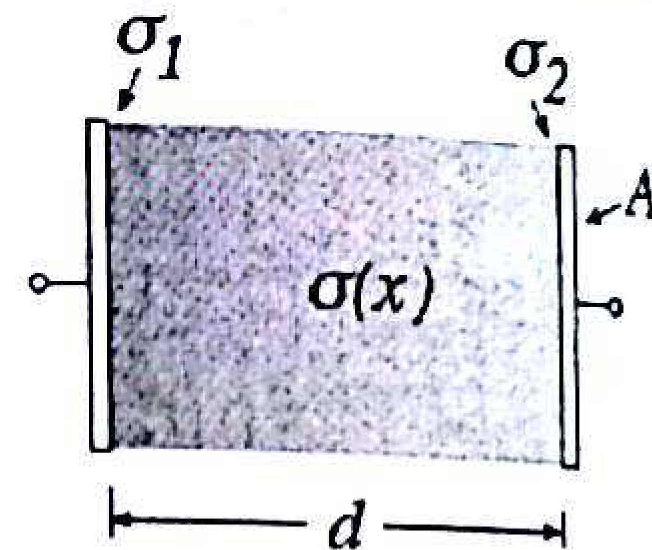
Si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ encontramos el resultado del problema anterior.

Respuesta:

$$R = \frac{1}{\pi L}(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2})\ln(\frac{b}{a})$$

PR-6.15. *Conductividad que varía linealmente*

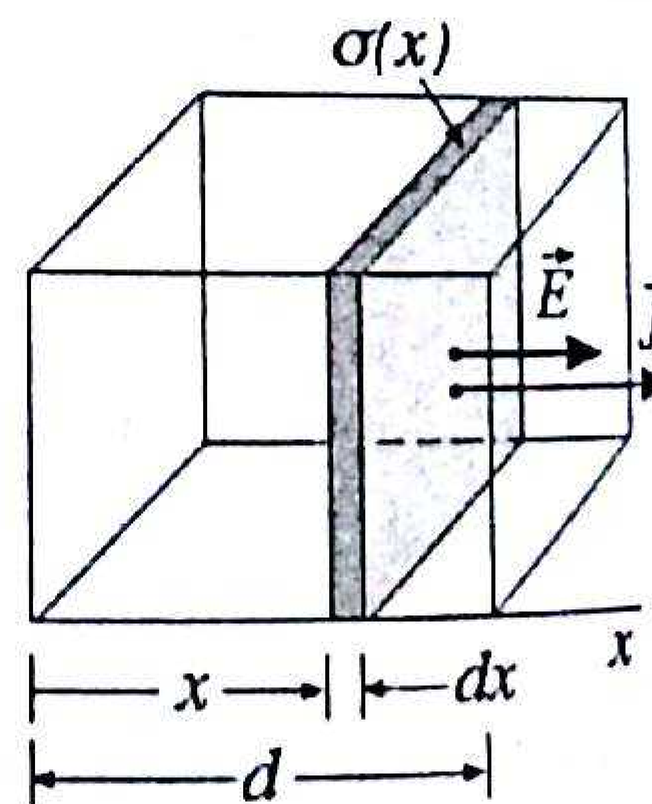
Entre dos placas metálicas planas existe un bloque de material de área A y espesor d, cuya conductividad eléctrica varía uniformemente desde el valor σ_1 en una placa hasta el valor σ_2 en la otra placa. ¿Cuál es la resistencia del bloque medida entre las dos placas?



Solución: Consideremos una tajada delgada de material de espesor dx ubicada a una distancia x de una de las placas. La conductividad de la tajada en función de x:

$$\sigma(x) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}$$

La densidad de corriente es $\bar{J} = \sigma(x)\bar{E}$; queda en la dirección del eje x del campo $\bar{E}$ y es igual a la corriente, I, dividida entre el área A. Por lo tanto, el campo eléctrico es:



$$E(x) = \frac{J}{\sigma(x)} = \frac{I}{A[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}]}$$

La diferencia de potencial entre las placas es:

$$\Delta V = \int_0^d E dx = \frac{I}{A}\int_0^d \frac{dx}{A[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}]}$$

$$\Delta V = \frac{I}{A}(\frac{d}{\sigma_2 - \sigma_1})\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{du}{u} = \frac{I}{A}(\frac{d}{\sigma_2 - \sigma_1})\ln u\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2}$$

Siendo $u = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)x/d$. Integrando, se obtiene:

$$\Delta V = \frac{Id}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})$$

Finalmente, la resistencia es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{d}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})$$

Respuesta:

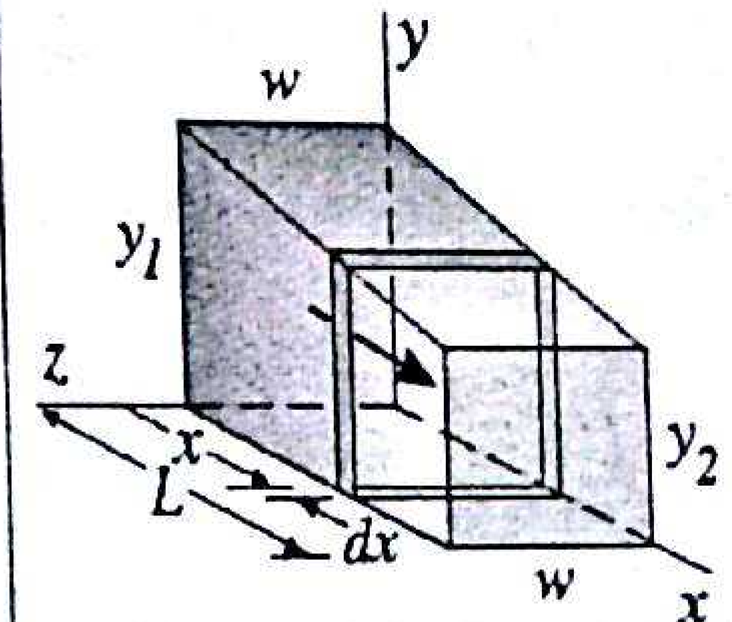
$$R = \frac{d}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})$$

PR-6.16. *Resistencia de un bloque en forma de cuña*

Un bloque de material de resistividad uniforme ρ tiene forma de cuña, de largo L y ancho constante w, pero su altura disminuye desde y_1 en una cara hasta una altura y_2 en la cara opuesta. Si se aplica un voltaje entre estas dos caras, determine la resistencia del bloque.

Solución: Consideremos una tajada delgada de material de espesor dx ubicada a una distancia x de la primera cara, con ancho w y altura y. La resistencia de la tajada en función de x es:

$$dR = \rho\frac{dx}{A} = \rho\frac{dx}{yw}$$



Siendo: $y = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{L}x$

Las tajadas están en serie, de modo que la resistencia total es:

$$R = \int_0^L \rho\frac{dx}{yw} = \frac{\rho}{w}\int_0^L \frac{dx}{y_1 - \frac{y_1 - y_2}{L}x}$$

Cambiando de variable: $u = y_1 - (y_1 - y_2)x/L$

$$R = \frac{\rho}{w}\left(-\frac{L}{y_1 - y_2}\right)\int_{y_1}^{y_2}\frac{du}{u} = \frac{\rho}{w}\left(-\frac{L}{y_1 - y_2}\ln u\right)\Big|_{y_1}^{y_2}$$

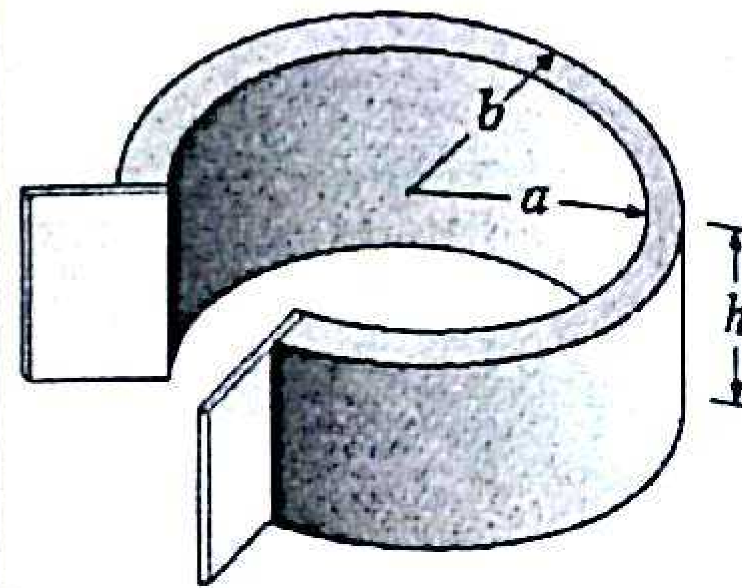
$$R = \frac{\rho L}{w(y_1 - y_2)}\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

Respuesta:

$$R = \frac{\rho L}{w(y_1 - y_2)}\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

PR-6.17. *Resistencia de tres cuartos de toroide.*

Un material de resistividad ρ tiene forma de toroide de sección rectangular constante de radios a y b y altura h. El toroide tiene un corte de 90° y sus caras planas se conectan a placas metálicas que sirven de electrodos. ¿Cuál es la resistencia de la cinta medid entre las dos placas?



Solución: Si se aplica un voltaje V entre los electrodos, se establece un campo eléctrico cuyas líneas de campo son tangentes a circunferencias. En los puntos de una circunferencia de radio r, la densidad de corriente es:

$$J(r) = \sigma E = \frac{1}{\rho}E = \frac{1}{\rho}\left(\frac{V}{\frac{3}{4}2\pi r}\right) = \frac{2}{3}\frac{V}{\rho\pi r}$$

Si escogemos una concha cilíndrica de espesor dr y altura h la corriente que atraviesa el área $dA = hdr$, es:

$$di = JdA = \frac{2}{3}\frac{V}{\rho\pi r}hdr$$

La corriente total que circula por la cinta es:

$$i = \int di = \int_a^b \frac{2}{3}\frac{V}{\rho\pi r}hdr = \frac{2}{3}\frac{Vh}{\rho\pi}\ln r\Big|_a^b = \frac{2}{3}\frac{Vh}{\rho\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Por lo tanto, la resistencia total de la cinta es:

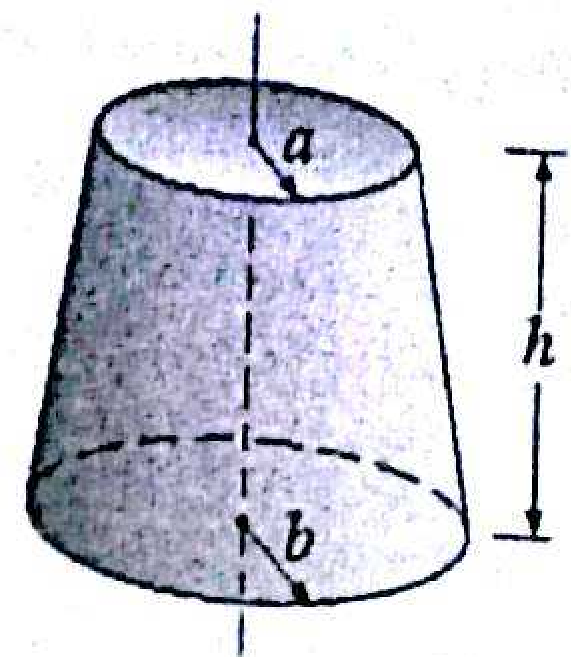
$$R = \frac{V}{i} = \frac{3}{2}\frac{\rho\pi}{h\ln(b/a)}$$

Respuesta:

$$R = \frac{3}{2}\frac{\rho\pi}{h\ln(b/a)}$$

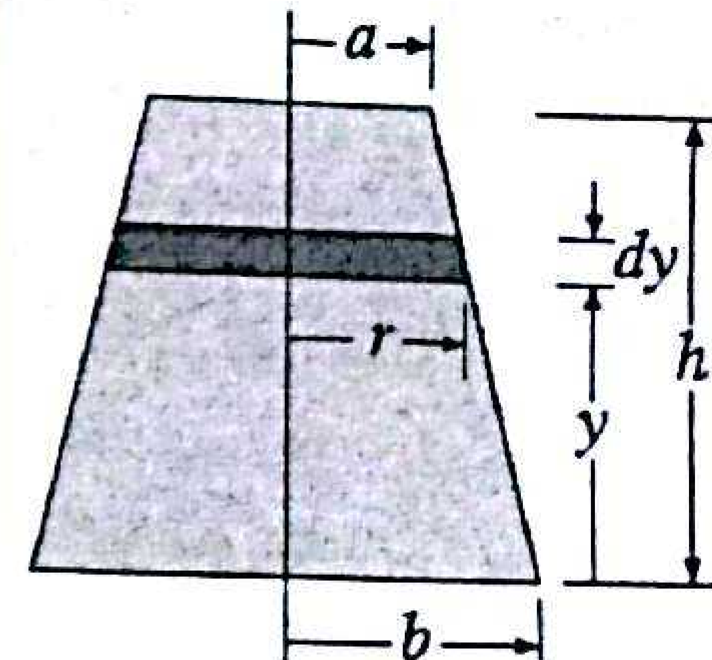
PR-6.18. *Resistencia de un cono truncado*

A un material de resistividad ρ se le da la forma de un cono truncado de altura h, y con radio b en su base y radio a en el extremo superior. Si se aplica una diferencia de potencial entre las tapas planas, halle la resistencia eléctrica.



Solución: Suponga que los radios a y b son ligeramente diferentes, para considerar que el campo eléctrico es uniforme y normal a cualquier sección circular del cono. Consideramos un disco de radio r, ubicado a la altura y. La relación entre y y r es:

$$\frac{(b-r)}{y} = \frac{(b-a)}{h} \quad \Rightarrow \quad r = b - (b-a)\frac{y}{h}$$



El disco tiene área (πr^2) y espesor dy, por lo tanto la resistencia entre sus caras planas será:

$$dR = \rho\frac{dy}{\pi r^2} = \frac{\rho dy}{\pi[b-(b-a)\frac{y}{h}]^2}$$

Considerando que el cono está constituido por la serie de estas tajadas conectadas en serie, la resistencia total será:

$$R = \int_0^h \frac{\rho dy}{\pi[b-(b-a)\frac{y}{h}]^2} = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\int_b^a \frac{du}{u^2}$$

Integrando por la nueva variable: $u = b - (b-a)y/h$:

$$R = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_b^a = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$R = \frac{\rho h}{\pi(b-a)}\frac{(b-a)}{ab} = \frac{\rho h}{\pi ab}$$

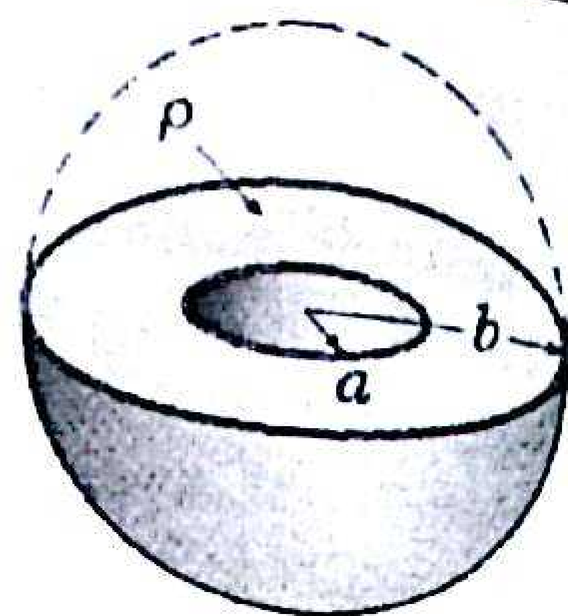
Observe que en el caso particular en que $a = b$, esta expresión se reduce a: $R = \rho h/\pi a^2$, la cual corresponde a la resistencia de un conductor de sección transversal circular constante.

Respuesta:

$$R = \frac{\rho h}{\pi ab}$$

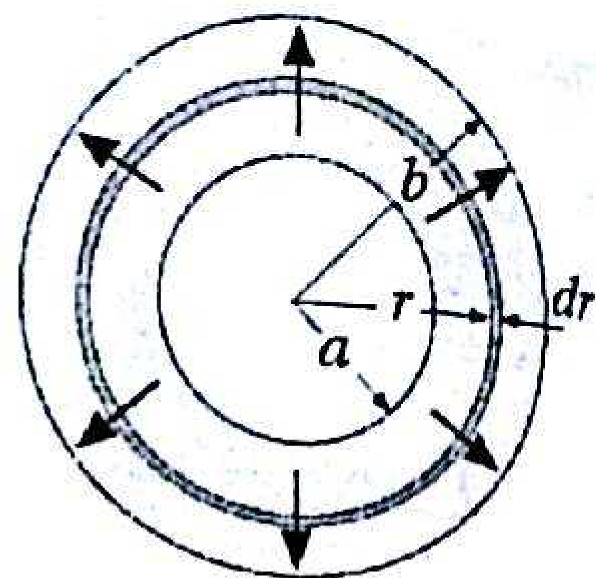
PR-6.19. *Resistencia de una concha esférica*

Determine la resistencia que ofrece al paso de la corriente radial, un material de resistividad ρ colocado entre dos cascarones metálicos esféricos de radios a y b.



Solución: Para determinar la resistencia, consideramos como elemento infinitesimal, un cascarón esférico del material de radio r, espesor dr y área $4\pi r^2$. La resistencia de este elemento es:

$$dR = \rho(\frac{longitud}{Area}) = \rho(\frac{dr}{4\pi r^2})$$



De modo que para una sucesión de conchas en serie desde $r = a$ hasta $r = b$, la resistencia total será:

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}(-\frac{1}{r})\Big|_a^b$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{\rho}{4\pi}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = \frac{\rho}{4\pi}(\frac{b-a}{ab})$$

Respuesta:

$$R = \frac{\rho}{4\pi}(\frac{b-a}{ab})$$

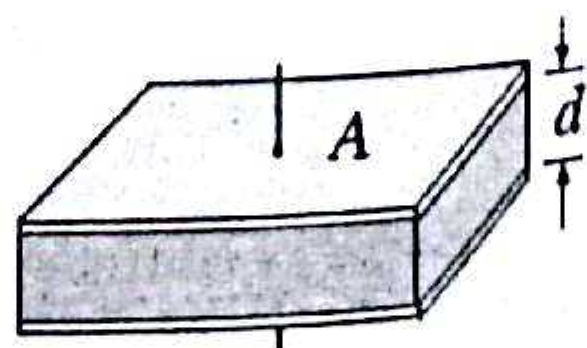
PR-6.20. *Una conexión geométrica entre R y C*

Existe una relación entre la resistencia R de un material de resistividad ρ, que ocupa el espacio entre dos electrodos de forma arbitraria, y la capacitancia C que existiría entre los mismos electrodos si sustituimos el conductor por un material dieléctrico de constante dieléctrica κ. La relación es sencilla: $RC = \varepsilon_0\kappa\rho$

Verifique que esta relación se cumple para los siguientes casos:
a) Placas paralelas
b) Cilindros concéntricos
c) Esferas concéntricas.

Solución: a) *Placas paralelas*: La resistencia de un bloque conductor de resistividad ρ, espesor d y área A, es: $R = \rho(d/A)$. Para un condensador de placas paralelas de área A, con un dieléctrico de espesor d y constante dieléctrica κ, la capacitancia de es: $C = \kappa\varepsilon_0 A/d$. Por lo tanto, el producto RC será:

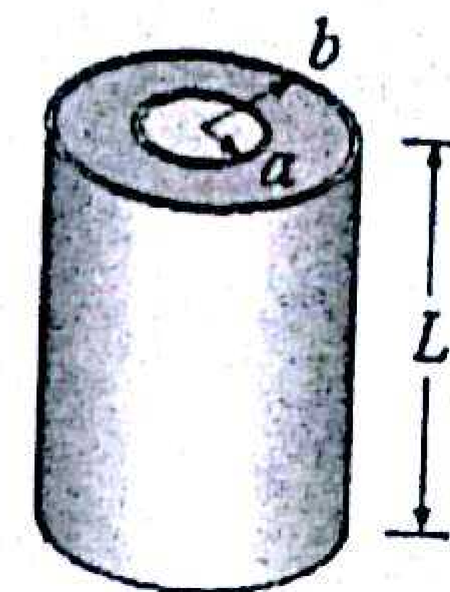
$$RC = (\frac{\rho d}{A})(\kappa\frac{\varepsilon_0 A}{d}) = \varepsilon_0\kappa\rho$$



a) *Placas paralelas*

b) *Cilindros concéntricos*: La resistencia de un tubo cilíndrico hueco de resistividad ρ, longitud L y radios a y b es: $R = [\rho \ln(b/a)]/2\pi L$. Para un condensador cilíndrico con un dieléctrico de constante κ, longitud L y radios a y b, la capacitancia es: $C = 2\pi\varepsilon_0\kappa L/\ln(b/a)$. Por lo tanto, el producto RC será:

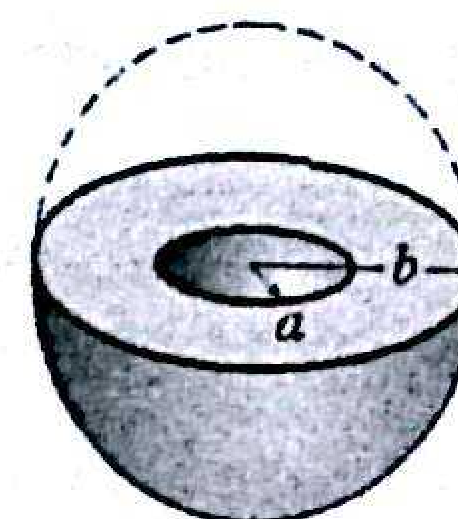
$$RC = [\frac{\rho}{2\pi L}\ln(b/a)][\frac{2\pi\varepsilon_0\kappa L}{\ln(b/a)}] = \varepsilon_0\kappa\rho$$



b) *Cilíndrico*

c) *Esferas concéntricas*: La resistencia de un conductor de resistividad ρ que ocupa el espacio entre dos esferas metálicas concéntricas de radios a y b es: $R = (\rho/4\pi)[(b-a)/ab]$. Para un condensador esférico de radios a y b con un dieléctrico de constante κ, la capacitancia es: $C = 4\pi\varepsilon_0\kappa[ab/(b-a)]$. Por lo tanto, el producto RC será:

$$RC = [\frac{\rho}{4\pi}(\frac{b-a}{ab})][4\pi\varepsilon_0\kappa(\frac{ab}{b-a})] = \varepsilon_0\kappa\rho$$



c) *Esférico*

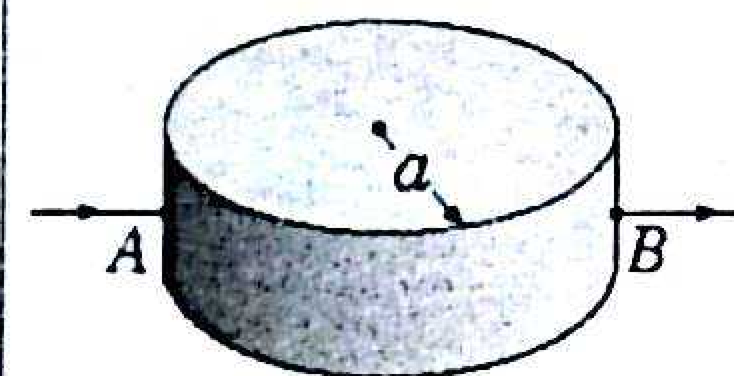
En conclusión, para las tres geometrías: placas paralelas, cilíndricas y esféricas, se verifica la misma relación entre R y C.

Respuesta:

$$RC = \varepsilon_0\kappa\rho$$

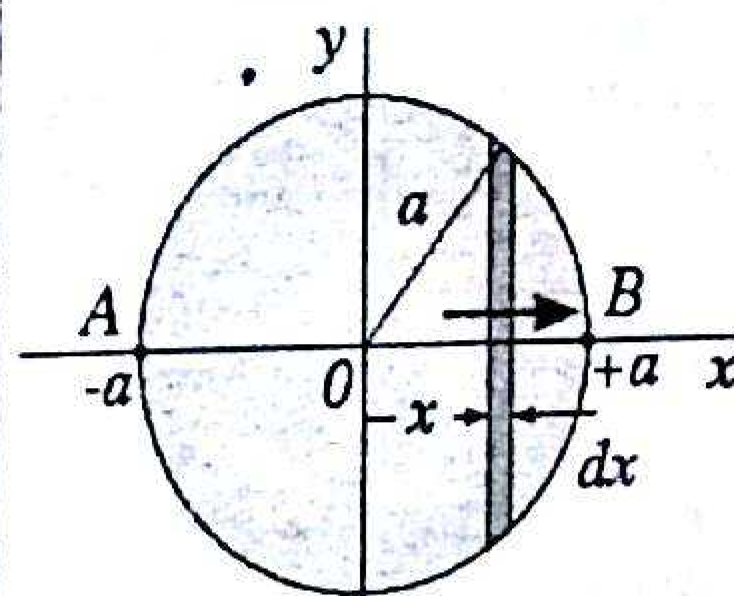
PE-6.21. *Resistencia lateral de un disco cilíndrico*

Un disco cilíndrico de radio a y altura h está hecho de un material de resistividad ρ. Halle una expresión aproximada para la resistencia medida entre dos puntos A y B diametralmente opuestos.



Solución: Cuando se aplica una diferencia de potencial entre A y B, se establece un campo eléctrico cuyas líneas de campo divergen de A y convergen en B.
Vamos a hacer una simplificación al suponer que las líneas de campo son paralelas al eje x. Si dividimos el disco en tajadas delgadas de espesor dx, altura h y ancho $2\sqrt{a^2 - x^2}$, sus caras se podrían considerar equipotenciales y la resistencia elemental de una tajada sería:

$$dR = \rho\frac{dx}{A} = \rho\frac{dx}{2h\sqrt{a^2 - x^2}}$$



Las tajadas está en serie y la resistencia total desde $x = -a$ hasta $x = +a$ es:

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2h}\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\rho}{2h} arcsen\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{+a}$$

$$R = \frac{\rho}{2h}[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = \frac{\rho\pi}{2h}$$

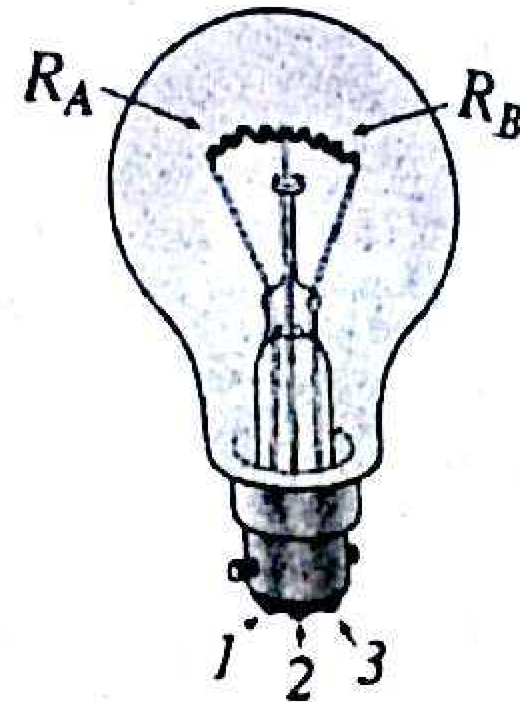
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsen\frac{x}{a}$$

Respuesta:

Resistencia: $R = \frac{\rho\pi}{2h}$ No depende del radio a

PE-6.22. *Cuatro brillos distintos con un solo bombillo.*

Un bombillo de tres vías tiene dos filamentos de tungsteno, de resistencias respectivas, $R_A = 48\ \Omega$ y $R_B = 144\ \Omega$; que están conectados a tres terminales. Mediante interruptores externos (no mostrados) se pueden seleccionar pares de terminales y conectarlos a la red de 120 voltios, para obtener diferentes iluminaciones. ¿Cuáles son los valores de las potencias que pueden ser obtenidos?



Solución: Para obtener diferentes valores de potencia, podemos formar cuatro combinaciones de resistencias:

a) *Solo* $R_A = 48\ \Omega$: La potencia del bombillo es:

$$P_a = \frac{V^2}{R_A} = \frac{(120v)^2}{48\Omega} = 300W$$

b) Solo $R_B = 144\ \Omega$: La potencia del bombillo es:

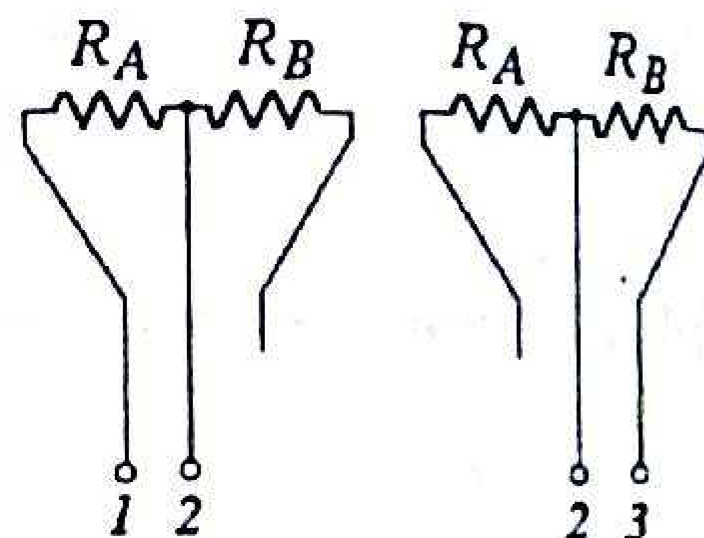
$$P_b = \frac{V^2}{R_A} = \frac{(120v)^2}{144\Omega} = 100W$$

c) En serie R_A con R_B. La resistencia equivalente es igual a $R_s = 48\Omega + 144\Omega = 192\ \Omega$. La potencia es:

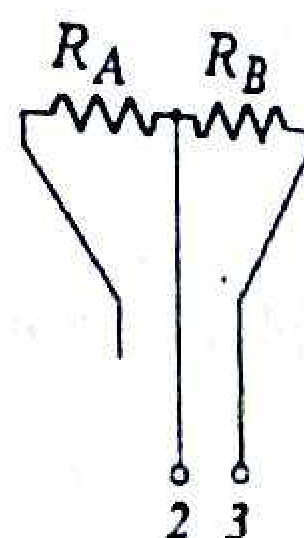
$$P_c = \frac{V^2}{R_s} = \frac{(120v)^2}{192\Omega} = 75W$$

d) En paralelo R_A con R_B. La resistencia equivalente es igual a $R_p = (48x144)(48+144\ ) = 36\Omega$. La potencia:

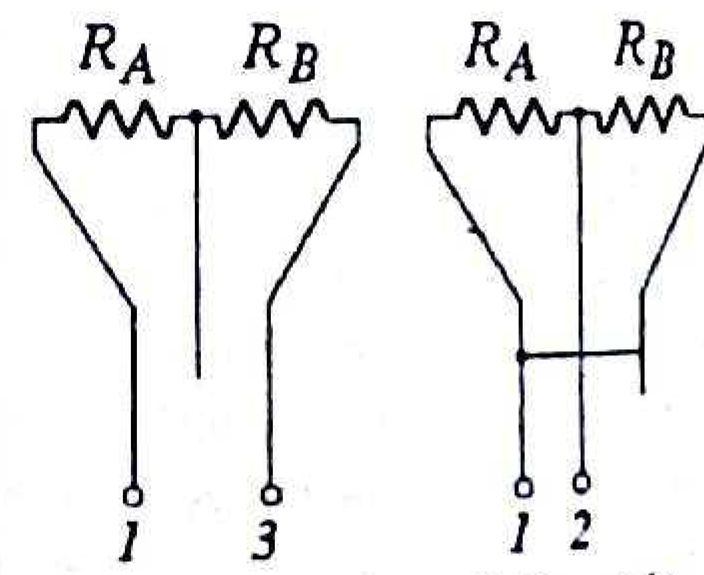
$$P_d = \frac{V^2}{R_p} = \frac{(120v)^2}{36\Omega} = 400W$$



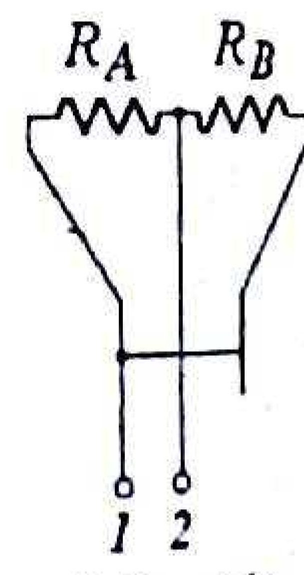
a) Solo R_A



b) Solo R_B



c) Serie,



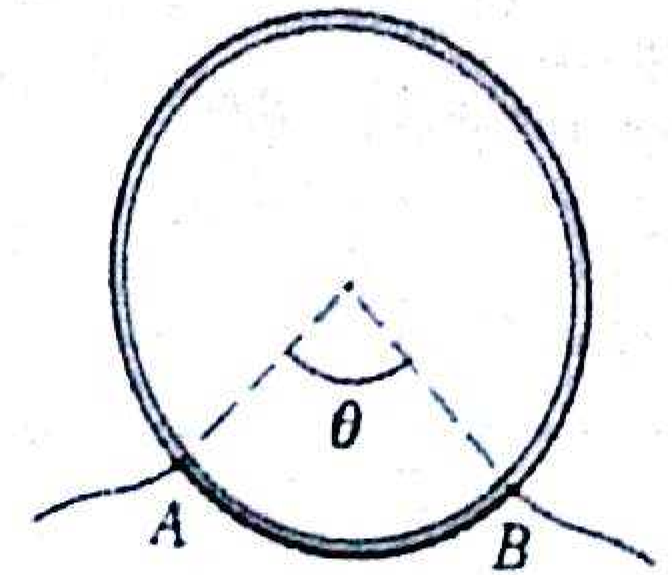
d) Paralelo

Respuesta:

$P_a = 300$ W, $P_b = 100$W, $P_c = 75$ W y $P_d = 400$W

PR-6.23. *Aro dividido en dos secciones*

Los extremos de un alambre uniforme de resistencia total R se unen formando una circunferencia. Si consideramos dos puntos A y B a lo largo de la circunferencia, como se muestra en la figura. Halle la resistencia equivalente entre A y B y demuestre que esta no depende del radio de la circunferencia.



Solución: La resistencia de cada una de las secciones del alambre es proporcional al ángulo que abarca.

$$R_1 = \frac{\theta}{2\pi}R \qquad R_2 = \frac{2\pi - \theta}{2\pi}R$$

Las dos secciones del alambre están en paralelo, por lo tanto:

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(\frac{\theta}{2\pi}R)(\frac{2\pi - \theta}{2\pi}R)}{(\frac{\theta}{2\pi}R) + (\frac{2\pi - \theta}{2\pi}R)}$$

$$R_{AB} = \frac{\theta(2\pi - \theta)}{4\pi^2}R$$

Vemos que la resistencia medida entre los terminales A y B es independiente del radio de la circunferencia

Respuesta:

$R_{AB} = \frac{\theta(2\pi - \theta)}{4\pi^2}R$

PR-6.24. *Tetera eléctrica con cuatro opciones*

Una tetera eléctrica para hervir agua, tiene dos resistencias con un interruptor (no mostrado) que permite seleccionar cuatro distintas potencias de calentamiento. Cuando se conecta una sola resistencia a la red eléctrica, se observa que cierta cantidad de agua hierve en 15 minutos. Cuando se conecta la otra resistencia sola, se observa que la misma cantidad de agua tarda 30 minutos en hervir. ¿Cuánto tiempo tardará en hervir la misma cantidad de agua cuando se conectan las dos resistencias: a) En serie, b) En paralelo?

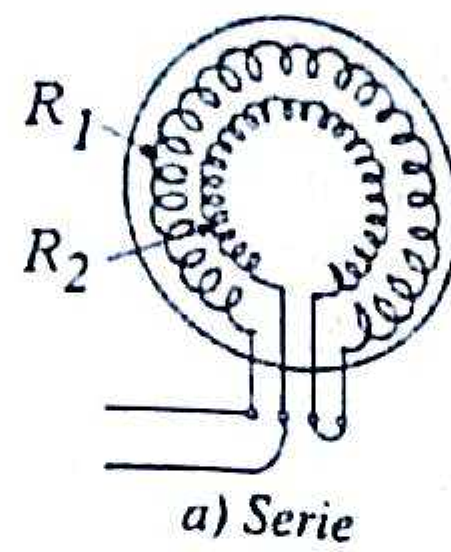


Solución: La potencia es la energía térmica desarrollada por unidad de tiempo ($P = \Delta E / \Delta t$). Por otro lado, la potencia eléctrica suministrada por la fuente es: $P = V^2/R$. Igualando estas dos expresiones, podemos despejar el tiempo: $\Delta t = R\Delta E / V^2$

a) *Conexión Serie:* Cuando las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en serie, el tiempo de calentamiento es:

$$\Delta t_s = \frac{\Delta E}{V^2}(R_1 + R_2) = \frac{\Delta E}{V^2}R_1 + \frac{\Delta E}{V^2}R_2$$

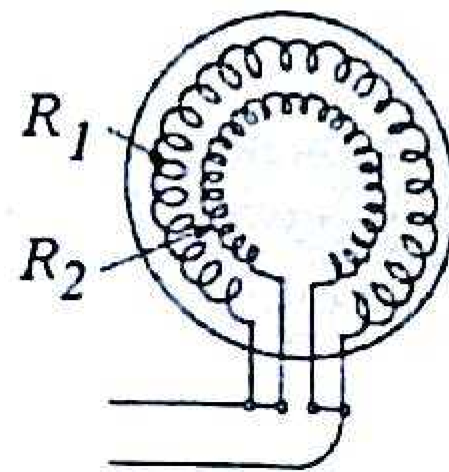
$$\Delta t_s = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 15 \text{ min} + 30 \text{ min} = 45 \text{ min}$$



a) Serie

a) *Conexión Paralelo:* Cuando las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo, el tiempo de calentamiento es:

$$\Delta t_p = \frac{\Delta E}{V^2}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{\Delta E}{V^2}\frac{(V^2\Delta t_1/\Delta E)(V^2\Delta t_2/\Delta E)}{(V^2\Delta t_1/\Delta E)+(V^2\Delta t_2/\Delta E)}$$



b) Paralelo

Simplificando esta expresión, obtenemos el tiempo que tarda en hervir el agua cuando R_1 y R_2 están en paralelo:

$$\Delta t_p = \frac{\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{(15\,min)(30\,min)}{15\,min + 30\,min} = 10 \text{ min}$$

Respuesta:

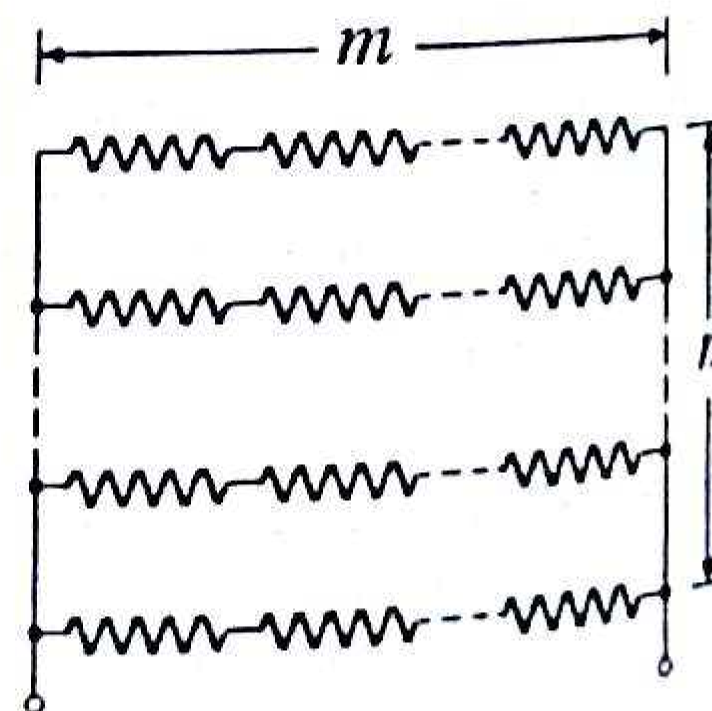
Serie: $\Delta t_s = 45$ min
Paralelo: $\Delta t_p = 10$ min

PR-6.25. *Combinación de resistores que resisten*

Se dispone de un cierto número de resistores de valor R, cada uno de los cuales puede disipar una potencia máxima P. Se desea obtener una combinación de estos resistores que tenga una resistencia equivalente igual a R y sea capaz de disipar al menos una potencia de $5P$ sin quemarse. ¿Cuál sería el número mínimo de resistores a combinar?

Solución: Si formamos grupos de m resistores de valor R en serie, la resistencia de cada grupo será mR. Si ahora conectamos n de estos grupos en paralelo, la resistencia total de la combinación serie-paralelo viene dada por:

$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{mR} + \frac{1}{mR} + \ldots + \frac{1}{mR} = \frac{n}{mR} \quad \Rightarrow \quad R_{total} = \frac{m}{n}R$$



Como se desea que R_{total} sea igual a R, debemos escoger $n = m$. Tenemos así, una red de n^2 resistores, por cada uno de los cuales pasa igual corriente y disipan igual potencia P.

La potencia máxima total que puede ser disipada es:

$$P_{total} = n^2 P, \quad \text{y} \quad P_{total} \geq 5P$$

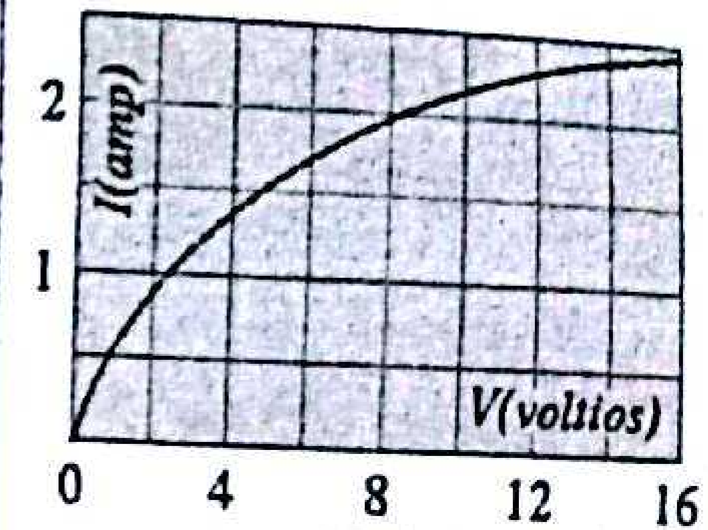
Por lo tanto, $n^2 \geq 5$. Como n debe ser un número entero, el menor número posible es $n = 3$. En conclusión, se requieren $3^2 = 9$ resistores.

Respuesta:

9 resistores

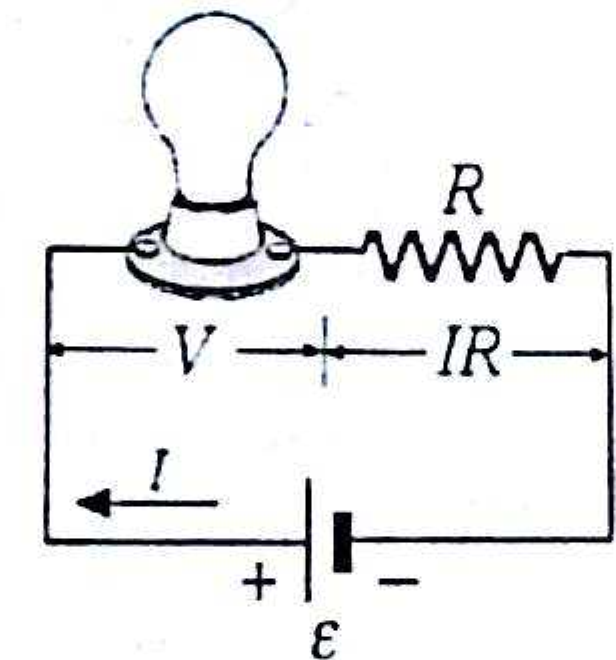
PR-6.26. *Curva característica de un bombillo*

La figura muestra la curva característica típica de un bombillo incandescente, es decir, la dependencia de la corriente (en amperes) con el voltaje aplicado (en voltios). Suponga que este bombillo se conecta en serie con una resistencia de 4,8 Ω a una batería ideal de 12 voltios.
a) ¿Cuál será el valor de la corriente en el bombillo?
b) ¿Cuál será la potencia del bombillo?



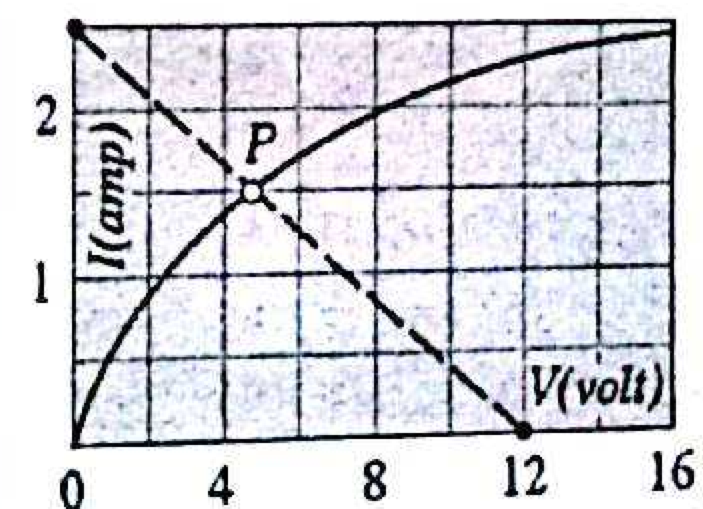
Solución: a) Cuando circula una corriente I en el circuito serie, el voltaje ε de la batería es la suma del voltaje V aplicado al bombillo mas la caída de voltaje IR en la resistencia:

$$\varepsilon = V + IR \quad \Rightarrow \quad V = \varepsilon - IR$$



La función $V(I)$ representa la ecuación de una recta, cuyos puntos de corte con los ejes del gráfico V vs I se obtienen usando los valores numéricos dados de ε y de R. En este caso, para $I = 0$ tenemos $V = \varepsilon = 12$ voltios, mientras que para $V = 0$, tenemos $I = \varepsilon / R = 12\text{v}/4{,}8\Omega = 2{,}5\text{A}$. La recta así obtenida debe ser compatible con los valores de la curva característica del bombillo. Por lo tanto, la intersección de la recta con la curva dada, permite establecer el punto P de operación. En el gráfico podemos estimar que este punto corresponde a una corriente y a un voltaje de, aproximadamente:

$$I = 1{,}5 \text{ A} \qquad V = 4{,}8 \text{ v}$$



b) La potencia de operación del bombillo es:

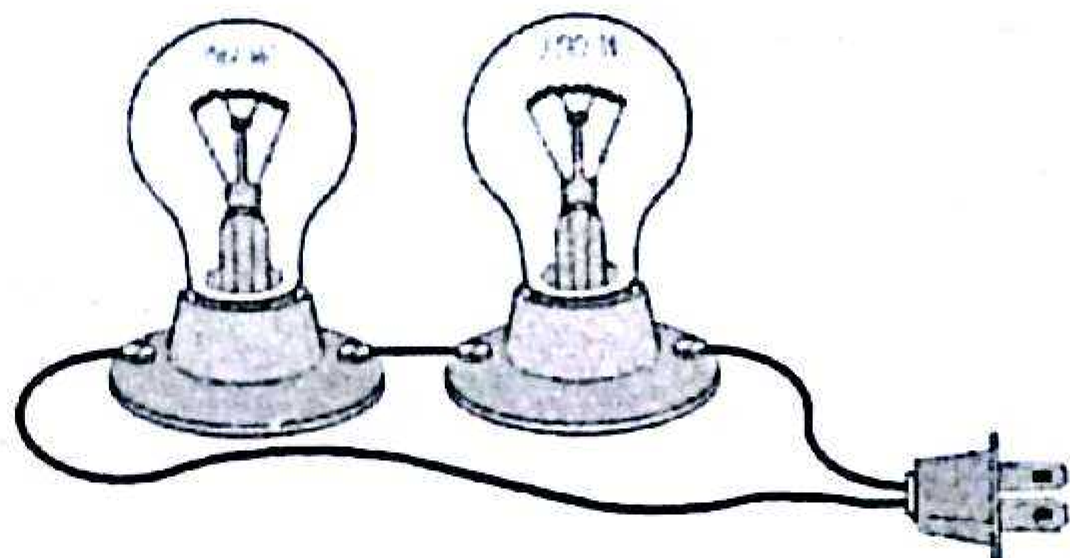
$$P = VI = (4{,}8 \text{ v})(1{,}5 \text{ A}) = 7{,}2 \text{ W}$$

Respuesta:

a) $I = 1{,}5$ A.
b) $P = 7{,}2$ W.

PR-6.27. *Increíble: ¡ Un bombillo de 60 watts brillando mas que uno de 100 watts!*

a) Calcule la resistencia de un bombillo de 60 W que se conecta a la línea de 120 v. Calcule la resistencia de un bombillo de 100 W que se conecta a la línea de 120 v.



b) Un estudiante, después de hacer unos arreglos en la instalación eléctrica de su casa, al pasar el interruptor queda sorprendido por que el bombillo de 100 W brilla menos que el de 60 W. El error cometido fue no haber hecho la conexión de los bombillos en paralelo a la línea de 120 v, sino *en serie*. Verifícalo, calculando la potencia con que brilla cada bombillo conectados en serie.

Solución: a) Las resistencias de los bombillos se obtienen de la expresión para la potencia, $P = V^2/R$:

$$R_{60} = \frac{V^2}{P_{60}} = \frac{(120v)^2}{60W} = 240\Omega$$

$$R_{100} = \frac{V^2}{P_{100}} = \frac{(120v)^2}{100W} = 144\Omega$$

b) La resistencia equivalente del circuito de los dos bombillos conectados en serie, es $(R_1 + R_2)$ y la corriente:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{120v}{240\Omega + 144\Omega} = \frac{120v}{384\Omega} = 0{,}313A$$

La potencia de cada bombillo es:

$$P_{60} = I^2 R_{60} = (0{,}313A)^2 (240\Omega) = 23{,}5W$$

$$P_{100} = I^2 R_{100} = (0{,}313A)^2 (144\Omega) = 14{,}1W$$

Las potencias desarrolladas por los bombillos resultan mucho menores que las especificadas por el fabricante. El bombillo de 60 W brilla mas que el bombillo de 100 W. De hecho si haces el experimento, notarás que el bombillo de 100 W apenas se nota su brillo con un rojo tenue.

Respuesta:

a) $R_{60} = 240\Omega$, $R_{100} = 144\Omega$
b) $P_{60} = 23{,}5W$, $P_{100} = 14{,}1W$

PR-6.28. *Un bombillo de mas potencia brillando menos*

En realidad, debido al calentamiento el filamento de un bombillo no es un conductor óhmico y la corriente no es proporcional al voltaje aplicado, como hemos supuesto en el problema anterior. Vamos a suponer que la corriente sea proporcional a la raíz cuadrada del voltaje aplicado:

$$I = kV^{1/2}$$

Donde k es una constante característica del bombillo.

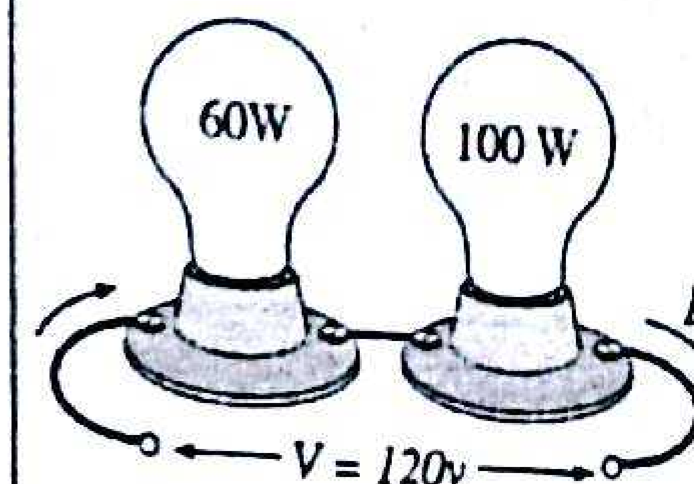
Si dos bombillos, uno de 60W y el otro de 100W se conectan en serie a la red de 120V.
a) Calcule la corriente I.
b) Calcule la potencia en cada bombillo y demuestre que igual que en el problema anterior, el de 60W brilla mas que el de 100W.

Solución: a) A partir de la relación entre potencia y corriente, se obtiene:

$$P = VI = V(kV^{1/2}) = kV^{3/2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{V^{3/2}}$$

La constante k para cada bombillo se obtiene de los valores que especifica el fabricante: (60W / 120V) y (100W / 120V):

$$k_{60} = \frac{60}{120^{3/2}} = 0{,}0456 \qquad k_{100} = \frac{100}{120^{3/2}} = 0{,}0761$$



El voltaje total aplicado es la suma de los voltajes:

$$V = V_{60} + V_{100} = \left(\frac{I}{k_{60}}\right)^2 + \left(\frac{I}{k_{100}}\right)^2$$

$$V = I^2\left(\frac{1}{0{,}0456^2} + \frac{1}{0{,}0761^2}\right) = I^2 654$$

La corriente del circuito es:

$$I = \sqrt{\frac{V}{654}} = \sqrt{\frac{120}{654}} = 0{,}428A$$

b) Los voltajes individuales en cada bombillo son:

$$V_{60} = \left(\frac{I}{k_{60}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}428A}{0{,}0456}\right)^2 = 88{,}3V$$

$$V_{100} = \left(\frac{I}{k_{100}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}428A}{0{,}0761}\right)^2 = 31{,}6V$$

Las potencias respectivas de los bombillos son:

$$P_{60} = V_{60} I = (88{,}3V)(0{,}428A) = 37{,}8W$$

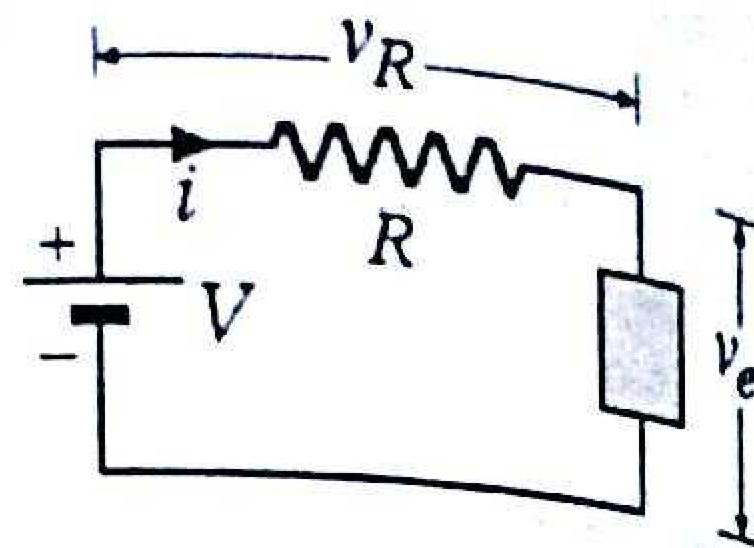
$$P_{100} = V_{100} I = (31{,}6V)(0{,}428A) = 13{,}5W$$

Respuesta:

a) $I = 0{,}428$ A.
b) $P_{60} = 37{,}8W$, $P_{100} = 13{,}5W$.
¡El de 60 W brilla más que el de 100 W!

PR-6.29. *Circuito con elemento no óhmico*

Un cierto dispositivo semiconductor se conecta a una fuente de voltaje $V = 11$ voltios, en serie con una no-resistencia $R = 6\ \Omega$. Se sabe que el elemento es no-óhmico y que el voltaje v_e, medido entre sus extremos, se relaciona con la corriente i según:



$$v_e = Ai + Bi^2$$

Donde las constantes son: $A = 4\ \Omega$ y $B = 1\ \Omega/\text{A}$.
a) Halle la corriente en el circuito.
b) Halle los voltajes en el elemento y en la resistencia.

Solución: a) El voltaje de la batería es la suma del voltaje en la resistencia v_R, y del voltaje en el elemento no óhmico, v_e.

$$V = v_R + v_e = iR + Ai + Bi^2 = (R + A)i + Bi^2$$

Sustituyendo los valores numéricos de R, A y B:

$$11 = (6+4)i + i^2 = 10i + i^2 \quad \Rightarrow \quad i^2 + 10i - 11 = 0$$

Las raíz (positiva) de la ecuación de segundo grado para i es:

$$i = \frac{-10 + \sqrt{100 + 44}}{2} = -5 + 6 \quad \Rightarrow \quad i = 1\ \text{A}$$

b) Los voltajes respectivos en la resistencia y en el elemento son:

$$v_R = iR = (1\text{A})(6\text{W}) = 6\text{v}$$

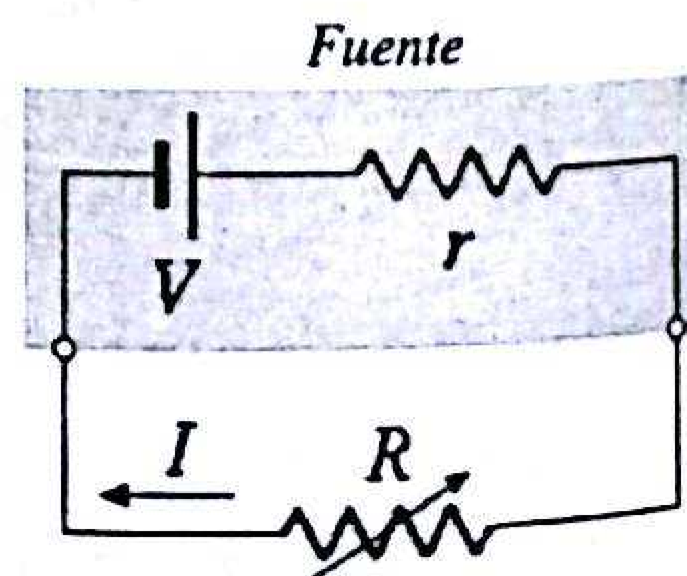
$$v_e = V - v_R = 11\text{v} - 6\text{v} = 5\text{v}$$

Respuesta:

a) $i = 1$ A.
b) $v_e = 5$ v, $v_R = 6$ v.

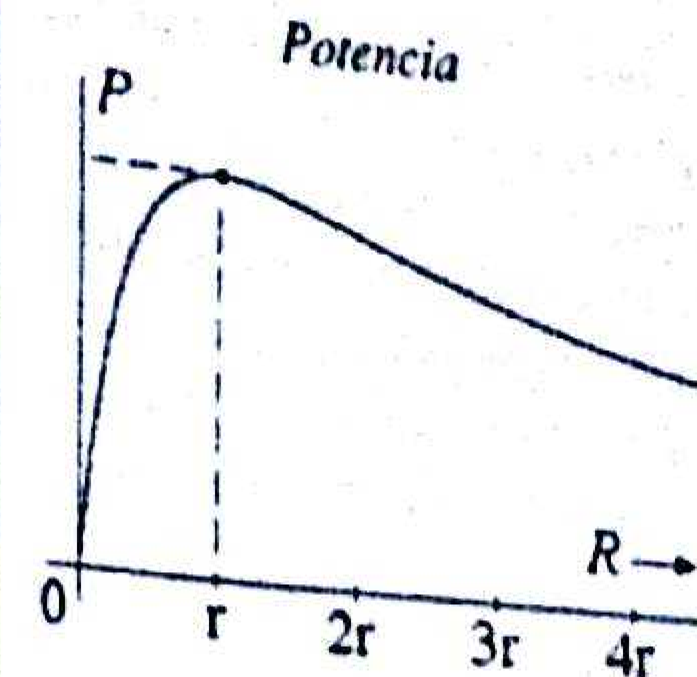
PR-6.30. *¿Cómo aprovechar la máxima la potencia?*

Una fuente cuya fem es V que tiene una resistencia interna r, alimenta un circuito externo de resistencia R.
a) Demuestre que la potencia suministrada por la fuente a la resistencia externa es *máxima* cuando $R = r$.
b) Determine la razón entre la potencia aprovechada en R y la potencia total suministrada por la fuente, es decir, la *eficiencia* a máxima potencia.



Solución: a) La corriente en el circuito de la batería en serie con las dos resistencias es: $I = V/(R + r)$ y la potencia suministrada a la resistencia externa R es:

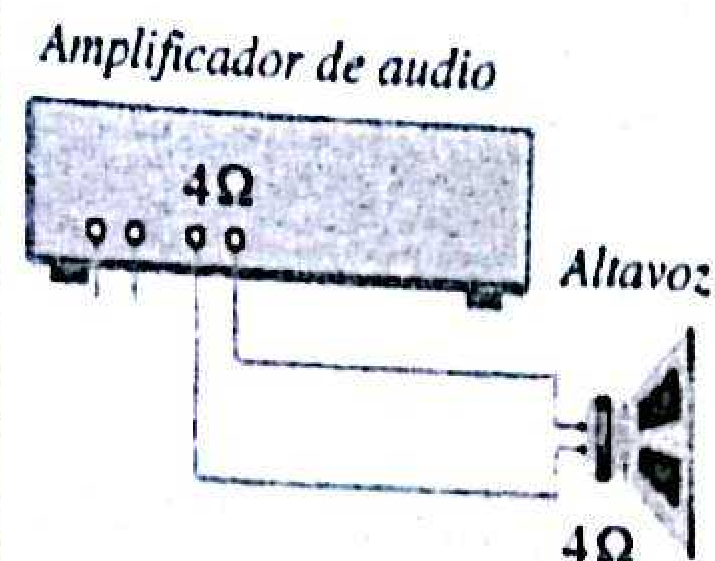
$$P_R = I^2 R = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$$



Se observa que la potencia tiende a cero ($P_R \to 0$), tanto para $R \to 0$ como para $R \to \infty$. La condición de un máximo de la potencia se cumple cuando su derivada respecto a R sea nula:

$$\frac{\partial P_R}{\partial R} = V^2 \left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3}\right] = V^2 \left[\frac{r-R}{(R+r)^3}\right] = 0$$

Por lo tanto, la condición es: $R = r$. Es decir, *la máxima transferencia de potencia a una resistencia ocurre cuando el valor de ésta es igual al de la fuente.* Se dice entonces que la fuente y la carga resistiva están acopladas. La condición de acoplamiento tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, las cornetas que se conectan a la salida de un amplificador de audio deben tener la impedancia apropiada (en este caso se habla de acoplamiento de impedancias, pues es un circuito de corriente alterna).

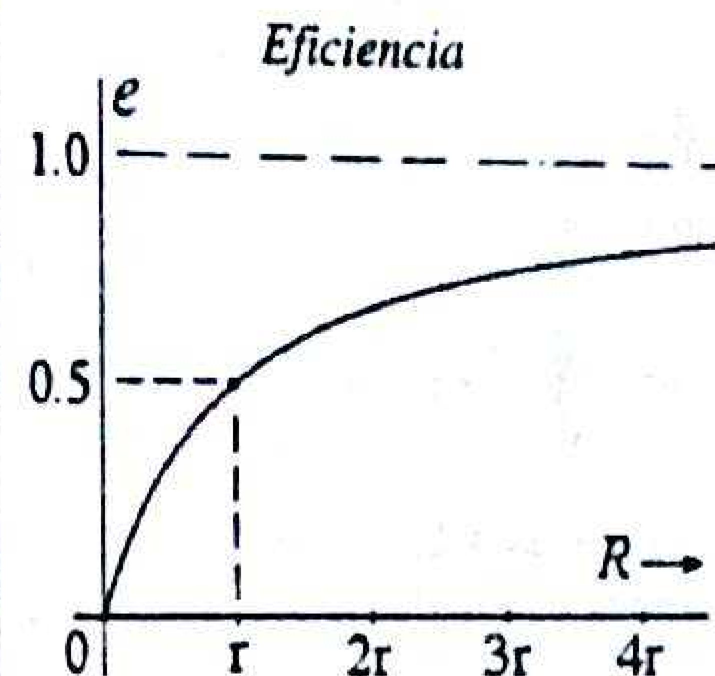


b) Cuando $R = r$, el valor de la potencia aprovechada en la resistencia externa es:

$$P_R = \frac{V^2 R}{(R+r)^2} = \frac{V^2 r}{(r+r)^2} = \frac{V^2}{4r}$$

La potencia total suministrada por la batería es:

$$P_{tot} = \frac{V^2}{R+r} = \frac{V^2}{r+r} = \frac{V^2}{2r}$$



La eficiencia es la relación entre la potencia aprovechada y la potencia suministrada:

$$e = \frac{P_R}{P_{tot}} = \frac{V^2/4r}{V^2/2r} = 0{,}5 \qquad \text{(50\% de eficiencia)}$$

Se observa que cuando $R = r$, es decir, cuando la potencia es máxima, la eficiencia es apenas del 50 %. Esto significa que la mitad de la potencia no es aprovechada y se desperdicia en la resistencia del generador. La eficiencia tiende al 100 % para $(R/r) \to \infty$.

Respuesta:

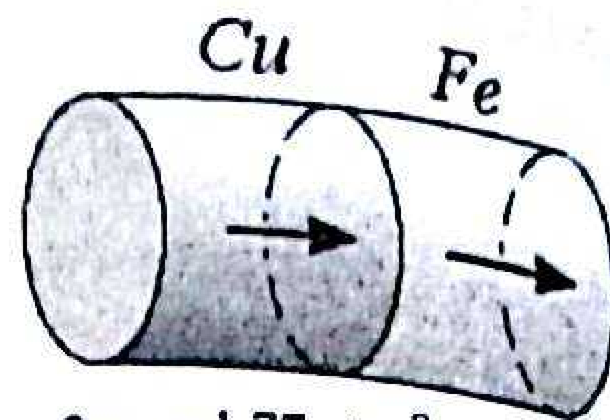
a) P_R máxima para $R = r$
b) Eficiencia: $e = 50\%$
(Máxima potencia con baja eficiencia)

PR-6.31. *En la unión de dos metales se acumula carga*

Considere dos alambres metálicos diferentes que están soldados extremo con extremo y por los cuales fluye una corriente I = 1A. Los dos alambres tienen igual diámetro, d = 1mm y diferentes resistividades (Cobre y Hierro).

a) Determine el campo eléctrico en cada metal.

b) Demuestre que en la unión de los dos metales se forma una densidad superficial de carga y determine su valor.



$\rho_{Cu} = 1{,}77\text{x}10^{-8}\ \Omega.\text{m}$

$\rho_{Fe} = 1{,}0\text{x}10^{-7}\ \Omega.\text{m}.$

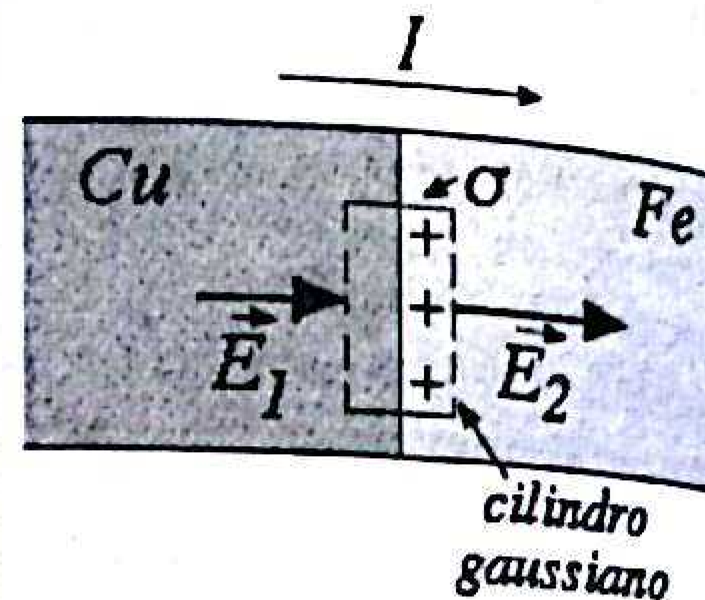
Solución: a) En la situación estacionaria la densidad de corriente es constante e igual en cada alambre:

$$J = \frac{I}{\pi(d/2)^2}$$

Además J está relacionada con el campo eléctrico: $E = J\rho$. Luego:

$$E_1 = \frac{4\rho_1 I}{\pi d^2} = \frac{4(1{,}77\text{x}10^{-8}\Omega.\text{m})(1\text{A})}{\pi(1{,}0\text{x}10^{-3}\text{m})^2} = 0{,}0225\text{V/m}$$

$$E_2 = \frac{4\rho_2 I}{\pi d^2} = \frac{4(1{,}0\text{x}10^{-7}\Omega.\text{m})(1\text{A})}{\pi(1{,}0\text{x}10^{-3}\text{m})^2} = 0{,}127\text{V/m}$$



b) Apliquemos la ley de Gauss a una superficie gaussiana en forma de cilindro de radio r, con tapas planas a cada lado de la unión de los alambres. Como $\vec{E}_1$ apunta hacia adentro de la superficie y $\vec{E}_2$ hacia afuera, el flujo del campo eléctrico es:

$$\Phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{A} = E_2(\pi r^2) - E_1(\pi r^2) = (E_2 - E_1)\pi r^2$$

De acuerdo a la ley de Gauss, el flujo debe ser igual a la carga neta encerrada, Q, dividida entre ε_0.

$$(E_2 - E_1)\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, *debe haber en la interfaz una densidad superficial de carga* $\sigma = Q/\pi r^2$, cuyo valor es:

$$\sigma = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \varepsilon_0(\rho_2 - \rho_1)J = \varepsilon_0(\rho_2 - \rho_1)\frac{4I}{\pi d^2}$$

$$\sigma = \frac{8{,}85\text{x}10^{-12}[(10 - 1{,}77)\text{x}10^{-8}]4(1)}{\pi(1\text{x}10^{-3})^2} = 9{,}27\text{x}10^{-13}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

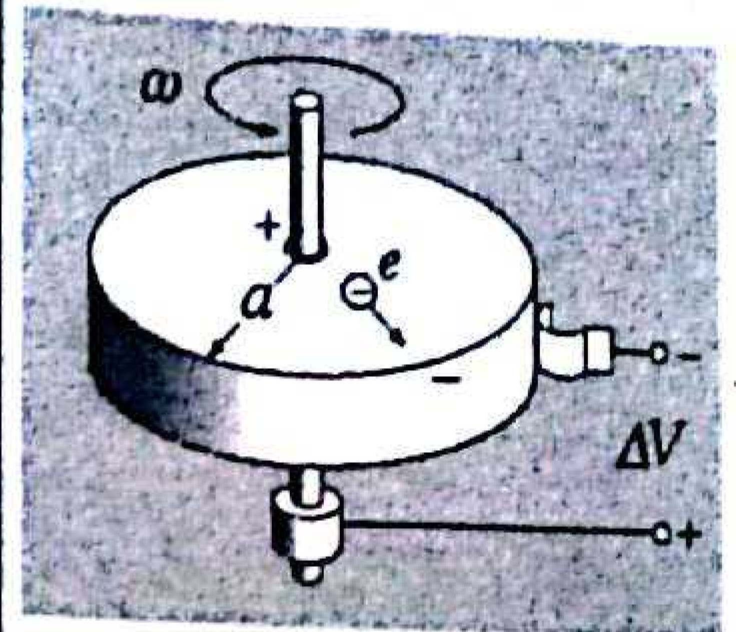
Respuesta:

a) $E_1 = 0{,}0225$ V/m
$E_2 = 0{,}127$ V/m.
b) $\sigma = 9{,}27\text{x}10^{-13}$ C/m²

PR-6.32. *Generando voltaje por bombeo centrífugo.*

Un disco metálico de radio a gira rápidamente en torno a su eje con velocidad angular, ω constante. Demuestre que, entre el eje y la superficie del cilindro se genera una diferencia de potencial y determine una expresión para esta diferencia de potencial en términos de la masa m y la carga e del electrón.

Solución: En el marco de referencia no inercial del disco girando, la fuerza centrífuga acelera los electrones libres del material hacia la periferia. Los electrones acumulados en la periferia generan un campo eléctrico radial $\vec{E}$ y el flujo de electrones adicionales cesa cuando la magnitud de eE es suficiente para equilibrar la fuerza centrífuga. Por lo tanto:



$$eE = m\omega^2 r \qquad\qquad E = \frac{m\omega^2 r}{e}$$

De aquí que la diferencia de potencial entre la periferia y el eje es:

$$V(a) - V(0) = -\int_0^a \vec{E}(r) \bullet d\vec{r} = -\int_0^a E_r dr = -\int_0^a \frac{m\omega^2 r}{e} dr$$

$$V(a) - V(0) = -\frac{m\omega^2}{e}\frac{r^2}{2}\bigg|_0^a = -\frac{m\omega^2 a^2}{2e}$$

El signo (-) significa que la periferia está a un potencial negativo con respecto al eje.

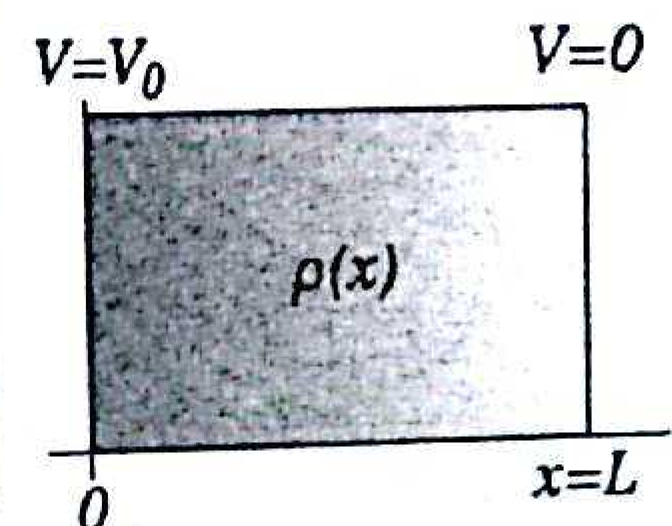
Respuesta:

$$\Delta V = \frac{m\omega^2 a^2}{2e}$$

PR-6.33. *Resistividad no uniforme en semiconductor*

Una barra delgada de un material semiconductor, de longitud L y área de sección transversal A, tiene una resistividad que varía según la expresión:

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-x/L}$$



Suponga que en el extremo $x = 0$ el potencial es V_o voltios y que en $x = L$ el potencial es cero.

a) Halle el potencial a lo largo de la barra en función de x.

b) Halle la resistencia total de la barra.

Solución: a) Como I es constante a lo largo de igual área, la densidad de corriente $J = I/A$, es constante. El campo eléctrico es:

$$E(x) = \rho(x)J = \frac{\rho_0 I}{A}e^{-x/L}$$

La diferencia de potencial es:

$$V(x) - V_0 = -\int_0^x E(x)dx = -\frac{\rho_0 I}{A}\int_0^x e^{-x/L}dx$$

$$V(x) - V_0 = -\frac{\rho_0 I}{A}(-e^{-u})\Big|_0^{x/L} = -\frac{\rho_0 IL}{A}(e^{-x/L} - 1)$$

Donde la constante se halla de la condición $V(L) = 0$.

$$V(L) = 0 = V_0 - \frac{\rho_0 IL}{A}(e^{-1} - 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0 IL}{A} = \frac{V_0}{(e^{-1} - 1)}$$

$$V(x) = V_0 - \frac{V_0}{(e^{-1} - 1)}(e^{-x/L} - 1) = V_0\left(\frac{e^{-x/L} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}\right)$$

b) Para determinar la resistencia escogemos un segmento diferencial de longitud dx e integramos:

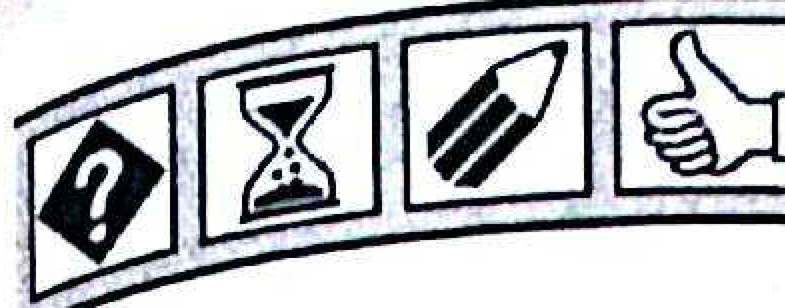
$$R = \int \frac{\rho dx}{A} = \int_0^L \frac{\rho_0 e^{-x/L}dx}{A} = -\frac{\rho_0 L}{A}e^{-u}\Big|_0^1$$

$$R = \frac{\rho_0 L}{A}(1 - e^{-1})$$

Respuesta:

a) $V(x) = V_0\left(\frac{e^{-x/L} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}\right)$

b) $R = \frac{\rho_0 L}{A}(1 - e^{-1})$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-6.01. ***La ley de Ohm establece que....***

a) $V = IR$

b) La resistencia es proporcional al voltaje aplicado.

d) La resistencia es inversamente proporcional a la corriente.

c) La relación $V = IR$ sólo es válida en los llamados materiales óhmicos.

e) En ciertos materiales la resistencia eléctrica, $R = V/I$ es constante, independientemente del voltaje aplicado.

PE-6.02. ***¿En cuál caso circula mayor carga neta?***

Los gráficos de la derecha representan la corriente que pasa por una sección de un conductor en función del tiempo, para cuatro casos diferentes. Si comparamos la *carga neta* que pasa por dicha sección en el intervalo de tiempo considerado, en cada caso podemos concluir que:

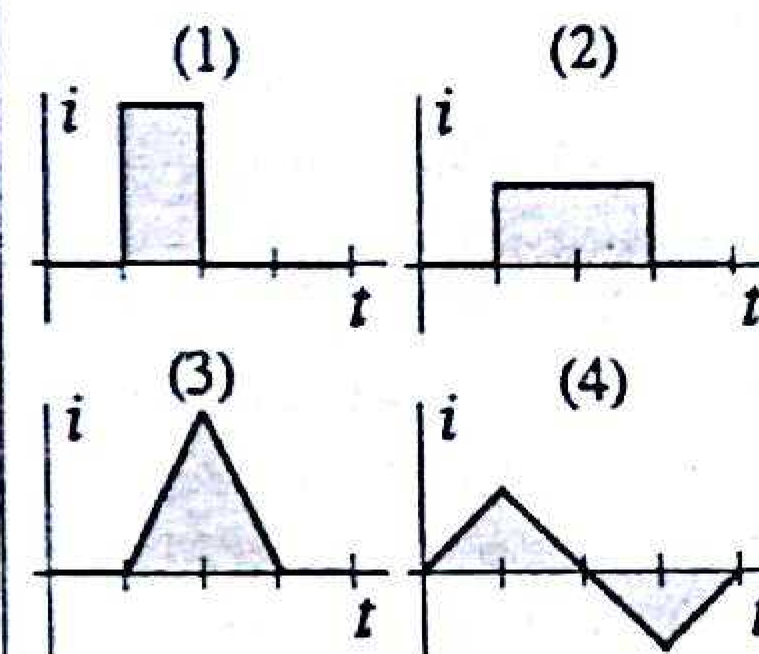
a) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$.

b) $Q_1 = Q_2 = Q_3 > Q_4$.

c) $Q_1 > Q_2 = Q_3 > Q_4$

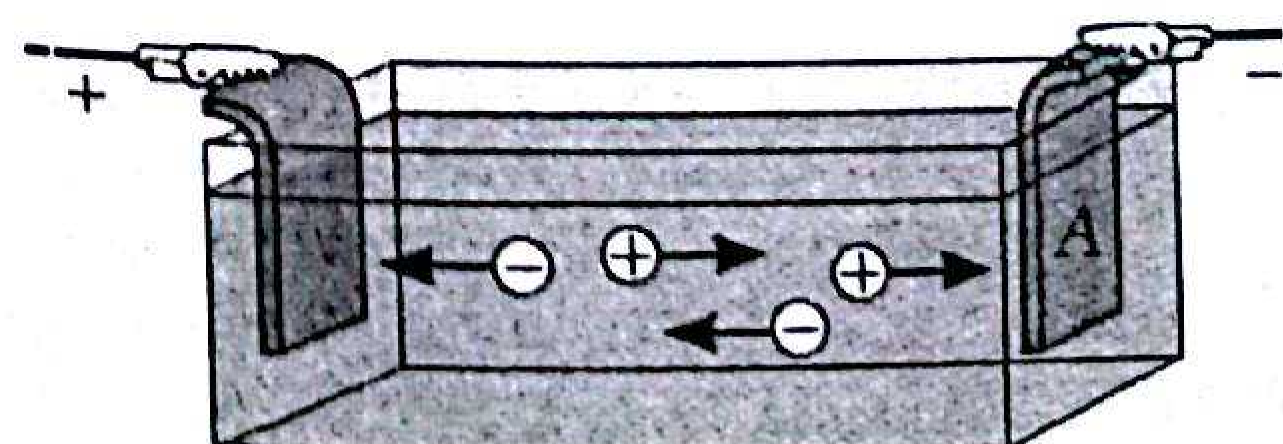
d) $Q_1 < Q_2 = Q_3 < Q_4$.

e) $Q_1 = Q_2 < Q_3 < Q_4$.



PE-6.03. ***Corriente de iones positivos y negativos***

Un líquido electrolito contiene N iones negativos de carga ($-e$) e igual número de iones positivos de carga ($+e$), por unidad de volumen.



La aplicación de un campo E provoca el desplazamiento de iones negativos hacia la izquierda con velocidad v_o y de iones positivos hacia la derecha, con velocidad $3v_o$. ¿Cuál es la corriente eléctrica que atraviesa una área transversal A?

a) Nev_oA.

b) $2Nev_oA$.

c) $3Nev_oA$

d) $4Nev_oA$.

e) $5Nev_oA$

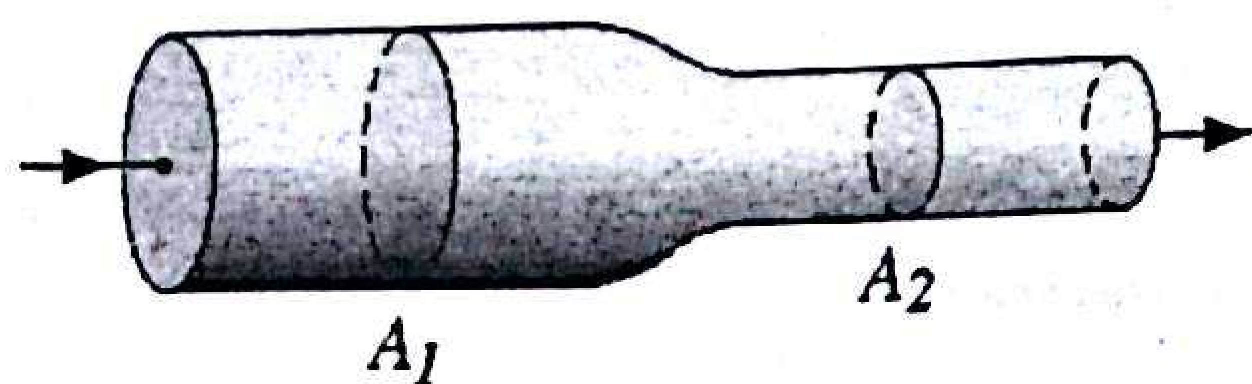
PE-6.04. *Pasando de paralelo a serie*

Cuando se conectan tres resistencias idénticas en paralelo, resulta una resistencia equivalente de 9 Ω. Si las mismas resistencias se conectan ahora en serie, la nueva resistencia equivalente será:

a) 1 Ω   b) 3 Ω   c) 9 Ω   d) 27 Ω   e) 81 Ω

PE-6.05. *Comparación de densidades de corriente*

Una corriente circula uniformemente en un conductor que tiene dos secciones de distinto áreas ($A_1 > A_2$).



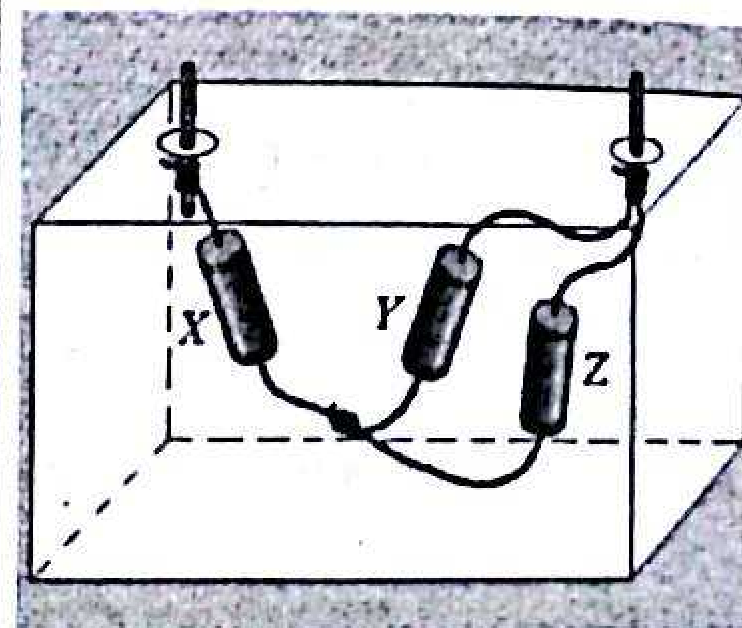
Si comparamos las corrientes I_1 con I_2 y los módulos de las densidades de corrientes J_1 con J_2, se cumple:

a) $I_1 > I_2$, $J_1 = J_2$,
b) $I_1 = I_2$, $J_1 < J_2$
c) $I_1 < I_2$, $J_1 < J_2$
d) $I_1 < I_2$, $J_1 = J_2$
e) $I_1 = I_2$, $J_1 > J_2$

PE-6.06. *¿Cómo lograr la mayor resistencia?*

Se dispone de tres resistencias diferentes: $R_1 > R_2 > R_3$. ¿Cómo las conectaría Ud. en el arreglo indicado en la figura, de manera que la resistencia entre los terminales de la caja tenga el *mayor valor posible*?

a) $R_1 \to X$, $R_2 \to Y$, $R_3 \to Z$
b) $R_2 \to X$, $R_3 \to Y$, $R_1 \to Z$
c) $R_2 \to X$, $R_1 \to Y$, $R_3 \to Z$
d) $R_3 \to X$, $R_1 \to Y$, $R_2 \to Z$
e) $R_3 \to X$, $R_2 \to Y$, $R_1 \to Z$



PE-6.07. *Al estirar un alambre, varía su resistencia*

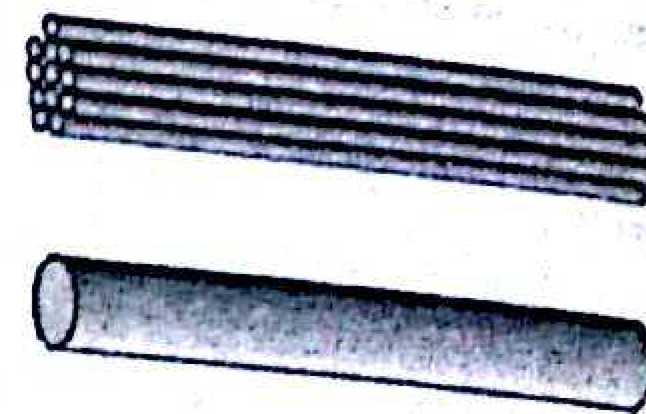
Un alambre que tiene una resistencia de 3 Ω es estirado gradualmente hasta que su longitud sea el doble de la original, manteniendo la sección transversal uniforme a todo lo largo. La nueva resistencia del alambre será:

a) 0,75 Ω   b) 1,5 Ω   c) 6 Ω   d) 12 Ω   e) 15 Ω

PE-6.08. *Alambre unifilar vs. alambre multifilar*

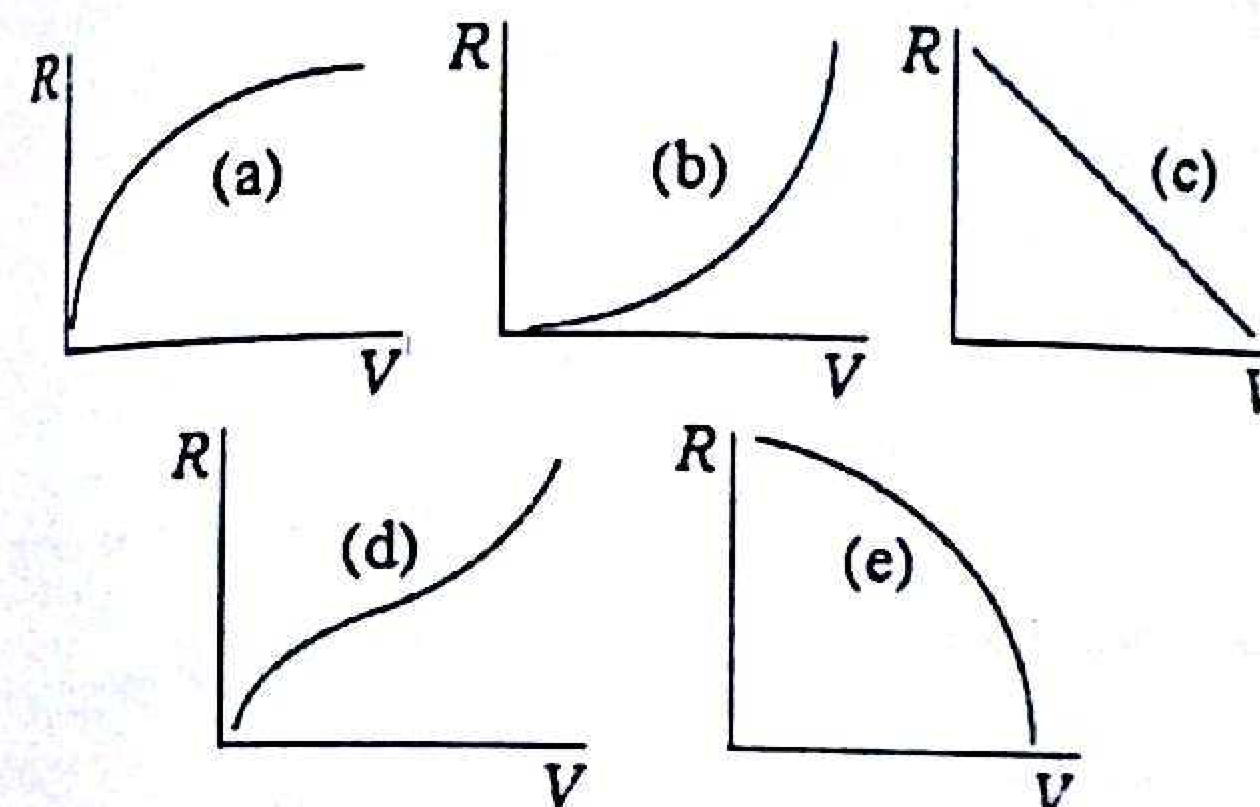
Un cable está constituido por 9 alambres de cobre, de diámetro d. Si queremos reemplazarlo por un solo alambre de cobre que tenga el mismo largo y ofrezca igual resistencia, el diámetro de este alambre debe ser:

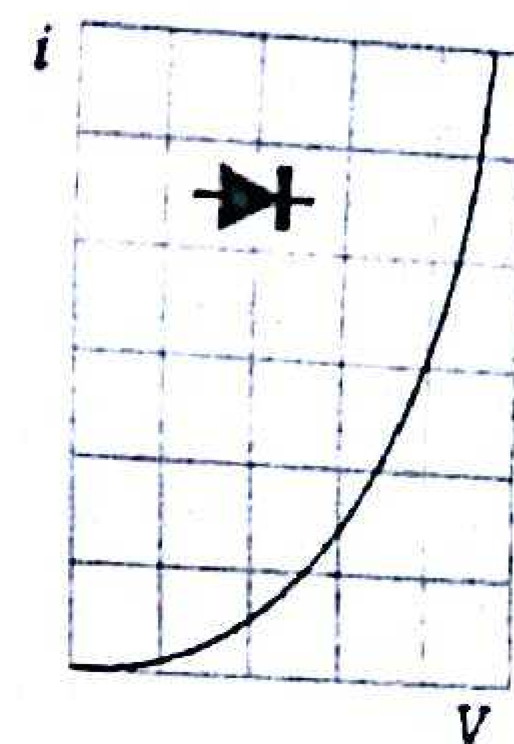
a) $1{,}5d$ b) $3d$ c) $6d$ d) $9d$ e) $12d$



PE-6.09. *Curva característica de un diodo*

El diodo es un dispositivo semiconductor que tiene una curva característica de corriente vs voltaje aplicado de la forma indicada en la figura. ¿Cuál de las curvas mostradas abajo representa mejor la resistencia vs. voltaje?



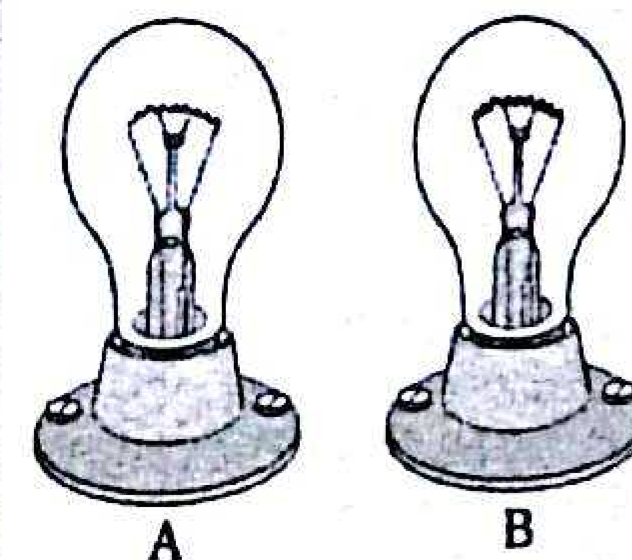


Corriente vs. voltaje para un diodo Zener

PE-6.10. *Filamento delgado vs. filamento grueso*

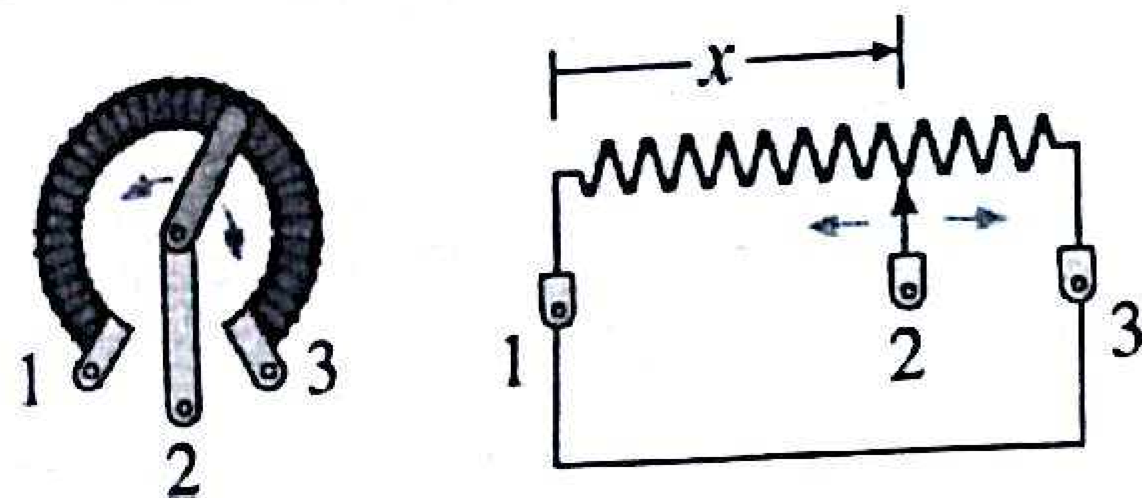
Los filamentos de dos bombillos A y B son del mismo material y tienen igual longitud pero el filamento de B es *más grueso* que el filamento de A. Si se conectan por separado a la red de 120 voltios, ¿cuál brilla más?

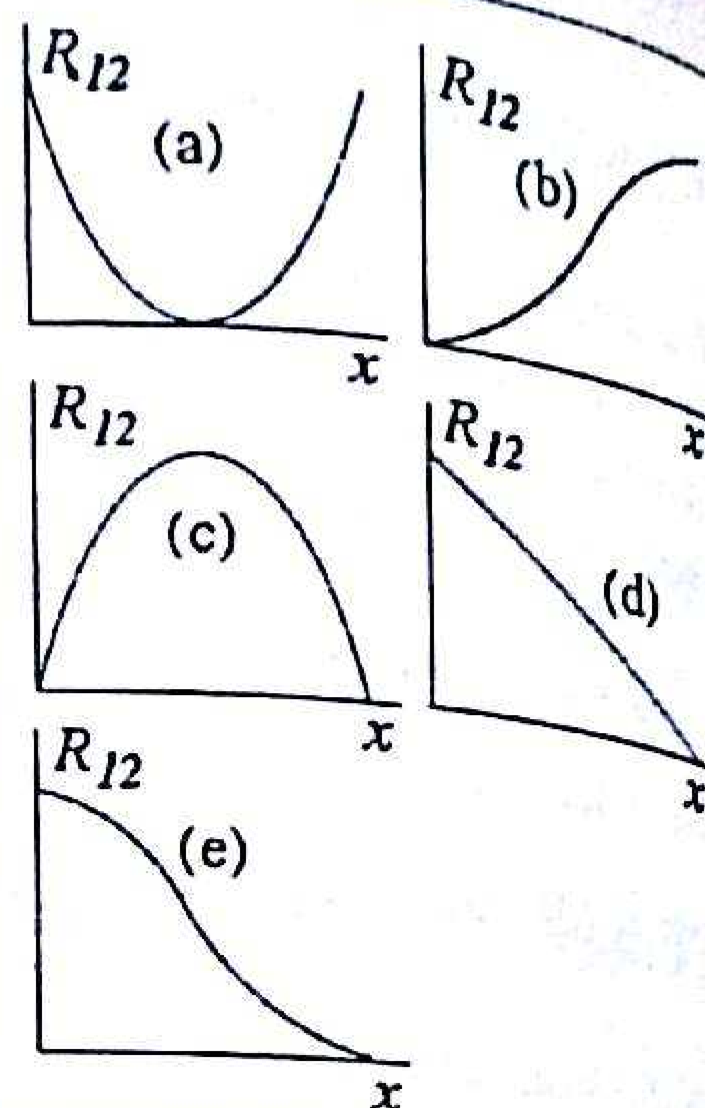
a) Brilla más el bombillo B por tener menor resistencia.
b) Brilla más el bombillo B por tener mayor resistencia.
c) Brilla más el bombillo A por tener menor resistencia.
d) Brilla más el bombillo A por tener mayor resistencia.
e) Los dos bombillos brillan igual.



PE-6.11. *Resistencia de un reóstato cortocircuitado*

Sea un reóstato cuya resistencia varía linealmente con la posición del cursor. Si se conectan con un alambre los extremos 1 y 3 (cortocircuito) ¿cuál de los gráficos mostrados a la derecha representaría la resistencia entre 1 y 2 en función de la posición x del cursor?





PE-6.12. *¿Si cae el voltaje, a cuánto cae la potencia?*

Sea un bombillo incandescente que es *no-óhmico*, y suponga que la corriente proporcional a la raíz cuadrada del voltaje aplicado. Suponga que el voltaje de la línea de alimentación cae de 120 voltios a 60 voltios. ¿a qué porcentaje aproximadamente caerá la potencia desarrollada por el bombillo?

a) 16% b) 25% c) 35% d) 50% e) 67%

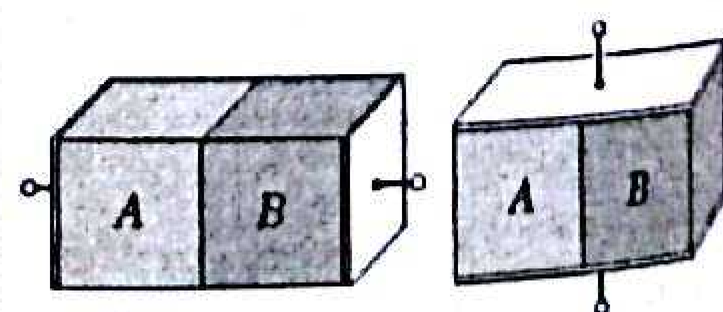
PE-6.13. *¡ 220 v en Europa pero 110 v en Venezuela!*

Una persona trajo de Europa un calentador de ducha de agua que opera a 220 voltios, pero no pudo usarlo porque en su casa lo que tiene son 110 voltios. Para que la potencia de calentamiento no se altere, qué modificación deberá hacer en la resistencia original del calentador?

a) Duplicarla, b) Triplicarla, c) Cuadruplicarla,
d) Reducirla a la mitad, e) Reducirla a la cuarta parte.

PE-6.14. *Combinando dos bloques cúbicos*

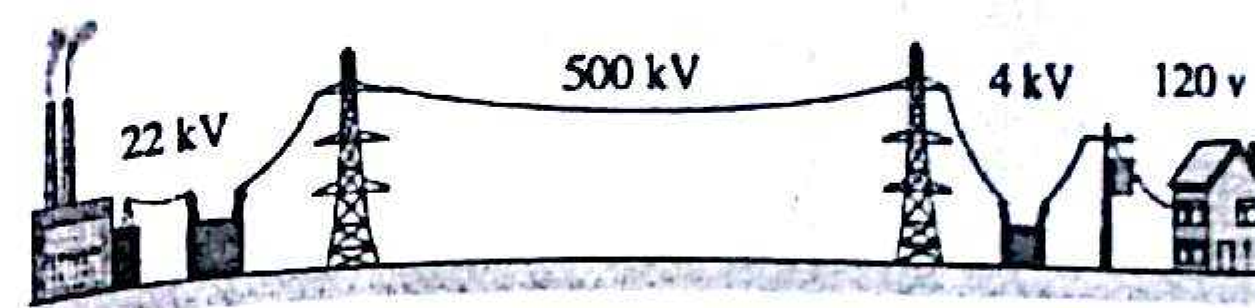
Sean dos bloques cúbicos de lado L de materiales distintos. El bloque A tiene resistividad doble que la del bloque B. Cuando se conectan en serie la resistencia total es 1 Ω. ¿Cuál será la resistencia si se ponen en paralelo?



a) 1/3 Ω b) 1/9 Ω c) 2/3 Ω d) 2/9 Ω e) 3/4 Ω

PE-6.15. *La energía eléctrica se transmite a alto voltaje*

En una estación generadora de electricidad se eleva el voltaje hasta 500 000 voltios antes de enviarlo por la línea de transmisión. Después de largas distancias, se reduce el voltaje mediante transformadores en las estaciones de distribución, hasta que, finalmente cuando llega a los postes del consumidor residencial, es 120 o 220 voltios.

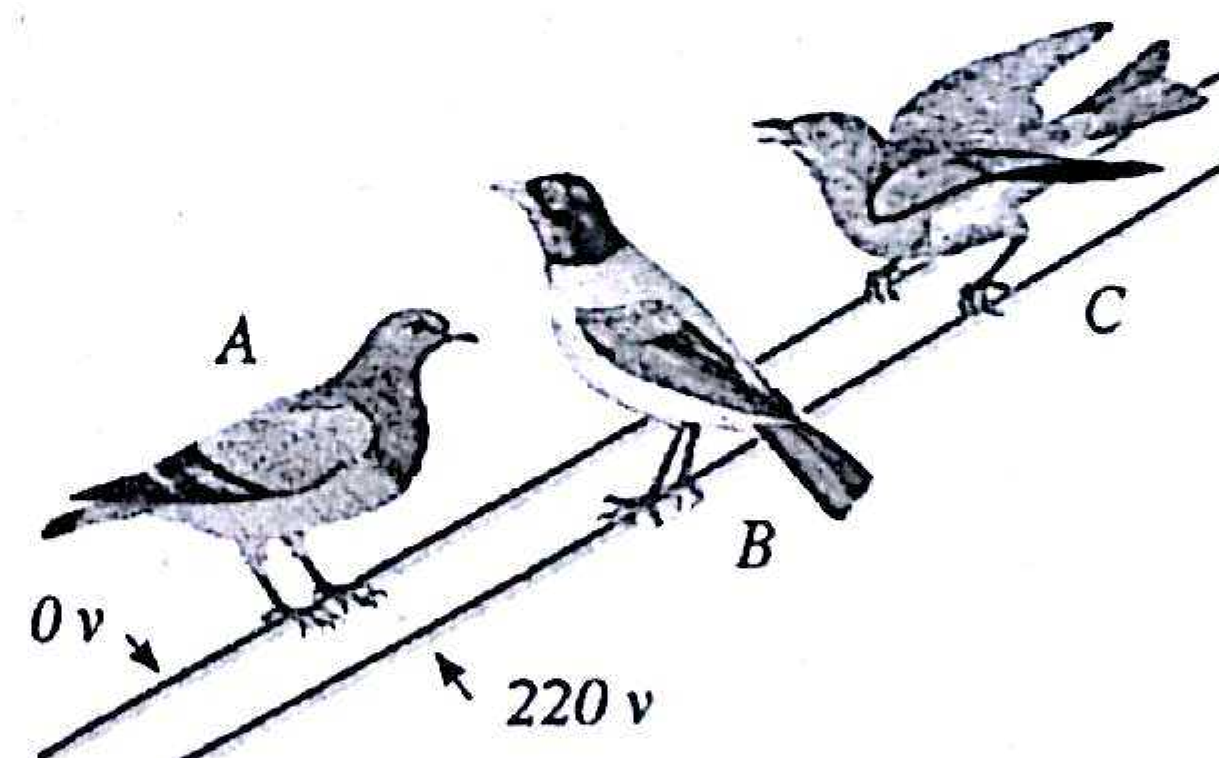


Esto se hace debido a que...

a) La resistencia de los cables es menor para altos voltajes.
b) Los electrones viajan más rápido a altos voltajes.
c) Al reducir la corriente, se minimizan las perdidas I^2R.
d) Una mayor corriente puede ser transmitida a voltajes elevados.
e) A voltajes elevados resulta mas difícil que se roben los cables.

PE-6.16. *Peligro inminente de electrocución I*

Sobre un par de cables paralelos desnudos y conectados a la red de 220 voltios, se posan tres pájaros, A, B y C:



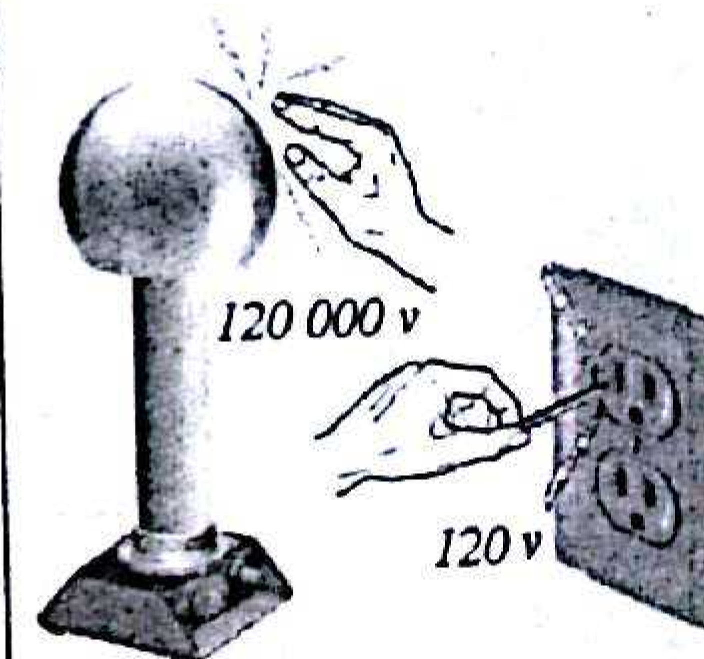
Un cable está a un potencial de 220 voltios (el vivo), mientras que el otro cable está a cero voltios (el neutro) ¿Cuál de los pájaros está en peligro de electrocutarse?

a) Solo el pájaro A.
b) Solo el pájaro B.
c) Solo el pájaro C.
d) Los dos pájaros, B y C.
e) Los tres pájaros.

PE-6.17. *¿Qué resulta mas peligroso?*

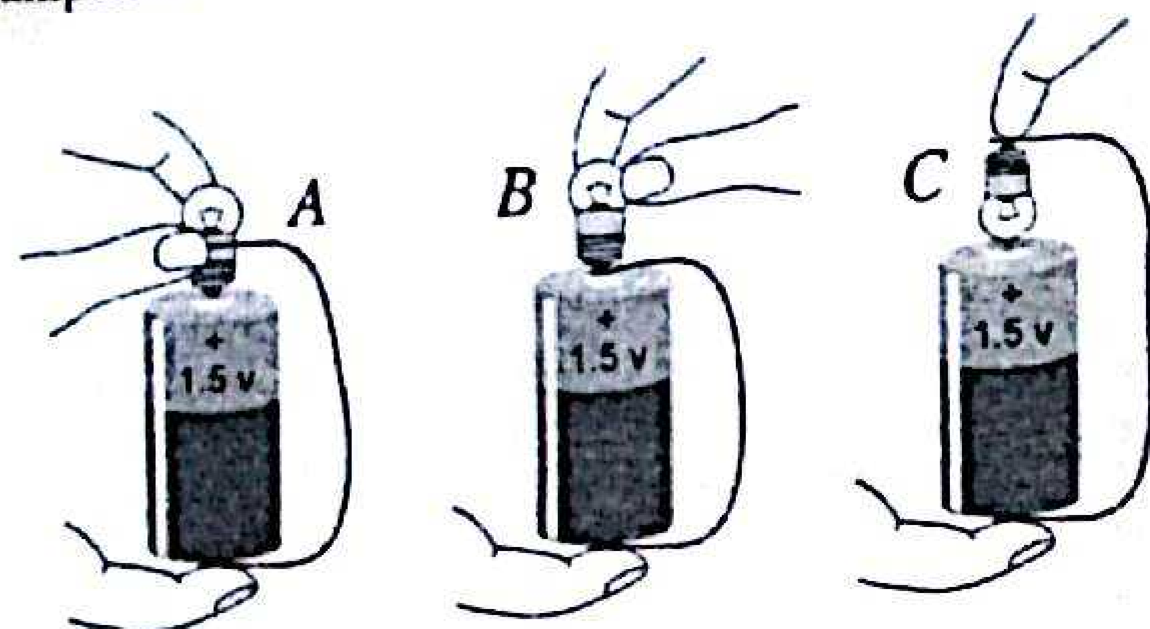
¿Qué será mas peligroso, tocar el domo de un generador de Van de graaff que está a 120 000 voltios, o tocar los terminales de un tomacorrientes que están a 120 voltios?

a) Mas peligroso es tocar el tomacorrientes
b) Mas peligroso es tocar el generador Van de graff.
c) Igual peligro existe al tocar cualquiera de los dos.



PE-6.18. ***¿Cuál de estas lamparitas encenderá?***

Tres alumnos en la escuela A, B, C están haciendo experimentos usando un cable, una pila de linterna y una lamparita.



¿Cuál de los tres alumnos logrará que la lamparita se encienda?

a) el A solamente
b) el B solamente
c) el C solamente
d) el A y el B
e) los tres

CAP. 6: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
6.01					✓
6.03				✓	
6.05		✓			
6.07				✓	
6.09					✓
6.11			✓		
6.13					✓
6.15			✓		
6.17	✓				

	a	b	c	d	e
6.02		✓			
6.04					✓
6.06	✓				
6.08		✓			
6.10	✓				
6.12			✓		
6.14				✓	
6.16			✓		
6.18	✓				

Gustav Robert Kirchhoff

(1824 - 1887)



Estampilla de correos en el 150 aniversario de Kirchhoff

Nació en Königsberg o Kaliningrado (Rusia). Brillante físico teórico que fue estudiante de Gauss. Cuando aun era un estudiante, se abocó a aclarar los trabajos de Georg Ohm y logró formular la ley de Ohm en la forma como hoy se conoce; prosigue estos trabajos y descubre las famosas leyes de Kirchhoff de gran utilidad para el análisis de los circuitos eléctricos. En 1854, entra como profesor de física en la Universidad de Heidelberg y en 1875 es profesor de física matemática en la Universidad de Berlín; allí escribe su obra maestra en cuatro tomos "Vorlesungen über mathematische Physik" (Lecciones sobre Física matemática). Kirchhoff hizo importantes contribuciones en electricidad, termodinámica y óptica. Colaboró con Bunsen en la invención del espectroscopio, que aprovecha el hecho de que cada elemento químico emite ciertas frecuencias características, una nueva herramienta de análisis en química. Gracias al espectroscopio, en 1859 descubrió junto con Bunsen los elementos Cesio y Rubidio. Formuló las leyes de radiación de Kirchhoff en la que sugiere que la relación de potencias radiadas y absorbidas a una dada longitud de onda eran iguales para todos los cuerpos a la misma temperatura. Esta idea fue usada por Planck para analizar la radiación de cuerpo negro y con ello se marca el nacimiento de la física cuántica. Con la ley de Kirchhoff la interpretación de los espectros recibió una sólida base para el desciframiento de la composición de la luz del sol. Decía Kirchhoff en una carta a su hermano Otón "Mi tentativa del análisis físico químico del sol parece a muchos muy atrevida. No estoy enojado con un colega filósofo de la universidad por haberme contado, mientras paseábamos, que un loco pretende haber descubierto sodio en el sol. No pude resistir la tentación de revelarle que ese loco era yo"...Kirchhoff y Bunsen se abocaron a analizar el espectro solar, asignando a un gran número de líneas los elementos químicos que posiblemente las engendraban. En 1868 un eclipse total de sol dio una prueba evidente de sus ideas, durante los pocos segundos en que la fotosfera del Sol estuvo cubierta por la Luna aparecieron las líneas relámpagos emitidas por la atmósfera solar. En los años siguientes fue posible la exploración fisicoquímica de otras estrellas y de las nebulosas alejada de la Tierra por varios millones de años luz. Con esta hazaña de Kirchhoff y Bunsen, una nueva ciencia nacía; la astrofísica.

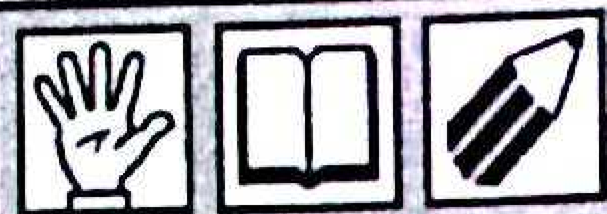
7

CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

Ahora que estamos familiarizados con los principios básicos de la corriente eléctrica, y la manera cómo los capacitores y resistores influyen sobre el flujo de las cargas, aplicaremos estos conocimientos al estudio de circuitos. Los circuitos prácticos a menudo contienen un gran número de elementos resistivos, capacitivos e inductivos, conectados en redes a las fuentes de energía, mediante alambres idealizados sin resistencia. Para analizar estas redes en forma sistemática, se usan las llamadas *reglas de Kirchhoff*, las cuales son una consecuencia directa de las leyes de conservación de la carga y de conservación de la energía. En este capítulo analizaremos circuitos eléctricos de corriente directa, llamados así porque la corriente en cualquier punto fluye en un solo sentido. Primero veremos circuitos sencillos constituidos únicamente por baterías y resistores, en los cuales la corriente no varía con el tiempo. Luego pasaremos a considerar circuitos que contienen además, capacitores y en los cuales, la corriente es una función del tiempo.

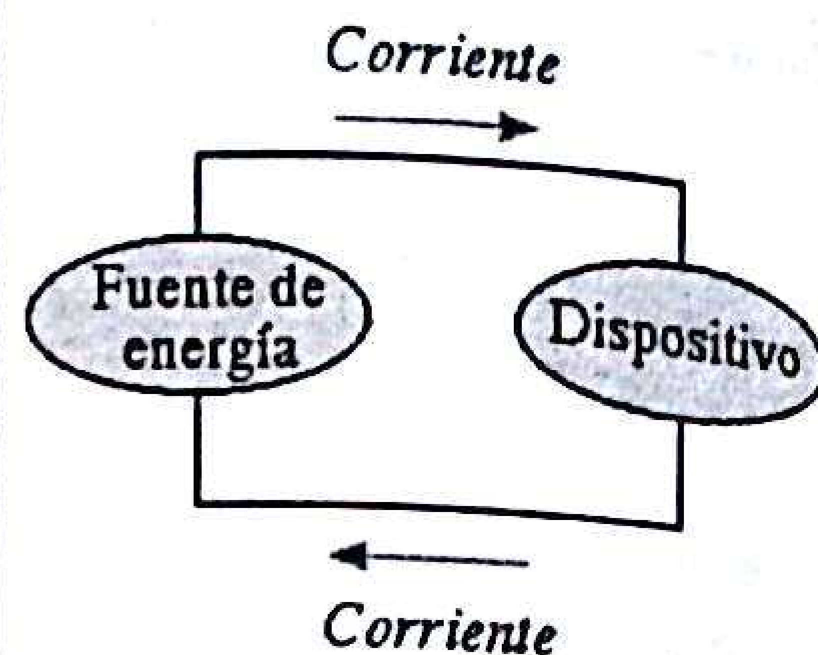
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Fuerza electromotriz, resistencia interna y voltaje terminal.
- Las reglas de Kirchhoff.
- Circuitos resistivos de mallas múltiples.
- Circuitos con resistores y capacitores.



CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Un circuito es una agrupación de elementos eléctricos que están conectados mediante alambres idealizados sin resistencia, de una manera específica en una trayectoria cerrada. Para producir una corriente eléctrica en el circuito, es imprescindible el uso de una fuente de energía, conocida como fuente de fuerza electromotriz (fem). La fuente de fem mantiene una diferencia de potencial entre dos puntos del circuito para provocar el movimiento de cargas, de manera análoga a como una bomba mantiene una diferencia de presión para forzar el agua a circular en una tubería.



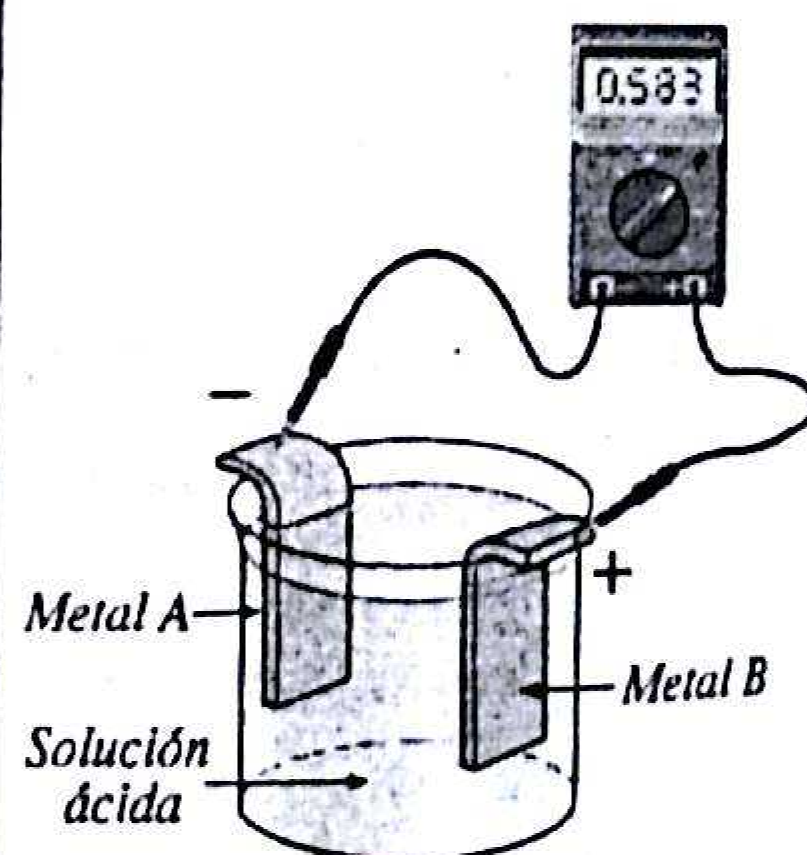
El campo eléctrico que produce la fem en un circuito, se propaga por los diferentes elementos, y en respuesta a estos campos se originan cambios complicados en las distribuciones de cargas. Después de un cierto tiempo se establece un condición de equilibrio, para la cual a lo largo del tiempo no cambian ni las corrientes ni las cargas acumuladas en distintos sitios (estado estacionario).

LA FUERZA ELECTROMOTRIZ

La fuente de fem es cualquier dispositivo que convierta en energía eléctrica cualquier energía de origen no electrostático, que puede ser mecánica, térmica, electromagnética o química. En una batería química la energía proviene de reacciones químicas entre dos electrodos hechos de metales diferentes que se sumergen en una solución conocida como electrolito.

En un generador electromagnético la energía resulta de la acción de un campo magnético sobre cargas móviles. En una celda solar la fem proviene de la energía de la luz del sol. Los sistemas biológicos incluyendo el corazón humano funcionan también como fuente de fem.

El término fuerza electromotriz se sigue utilizando por razones históricas, pero no se refiere a una fuerza sino que representa un trabajo por unidad de carga.



Pila eléctrica sencilla

Se define como el trabajo dW realizado para llevar una carga positiva dq desde el terminal negativo al positivo, por unidad de carga:

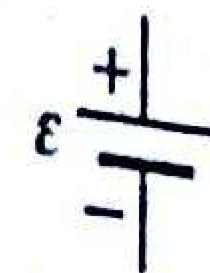
$$\varepsilon = dW/dq$$

Fuerza electromotriz

$\varepsilon = dW/dq$

Es importante distinguir entre los conceptos de fem y diferencia de potencial. Una diferencia de potencial está asociada solamente con un campo electrostático (que es conservativo). En cambio, la fem está asociada con algún mecanismo *no-electrostático* que provee la energía requerida para mover los portadores de carga.

La fem se mide en voltios: Un voltio es 1 Joule/coulomb.



Símbolo de batería ideal

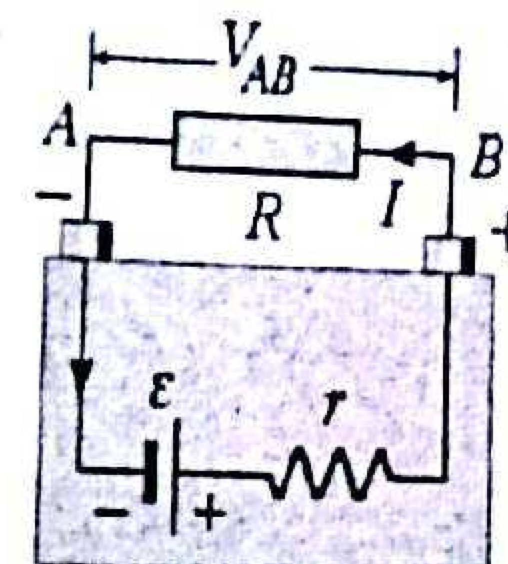
1 V = 1 J/C

BATERIA REAL Y SU RESISTENCIA INTERNA

Una fuente de fem ideal sería aquella que pudiese mantener una diferencia de potencial constante entre sus terminales, sin importar el valor de la corriente que se le demande. Sin embargo, toda fuente real siempre ofrece resistencia al movimiento interno de cargas y puede ser modelada como una combinación de una batería ideal en serie con dicha resistencia interna, r.



El voltaje entre los terminales de la batería real sería igual a su fem ($V_{AB} = \varepsilon$) únicamente cuando dichos terminales están abiertos.

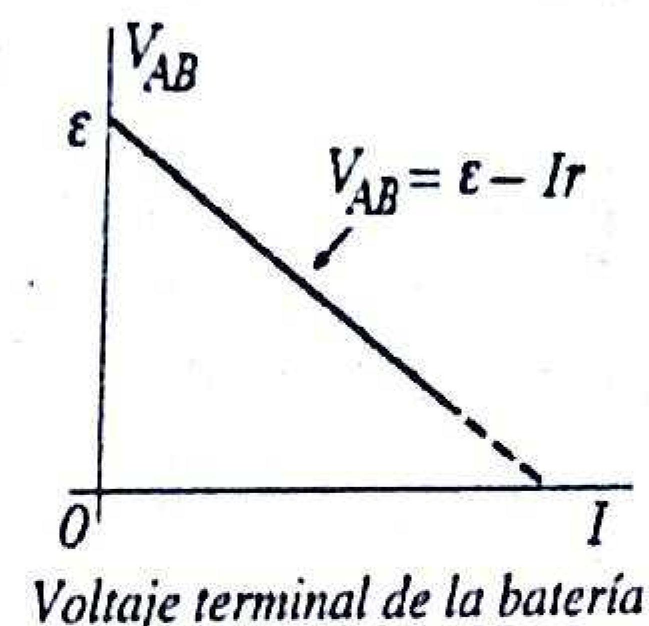


Cuando se le conecta a la batería una resistencia externa, R, circulará una corriente I, y habrá una caída de potencial en la resistencia interna de la batería. Por lo tanto, el voltaje terminal entre A y B será menor que la fem:

$$V_{AB} = I\,R = \varepsilon - I\,r$$

La corriente en el circuito depende de ambas resistencias; la interna r, y la externa R:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$



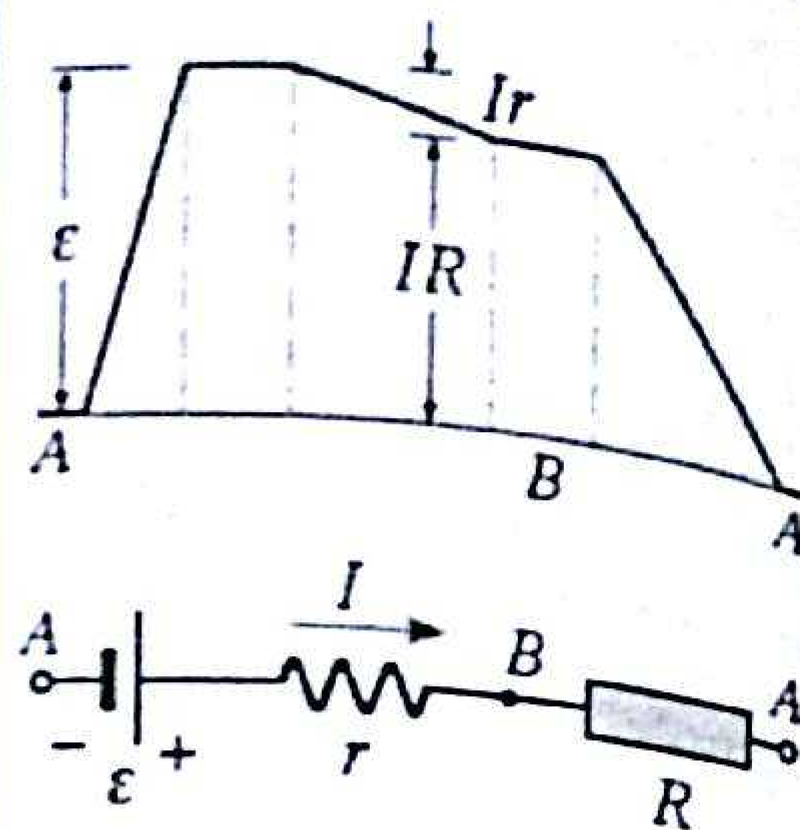
Voltaje terminal de la batería

ANALIZANDO CIRCUITOS

Hagamos un recorrido por el circuito anterior, siguiendo la dirección de la corriente y partiendo del borne A de la batería, al cual asignamos el potencial cero. Para una carga q que entra a ese punto, la fuente de fem *eleva su potencial*, en ε (voltios) aumentando así su energía potencial en $q\varepsilon$ (Joules).

En la resistencia interna r, de la batería (considerándola como si estuviera separada de la fem), la carga pierde energía potencial y cuando llega al borne B el *potencial ha caído* en una cantidad Ir (voltios).

Los alambres de conexión no tienen resistencia y el potencial se mantiene constante hasta llegar a la resistencia externa R. En esta resistencia, el *potencial cae* de nuevo, esta vez en una cantidad IR. A la salida de R, el potencial tiene un valor que se mantiene constante a lo largo del alambre y es igual al potencial del borne A. De esta manera, después de haber completado el recorrido alrededor del circuito $A \rightarrow B \rightarrow A$, la carga regresa a su potencial electrostático original.



Subidas y caídas de potencial en el circuito de la batería.

En conclusión, *en cualquier viaje completo alrededor del circuito, la suma algebraica de todas las subidas y caídas de potencial, es cero*: $\varepsilon - IR - Ir = 0$.

$$\varepsilon - I R - I r = 0$$

REGLAS DE KIRCHHOFF

El resultado anterior se aplica a cualquier trayectoria cerrada de un circuito eléctrico y se le conoce como la regla de Kirchhoff de las *mallas*:

1. Regla de las mallas: *La suma algebraica de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero.*

Regla de las Mallas:

En un circuito cerrado, la suma algebraica de las subidas y caídas de potencial es cero

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = 0$$

Esto es consecuencia de la conservación de la energía. En efecto, si multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por I, encontramos:

$$\varepsilon I - I^2 R - I^2 r = 0$$

$$\varepsilon I = I^2 R + I^2 r$$

Desde el punto de vista energético, esta relación significa que la potencia *generada* por la batería (εI) es igual a la suma de las potencias *disipadas* por las dos resistencias.

La segunda regla de Kirchhoff se refiere a la conservación de la carga en los puntos de unión de tres o más conductores (o *nodos*):

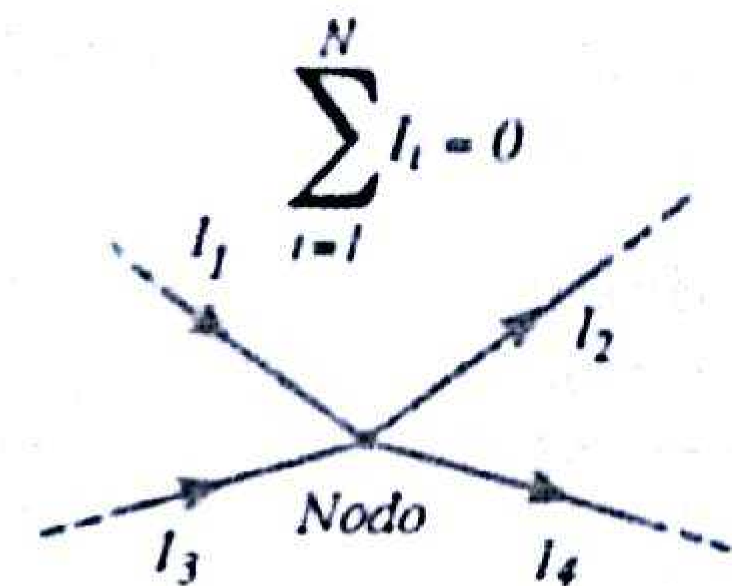
2. Regla de los nodos: *Para cualquier nodo la suma algebraica de las corrientes debe ser cero.* De no ser así, habría acumulación o desaparición de carga en el nodo y modificaría el campo eléctrico, lo cual estaría en desacuerdo con la suposición de estado estacionario.

Regla de los nodos:

En un nodo la suma algebraica de las corrientes debe ser cero.

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

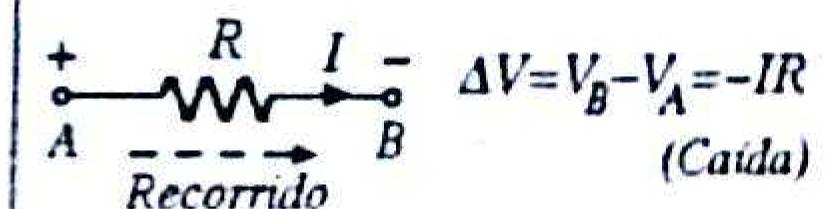
Para aplicar la regla de los nodos, el signo que se le asigna a una corriente que entra al nodo debe ser contrario al de una corriente que sale del mismo. Así para el nodo mostrado en la figura, si se asignan signos positivos a las corrientes que entran I_1 e I_3, entonces las corrientes que salen, I_2 e I_4, serían negativas.



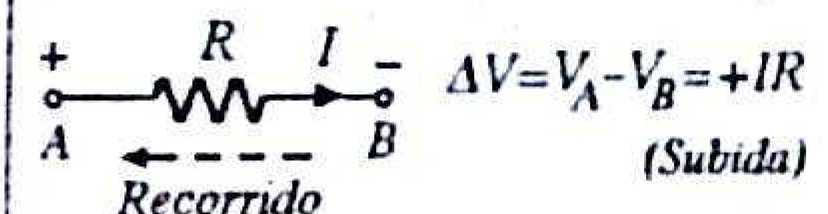
CONVENCIÓN DE SIGNOS PARA VOLTAJES ΔV

Una vez que se han asignados los sentidos a las corrientes, podemos aplicar la regla de las mallas escribiendo los cambios de potencial, ΔV en cada elemento, con sus signos respectivos que dependerán del sentido en que se va recorriendo dicha malla:

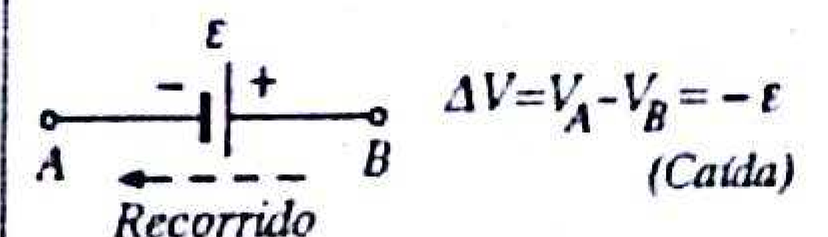
- Si se recorre un resistor en el sentido de la corriente, encontramos una *caída* de potencial ($\Delta V = -IR$).



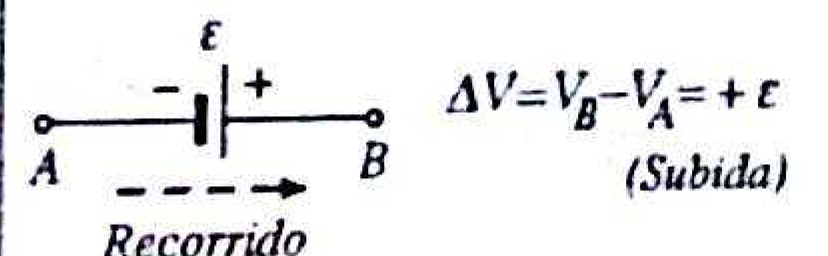
- Si se recorre un resistor en sentido contrario a la corriente, encontramos una *subida* de potencial ($\Delta V = +IR$).



- Si se recorre una *fem* en el sentido de su polaridad de (+) a (-), encontramos una *caída* de potencial ($\Delta V = -\varepsilon$).

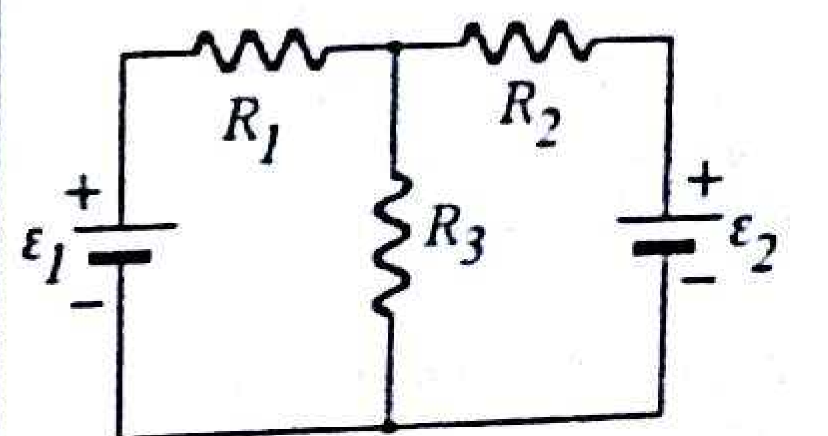


- Si se recorre una *fem* en el sentido de su polaridad de (-) a (+), encontramos una *subida* de potencial ($\Delta V = +\varepsilon$).



CIRCUITOS DE MALLAS MÚLTIPLES

Resolver un circuito consiste generalmente en determinar ciertos incógnitas, tales como corrientes, voltajes o cargas, cuando se conocen ciertos parámetros del circuito. A tal efecto, es conveniente seguir el siguiente procedimiento:

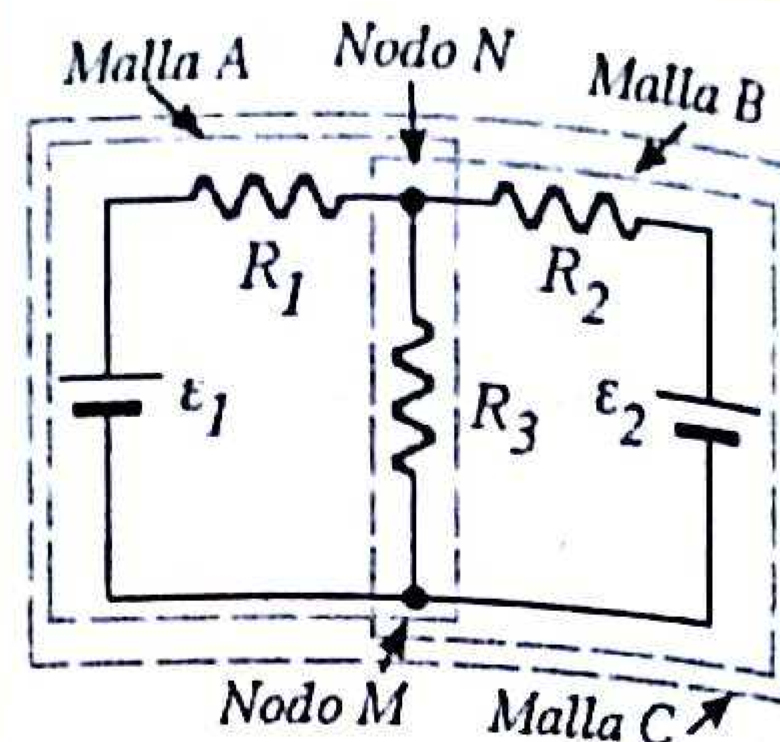


1. Se asignan símbolos y sentidos arbitrarios a las corrientes en las diversas ramas.

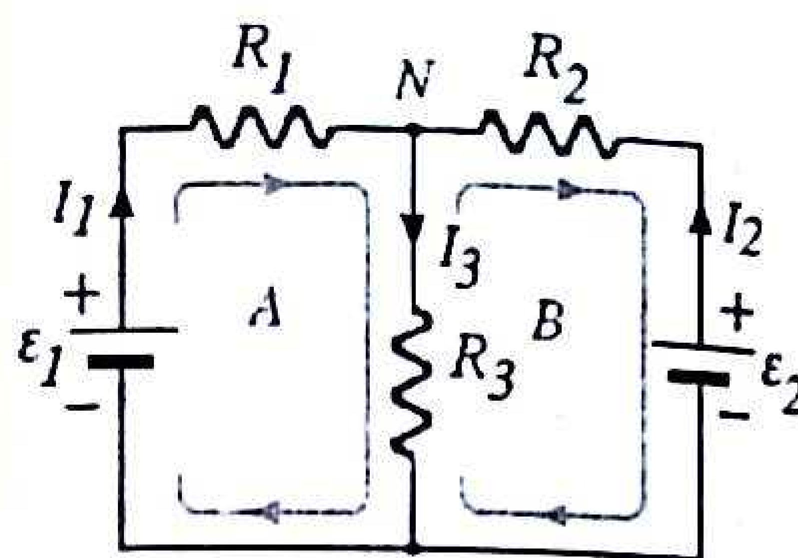
2. Se aplica la regla de los nodos para obtener relaciones entre las corrientes en las uniones.

3. Se aplica la regla de las mallas a tantas mallas como sea necesario.

4. El número de ecuaciones independientes debe ser igual al número de incógnitas. Se resuelven las ecuaciones simultáneas para hallar las cantidades desconocidas.



UN EJEMPLO: Supongamos que conocemos los valores de las fem y de las resistencias del circuito anterior, y deseamos hallar las corrientes. Los pasos a seguir serían:



1. Se asignan arbitrariamente los sentidos a las corrientes I_1, I_2 e I_3 en cada rama.

2. Se aplica la regla de los nodos al nodo N: Las corrientes I_1 e I_2 *entran* y las llamamos *positivas*, mientras que I_3 *sale* y la llamamos *negativa*. Se obtiene así la ecuación (1). Si consideramos el nodo, M, no se consigue ninguna información adicional ya que conduce a la misma ecuación.

Nodo N: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ (1)

3. Escribimos la ecuación para las mallas adoptando el *sentido horario* de recorrido. Para la malla A resulta la ecuación (2). Para la malla B resulta la ecuación (3). Si consideramos la malla C, externa arrojaría una ecuación que es combinación lineal de las dos anteriores.

Malla A: $\varepsilon_1 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0$ (2)

Malla B: $I_3R_3 + I_2R_2 - \varepsilon_2 = 0$ (3)

4. Para hallar las tres incógnitas se resuelve el sistema de las tres ecuaciones independientes. Por ejemplo, si despejamos I_1 e I_2 de las ecuaciones (2) y (3) y las sustituimos en la ecuación (1), se obtiene la ecuación (4). Luego se reordena esta expresión para despejar I_3.

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 - I_3R_3}{R_1} + \frac{\varepsilon_2 - I_3R_3}{R_2} \quad (4)$$

Finalmente, se pueden determinan las corrientes I_1 e I_2 por sustitución de I_3 en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente.

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

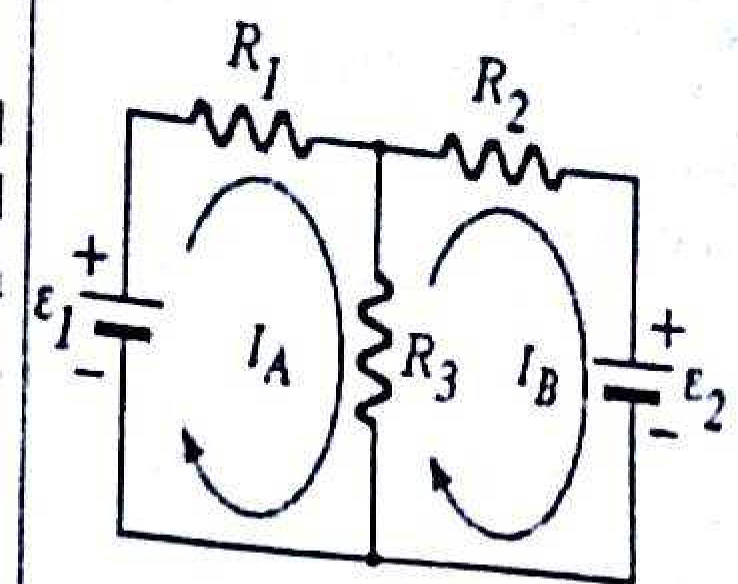
Los circuitos sencillos requieren de pocas ecuaciones lineales simultáneas, las cuales pueden resolverse por los métodos usuales de sustitución y eliminación de variables. Cuando se maneja un gran número de mallas, el trabajo puede resultar sumamente tedioso y es mas conveniente el *método de las corrientes circuitales*.

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2(R_1 + R_3) - \varepsilon_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

MÉTODO DE CORRIENTES CIRCUITALES

Este método consiste en asignar corrientes independientes a cada malla. Así, en el ejemplo mostrado las corrientes circuitales I_A e I_B circulan independientemente en sus respectivas mallas en sentido horario.



En la *malla A*, la batería produce una subida de potencial $(+\varepsilon_1)$. La corriente I_A produce una *caída* de potencial total: $-(R_1 + R_3)I_A$, en tanto que en esa misma malla la corriente I_B produce una *subida* de potencial $+R_3I_B$. La ecuación de Kirchhoff es:

Malla A: $+\varepsilon_1 - (R_1 + R_3)I_A + R_3I_B = 0$

Aplicando criterios similares a la otra malla:

Malla B: $-\varepsilon_2 + R_3I_A - (R_2 + R_3)I_B = 0$

Observe que la corriente que antes llamábamos I_3 es ahora $(I_A - I_B)$. Esto asegura que se cumple la regla de los nodos y el problema se reduce a resolver dos ecuaciones simultáneas (en lugar de tres).

$$-(R_1 + R_3)I_A + R_3I_B = -\varepsilon_1$$
$$+R_3I_A - (R_2 + R_3)I_B = +\varepsilon_2$$

Ecuación matricial:

$$[R][I] = [V]$$

$$\begin{bmatrix} -(R_1 + R_3) & +R_3 \\ +R_3 & -(R_2 + R_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \\ +\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

La ventaja de este método, es evidente en circuitos de muchas mallas, ya que conduce a ecuaciones matriciales sencillas para las corrientes, que se pueden resolver por la Regla de Kramer:

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} -\varepsilon_1 & +R_3 \\ +\varepsilon_2 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(R_1 + R_3) & +R_3 \\ +R_3 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} -(R_1 + R_3) & -\varepsilon_1 \\ +R_3 & +\varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(R_1 + R_3) & +R_3 \\ +R_3 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}} = -\frac{\varepsilon_2(R_1 + R_3) - \varepsilon_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Se observa que estos resultados son idénticos a los que se obtuvieron por el primer procedimiento si llamamos: $I_1 = I_A$, $I_2 = -I_B$ e $I_3 = I_A - I_B$.

$$I_1 = I_A = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

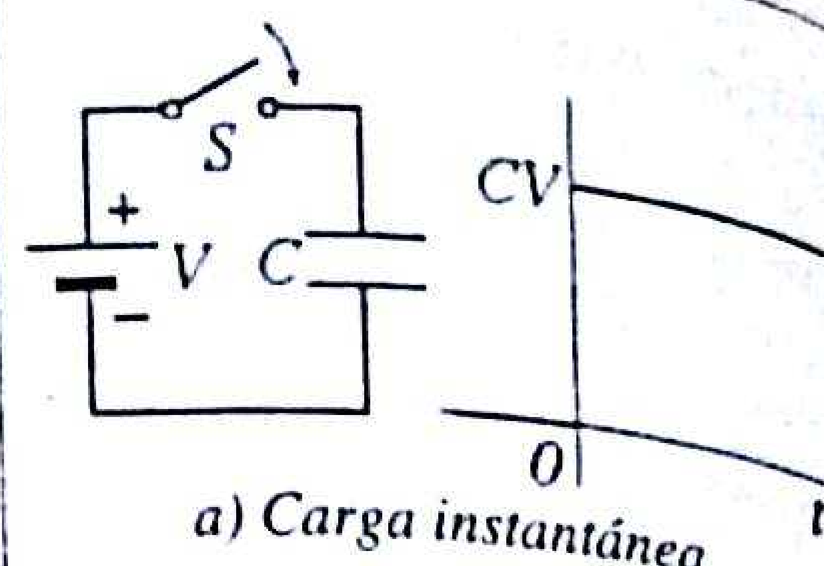
$$I_2 = -I_B = \frac{\varepsilon_2(R_1 + R_3) - \varepsilon_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_3 = I_A - I_B = \frac{\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

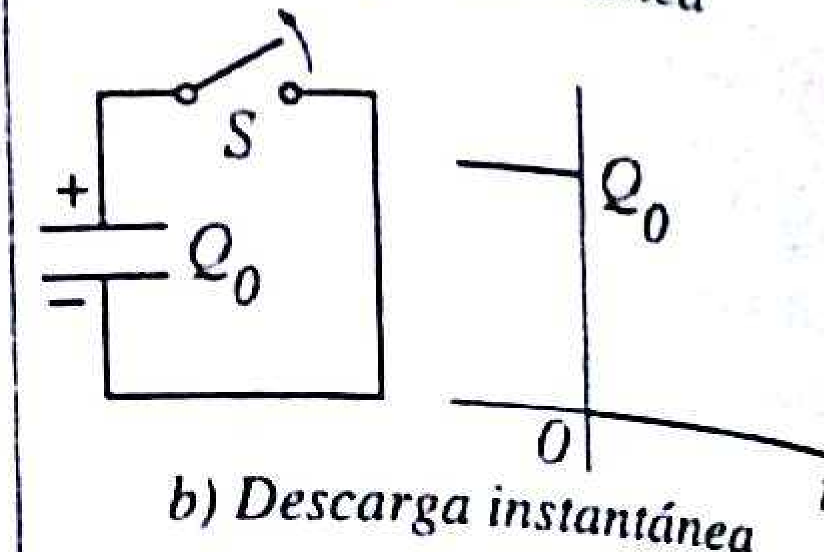
CIRCUITOS RC

En nuestra discusión de los capacitores no hemos considerado los efectos temporales en los procesos de carga y de descarga. Cuando un capacitor es conectado directamente a una fuente ideal mediante alambres ideales, adquiere una carga $Q = CV$ en forma *instantánea* (Fig. a). De manera similar, si un capacitor tiene una carga inicial Q_o y le corto-circuitamos sus terminales, esta carga desaparecerá instantáneamente (Fig. b).

La situación es diferente cuando en el circuito están presente *resistores*, ya que en cada instante habrá caídas de potencial que regulan el proceso, haciendo que las cargas varíen en forma gradual (efectos transitorios).



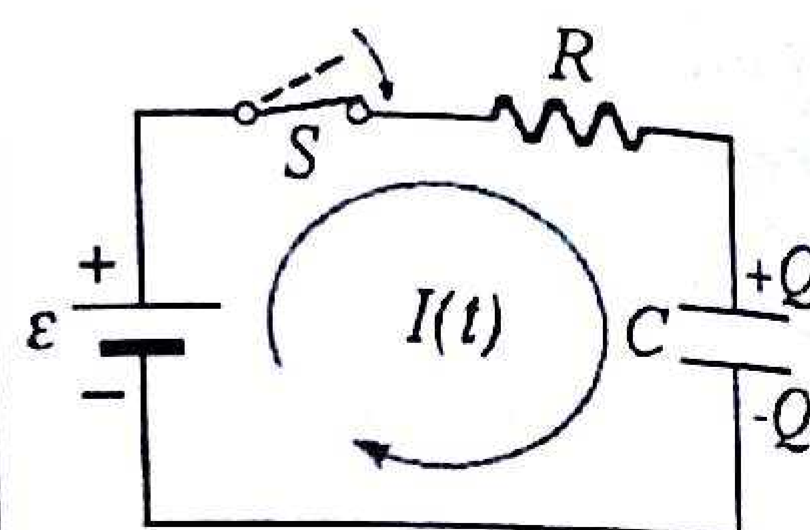
a) Carga instantánea



b) Descarga instantánea

CARGA DE UN CAPACITOR

Consideremos el proceso de carga de un capacitor C conectado en serie con un resistor R. Si en el instante $t = 0$ cerramos el interruptor S, de acuerdo a la regla de Kirchhoff, la suma algebraica de los voltajes de la batería (ε), en el resistor (IR) y en el capacitor (Q/C), es cero:



$$\varepsilon - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

Como la corriente es $I = dQ/dt$, la ecuación anterior queda:

$$\varepsilon - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Separando los términos de las variables carga y tiempo:

$$\frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = -\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

Después de integrar se obtiene:

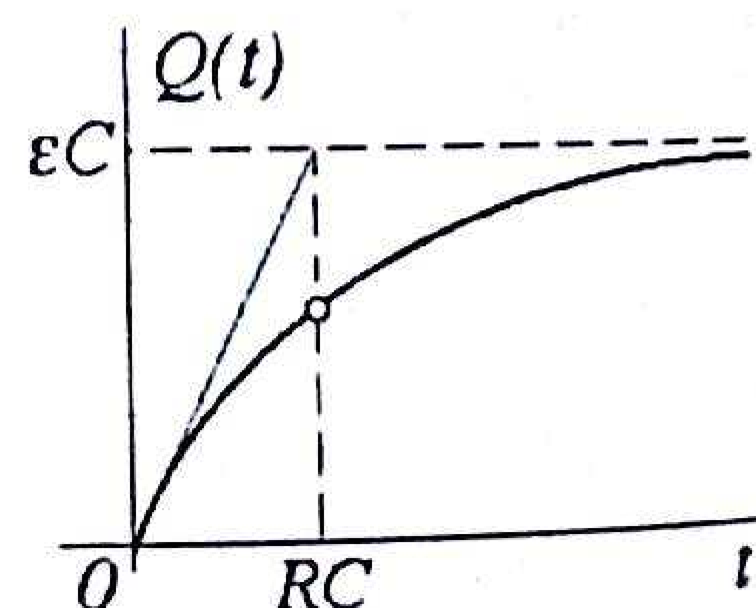
$$\ln(Q - \varepsilon C) = -\frac{t}{RC} + \ln c_1$$

Es decir:

$$Q(t) = \varepsilon C + c_1 e^{-t/RC}$$

La constante de integración c_1 se determina por la condición inicial: $Q(0) = 0$, de modo que: $c_1 = -\varepsilon C$:

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$



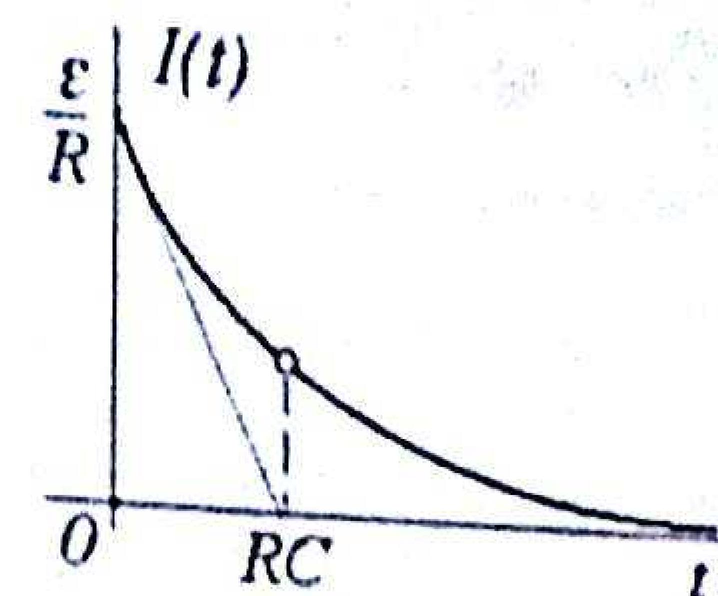
Carga del capacitor

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

Derivando esta expresión encontramos la corriente en función del tiempo:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon C\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

El producto RC que aparece en la exponencial tiene dimensiones de tiempo y se denomina *constante de tiempo*. Esta constante, determina una escala temporal de la duración de los procesos de carga o descarga de los circuitos RC. Si la tasa inicial del proceso de carga se mantuviese constante, entonces el capacitor alcanzaría su carga total en el tiempo $\tau = RC$.



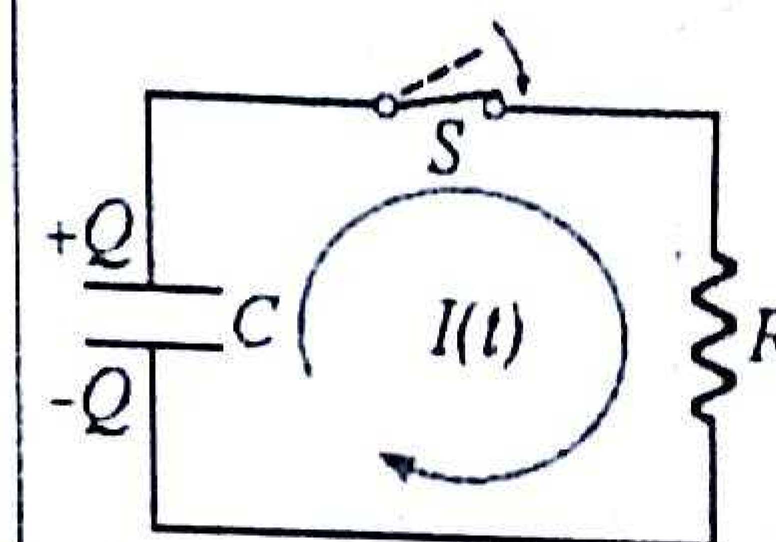
Decaimiento de la corriente

Constante de tiempo
$\tau = RC$

DESCARGA DE UN CAPACITOR

Si el capacitor tiene una carga inicial Q_o y lo conectamos a una resistencia, de acuerdo a la regla de mallas de Kirchhoff podemos escribir:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$



La corriente del circuito debe ser igual a la rapidez de *decrecimiento* de la carga del condensador ($I = -dQ/dt$). Así se obtiene una ecuación en Q solamente:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Esta ecuación diferencial es muy común en física, y expresa que la tasa de variación, dQ/dt, de una cantidad física, Q, es proporcional a la cantidad misma. La integración es inmediata:

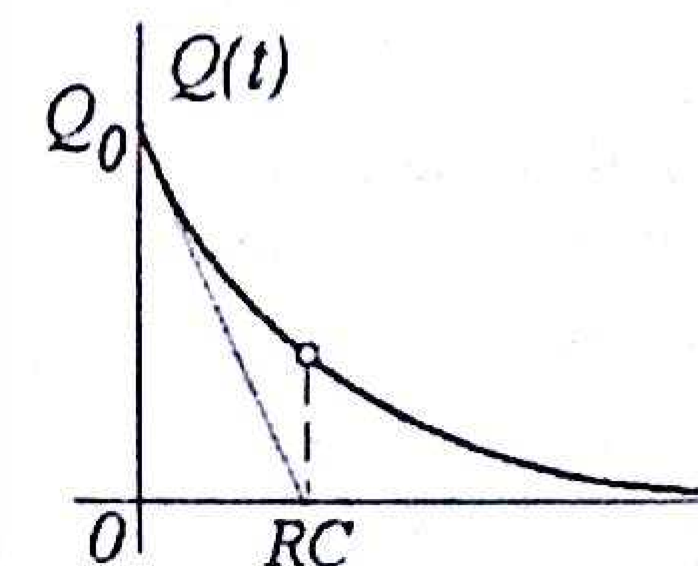
$$\int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln Q = -\frac{t}{RC} + \ln c_2$$

La constante de integración c_2 se determina por la condición inicial: $Q(0) = Q_0$, es decir: $c_2 = Q_0$.

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

La corriente durante la descarga es:

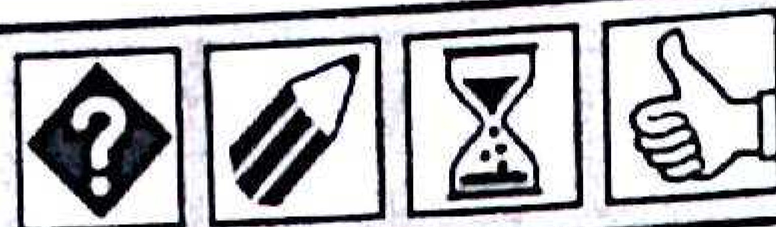
$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$$



Descarga del capacitor

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

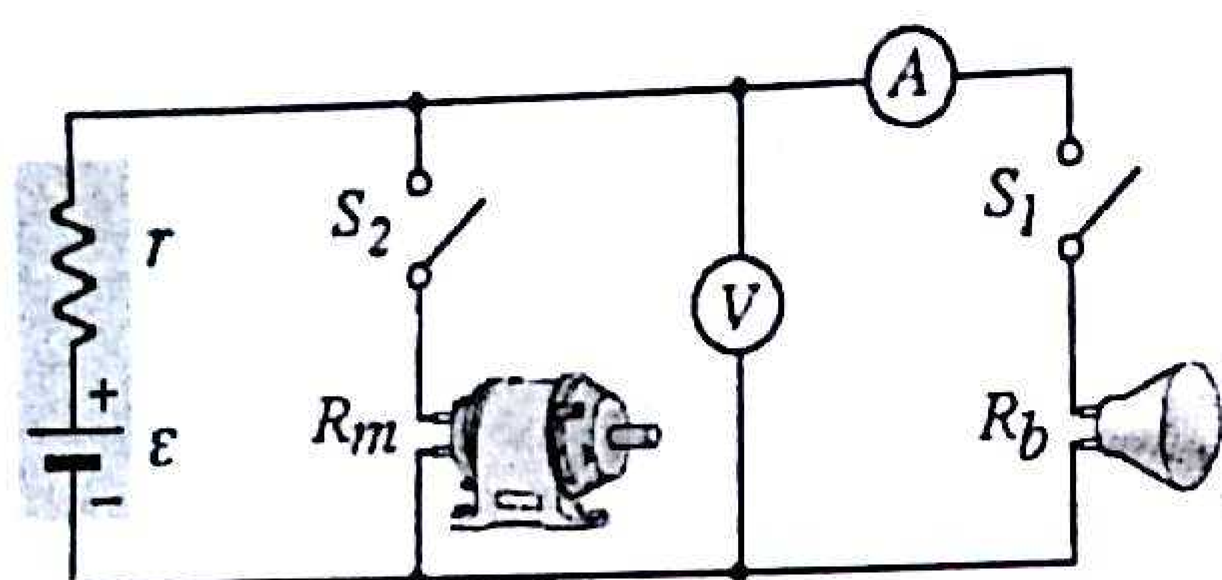
$$I(t) = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-7.01. *Al prender el motor, las luces bajan.*

Cuando se encienden las luces de un automóvil, la lectura de un amperímetro conectado en serie con ellas es 10 A y la de un voltímetro conectado en paralelo es 12 V.



Cuando se pone en marcha el motor de arranque, la lectura del amperímetro disminuye a 8 A y las luces bajan su brillo. Sabiendo que la resistencia interna de la batería es 0,05 Ω. Determine:

a) La fem de la batería.

b) La corriente en el motor.

Suponga que el voltímetro y el amperímetro son ideales ($R_V = \infty$ y $R_A = 0$).

Solución: a) La fem de la batería se calcula a partir de la ecuación de Kirchhoff de la malla (Fig. 1):

$$\varepsilon - I\,r - 12\text{V} = 0$$

$$\varepsilon = 12\text{V} + I\,r = 12\text{V} + (10\text{ A})(0{,}05\ \Omega) = 12{,}5\text{ V}$$

La resistencia del bombillo es:

$$R_b = 12\text{ V}/10\text{ A} = 1{,}2\ \Omega$$

b) Considerando la situación mostrada en la Fig. 2, podemos calcular primero el voltaje en el bombillo.

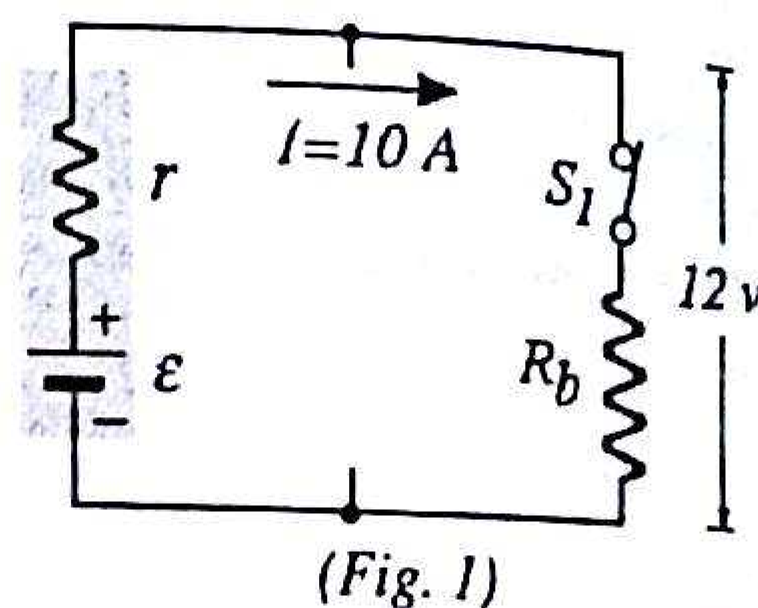
$$V_b = I_b R_b = (8\text{ A})(1{,}2\ \Omega) = 9{,}6\text{ V}$$

El voltaje V_b es el mismo que el del motor de arranque. Para hallar la corriente total de la batería, I, escribimos la ecuación de la malla:

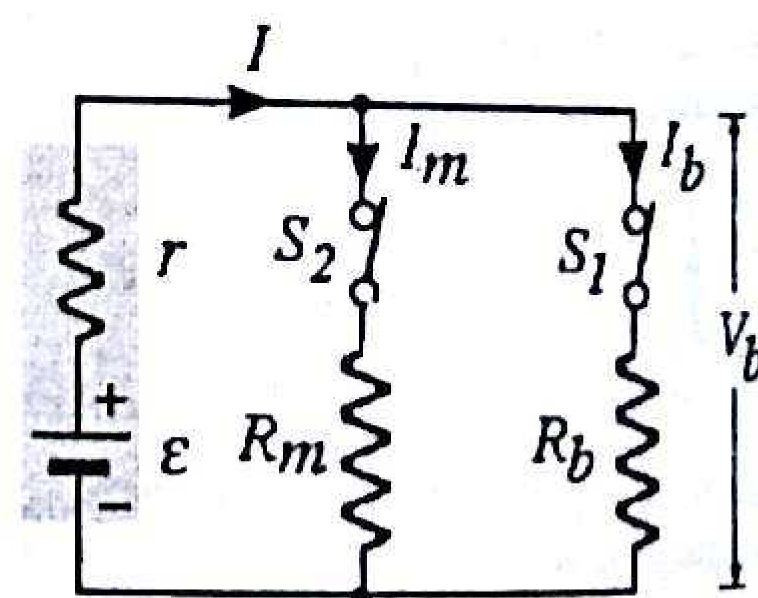
$$\varepsilon - I\,r - V_b = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon - V_b}{r} = \frac{12{,}5\text{v} - 9{,}6\text{v}}{0{,}05\Omega} = 58\text{A}$$

Finalmente, la corriente I_m en el motor de arranque es:

$$I_m = I - I_b = 58\text{ A} - 8\text{ A} = 50\text{ A}$$



(Fig. 1)



(Fig. 2)

Respuesta:

a) ε = 12,5 V
b) I_a = 50 A

PR-7.02. *Baterías serie vs. paralelo: ¿Cuál da mas corriente?*

Un grupo de N baterías idénticas de fem = ε y resistencia interna r, se conectan todas en paralelo o todas en serie, y luego se conecta la combinación a una resistencia R.

a) Determine la corriente en R para la combinación serie.

b) Determine la corriente para la combinación paralelo.

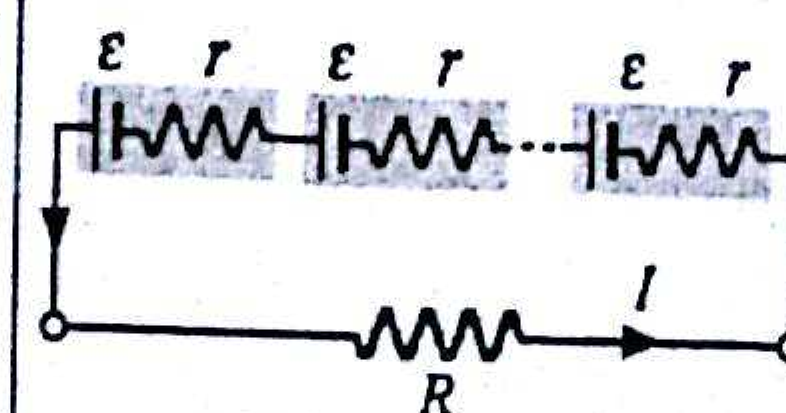
c) Demuestre que darán la misma corriente si $R = r$.

Solución: a) *Con las baterías en serie*, la corriente en la resistencia R es igual a la corriente en cada batería. El voltaje V_R es la suma de las fem de las baterías ($N\varepsilon$) menos la suma de las caídas de potencial en las resistencias internas:

$$V_R = I\,R = N\varepsilon - N(I\,r)$$

La corriente es:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R/N}$$



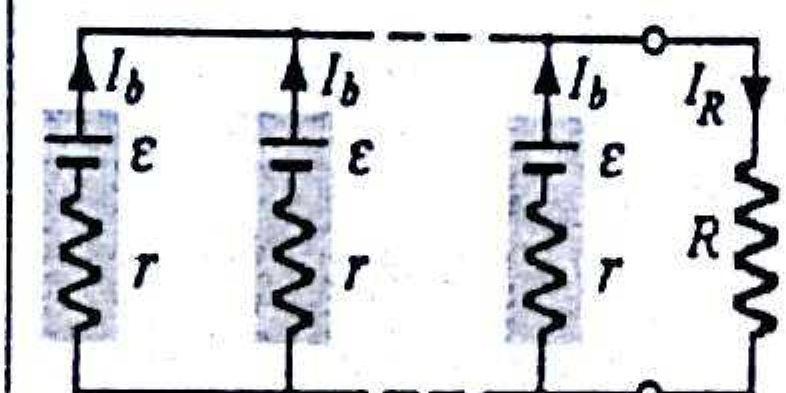
a) N baterías en serie

b) *Con las baterías en paralelo* el voltaje $V_R = I_R R$ es igual al voltaje terminal en cada batería, o sea, la fem menos la caída de potencial interna:

$$V_R = I_R\,R = \varepsilon - I_b\,r$$

La corriente I_R es la suma de todas las corrientes de las N baterías: $I_R = N\,I_b$. Eliminando I_b de estas dos ecuaciones:

$$I_R = \frac{\varepsilon}{R + r/N}$$



b) N baterías en paralelo

c) Si comparamos las expresiones obtenidas para I_R se observa que la corriente sería igual, en ambas combinaciones, cuando $R = r$.

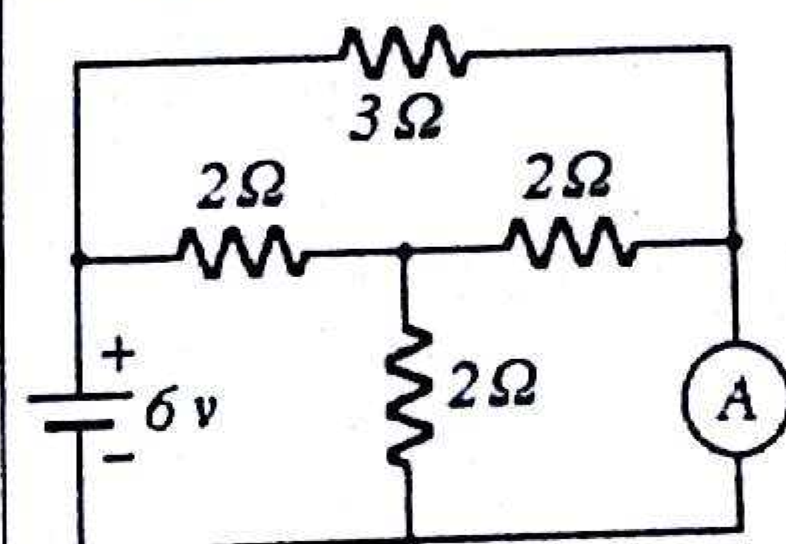
Respuesta:

a) Serie: $I_R = \dfrac{\varepsilon}{r + R/N}$

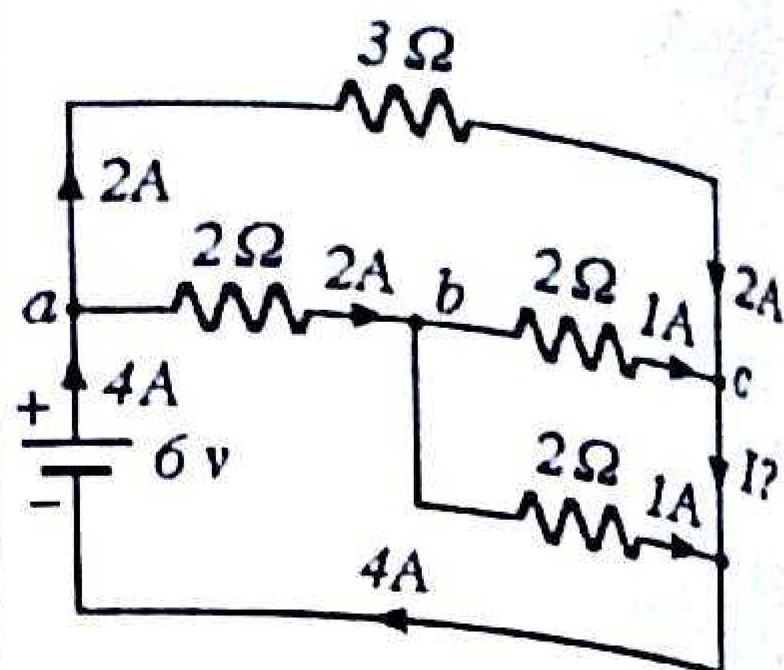
b) Paralelo: $I_R = \dfrac{\varepsilon}{R + r/N}$

PR-7.03. *¿Cuál será la lectura del amperímetro?*

En el circuito mostrado, tanto la batería como el amperímetro son ideales, es decir, ambos tienen resistencias despreciables. Determine la corriente que indica el amperímetro.



Solución: El amperímetro es de resistencia despreciable y para hallar la resistencia equivalente vista desde la batería se dibuja el circuito mostrado. Entre los nodos b y c hay dos resistencias de 2 Ω en paralelo que equivalen a 1 Ω. Esta resistencia de 1 Ω a su vez está en serie con 2 Ω, para dar 3 Ω en la rama abc. De modo que entre los nodos a y c hay dos resistencias en paralelo de 3 Ω, que equivalen a 1,5 Ω. Esta es la resistencia equivalente vista desde los terminales de la batería y por lo tanto, la corriente total en la batería es 6 v / 1,5 Ω = 4 A. Esta corriente se reparte en el nodo a en partes iguales (2 A) ya que las dos ramas tienen igual resistencia.



La corriente que indica el amperímetro es la que sale por el nodo c, es decir:

$$I = 2\text{A} + 1\text{A} = 3\text{A}$$

Respuesta:

$I = 3$ A

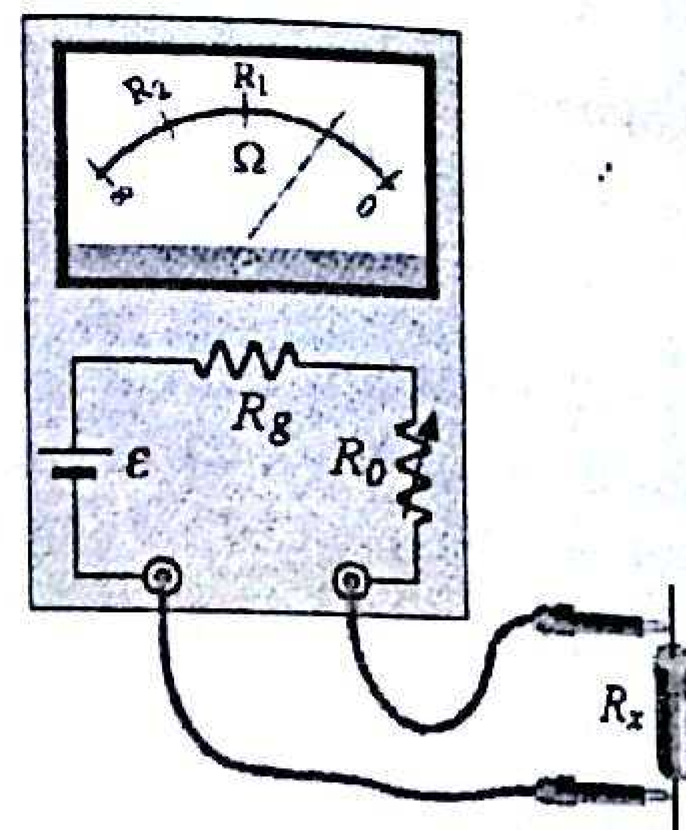
PR-7.04. *El ohmímetro en su versión mas simple*

Para medir resistencias se construye un ohmímetro conectando una pila de fem ε = 1,5 v en serie con un galvanómetro cuya resistencia interna es R_g = 20 Ω y cuya sensibilidad de escala completa de 1 mA. El circuito serie se completa con una resistencia variable R_o de ajuste del cero y la resistencia a medir, R_x.

a) ¿Cuál es el valor de R_o?

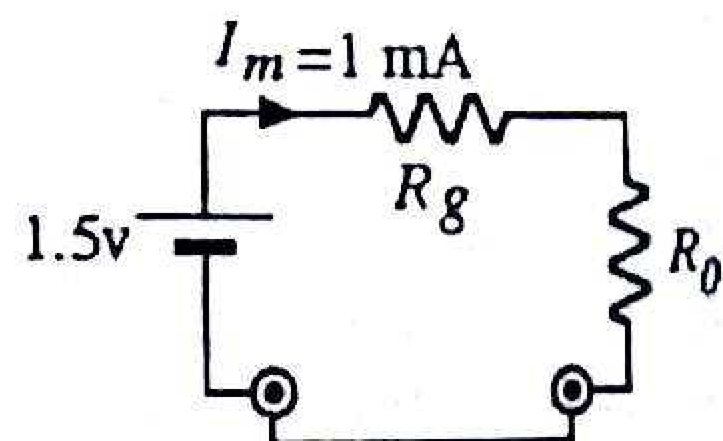
a) ¿Cuánto vale R_x si la deflexión es 50 % del máximo?

b) ¿ Cuánto vale R_x si la deflexión es 25 % del máximo?



Solución: a) Cuando se corto-circuitan los terminales del ohmmímetro (R_x = 0), se ajusta el valor de R_o hasta que la deflexión de la aguja sea máxima (I_m = 1 mA):

$$I_m = \frac{\varepsilon}{R_g + R_0} \quad \Rightarrow \quad R_g + R_0 = \frac{\varepsilon}{I_m} = \frac{1{,}5\text{v}}{1\text{mA}} = 1500\Omega$$

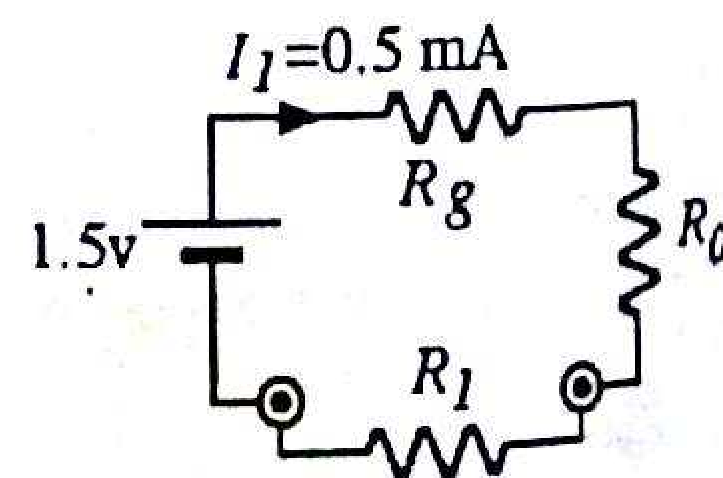


Por lo tanto:

$$R_0 = 1500\Omega - R_g = 1480\Omega\,.$$

b) Cuando se inserta R_1, la deflexión de la aguja es 50 % del máximo, es decir la corriente es I_1 = 0,5 mA :

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_g + R_0 + R_1}$$

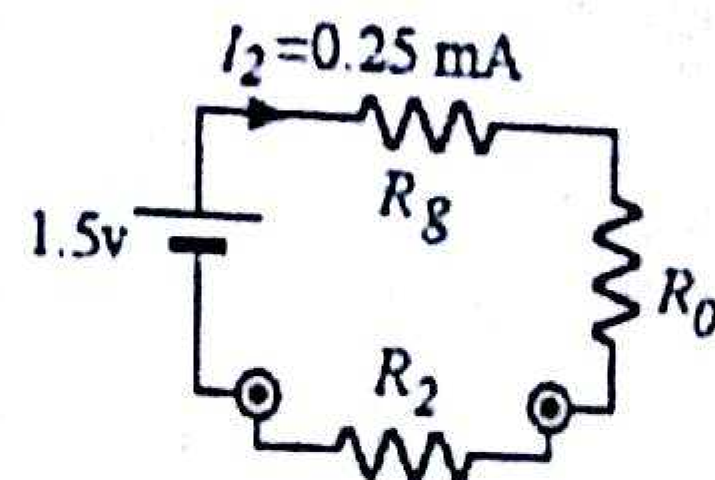


El valor de la resistencia incógnita es:

$$R_1 = \frac{\varepsilon}{I_1} - (R_g + R_0) = \frac{1{,}5\text{v}}{0{,}5\text{mA}} - 1{,}5\text{k}\Omega = 1{,}5\text{k}\Omega$$

b) Si la deflexión de la aguja es 25 % del máximo, la corriente es I_2 = 0,25 mA, el valor de la resistencia incógnita es:

$$R_2 = \frac{\varepsilon}{I_2} - (R_g + R_0) = \frac{1{,}5\text{v}}{0{,}25\text{mA}} - 1{,}5\text{k}\Omega = 4{,}5\text{k}\Omega$$



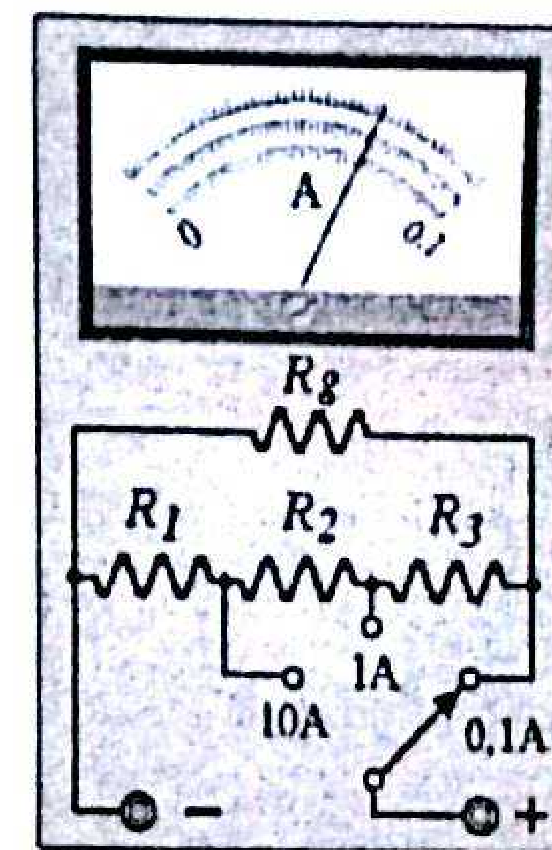
Observe que la graduación de la escala de resistencias del ohmímetro *no es lineal.*

Respuesta:

a) R_0 = 1,48 kΩ, b) R_1 = 1,5 kΩ
c) R_2 = 4,5 kΩ

PR-7.05. *Diseño de un multi amperímetro*

Se dispone un de galvanómetro de resistencia interna R_g = 25 Ω y con una sensibilidad de escala completa de 0,01 A. Se desea convertir el galvanómetro en un amperímetro de rango múltiple que permita medir corrientes en tres rangos distintos con lecturas máximas respectivas de 0,1 A, 1 A y 10 A. Se selecciona el rango de corrientes deseado mediante un suiche de tres posiciones. Determine los valores de las resistencias R_1, R_2 y R_3.



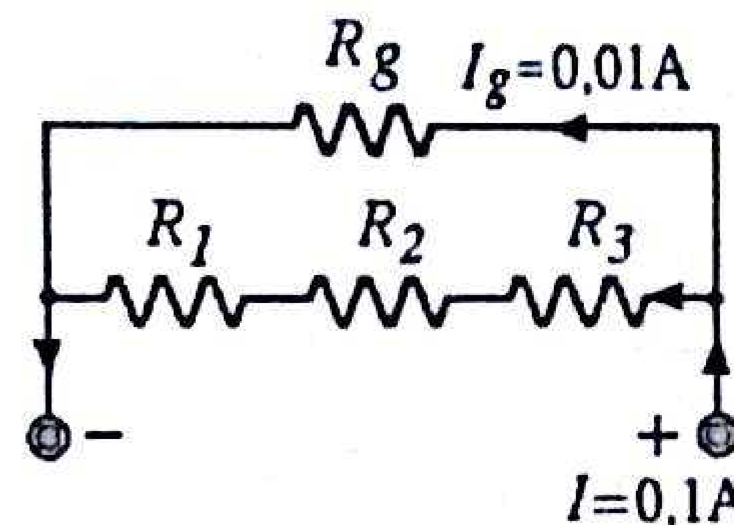
Solución: Para cada una de las posiciones del suiche selector la corriente total I se distribuye en dos ramas, por una de las cuales pasa la corriente I_g del galvanómetro, para dar un voltaje común a las dos ramas.

Escala 0,1A:

$$(I - I_g)(R_1 + R_2 + R_3) = I_g R_g$$

$$(0{,}1\text{A} - 0{,}01\text{A})(R_1 + R_2 + R_3) = (0{,}01\text{A})(25\Omega)$$

$$R_1 + R_2 + R_3 = 2{,}778\Omega \qquad (1)$$

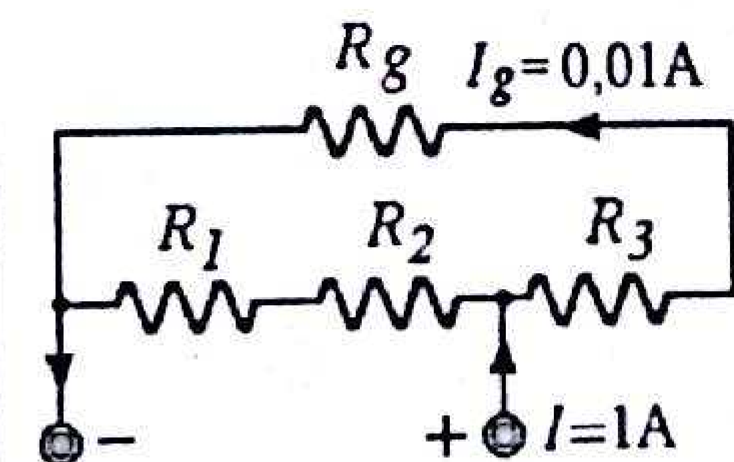


Escala 1A:

$$(I - I_g)(R_1 + R_2) = I_g(R_g + R_3)$$

$$(1\text{A} - 0{,}01\text{A})(R_1 + R_2) = (0{,}01\text{A})(25\Omega + R_3)$$

$$99(R_1 + R_2) = 25\Omega + R_3 \qquad (2)$$



Escala 10 A:

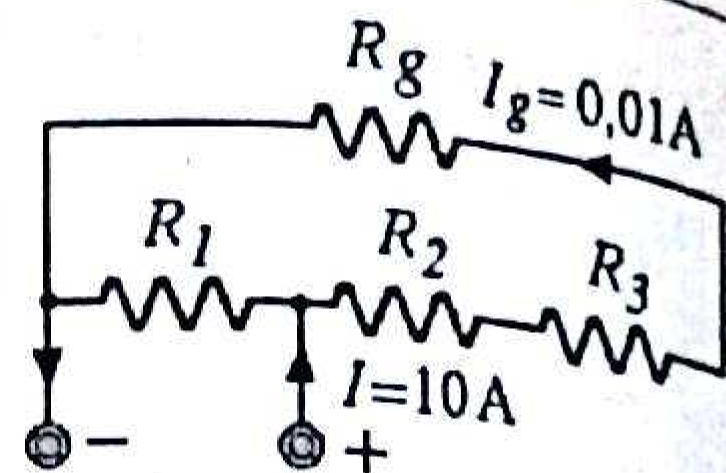
$$(I - I_g)R_1 = I_g(R_2 + R_3 + R_g)$$

$$(10\text{A} - 0{,}01\text{A})R_1 = (0{,}01\text{A})(R_2 + R_3 + 25\Omega)$$

$$999R_1 = R_2 + R_3 + 25\Omega \qquad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3), encontramos los valores de las resistencias:

$$R_1 = 0{,}0278\ \Omega\ ,\ R_2 = 0{,}250\ \Omega\ \text{ y }\ R_3 = 2{,}50\ \Omega$$

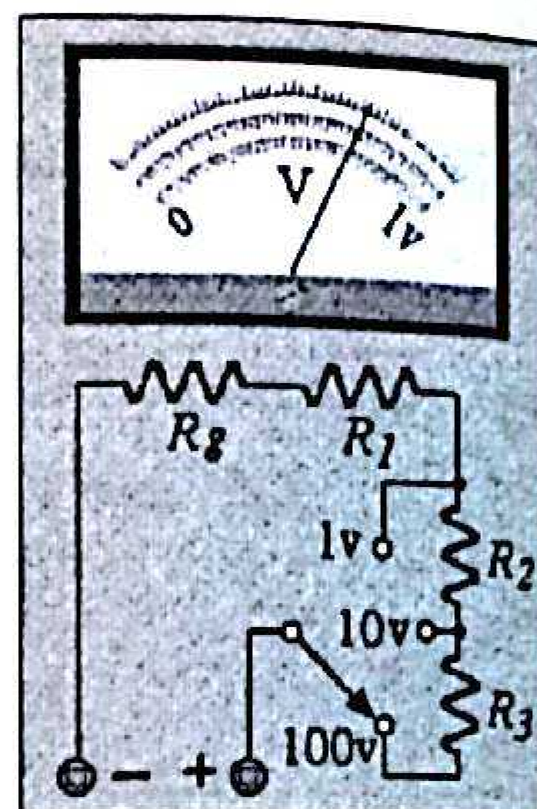


Respuesta:

$R_1 = 0{,}0278\ \Omega$
$R_2 = 0{,}250\ \Omega$
$R_3 = 2{,}50\ \Omega$

PR-7.06. *Diseño de un multi voltímetro*

Se dispone de un galvanómetro de resistencia interna R_g = 50 Ω y con una sensibilidad de escala completa de 1 mA. Se desea convertir el galvanómetro en un voltímetro de rango múltiple que permita medir voltajes en tres rangos distintos con lecturas máximas respectivas de 1 v, 10 v y 100 v. Con el montaje sugerido, se selecciona el rango de voltajes deseado mediante un suiche de tres posiciones. Determine los valores de las resistencias R_1, R_2 y R_3.



Solución: Las resistencias R_1, R_2 y R_3 van quedando intercaladas en un circuito serie con R_g. Si partimos de la escala mas baja, (1 voltio) se va aplicando sucesivamente la relación $R = V/I$ en cada escala, siendo I = 1 mA.

Escala 1v:

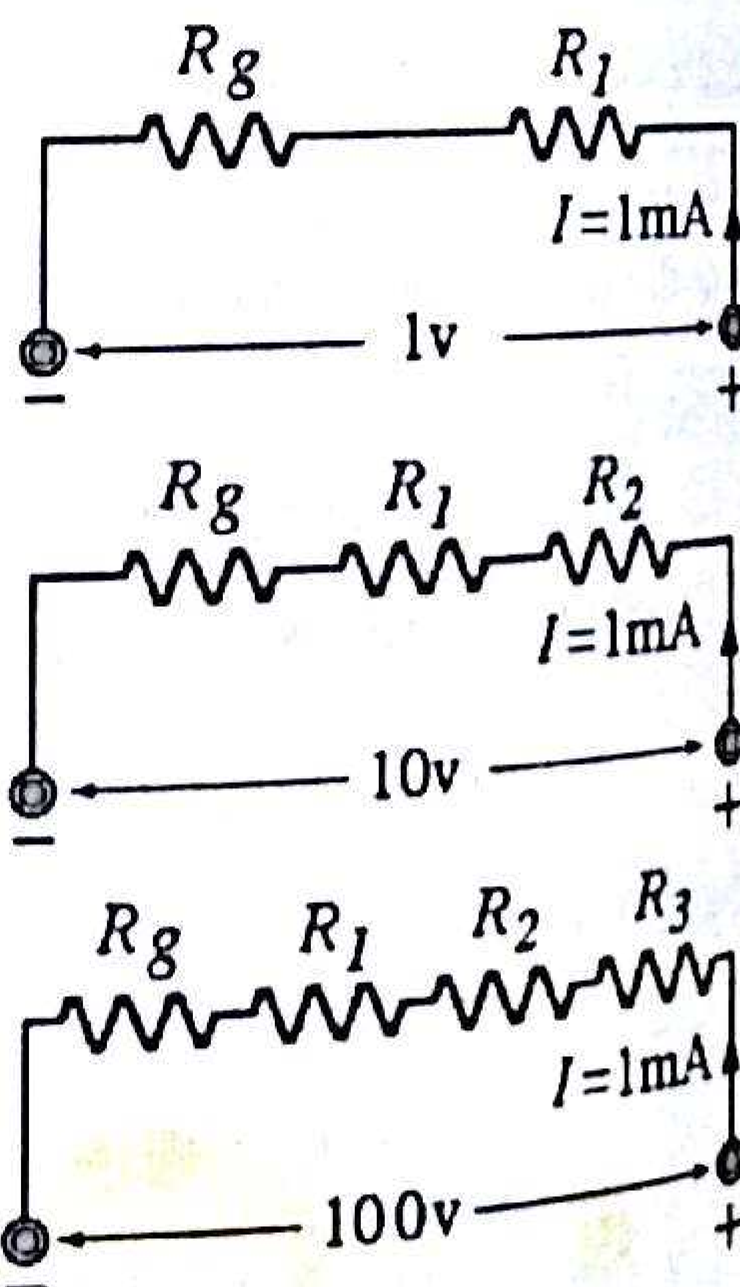
$$R_g + R_1 = \frac{1{,}0\text{v}}{1\text{mA}} = 1000\Omega$$

$$R_1 = 1000\Omega - R_g = 1000\Omega - 50\Omega = 950\Omega$$

Escala 10 v:

$$R_g + R_1 + R_2 = \frac{10\text{v}}{1\text{mA}} = 10\text{k}\Omega$$

$$R_2 = 10\text{k}\Omega - (R_g + R_1) = 10\text{k}\Omega - 1\text{k}\Omega = 9\text{k}\Omega$$



Escala 100 v:

$$R_g + R_1 + R_2 + R_3 = \frac{100\text{v}}{1\text{mA}} = 100\text{k}\Omega$$

$$R_3 = 100\text{k}\Omega - (R_g + R_1 + R_2) = 100\text{k}\Omega - 10\text{k}\Omega = 90\text{k}\Omega$$

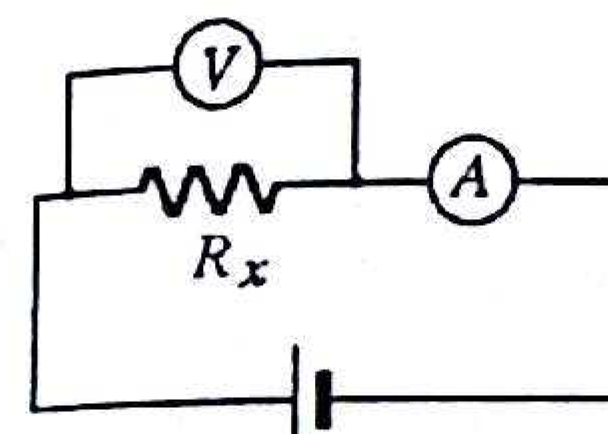
Observe que la resistencia que ofrece el voltímetro al circuito de medición es diferente en los distintos rangos de voltajes a medir.

Respuesta:

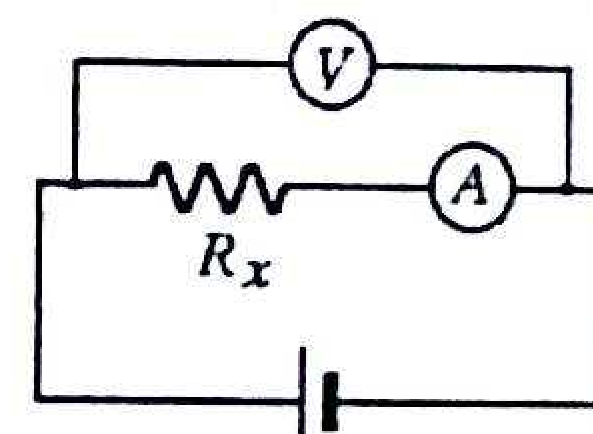
$R_1 = 950\ \Omega$
$R_2 = 9\ \text{k}\Omega$,
$R_3 = 90\ \text{k}\Omega$

PR-7.07. *Medición de R con voltímetro y amperímetro.*

Se desea medir una resistencia R_x desconocida empleando una batería, un voltímetro de resistencia R_V y un amperímetro de resistencia R_A. Existen dos métodos de conexión:



Método 1



Método 2

Como los instrumentos no son ideales, en ambos casos la razón de las lecturas (*V/I*) nos da solo un valor aparente de la resistencia incógnita.

a) Determine el verdadero valor de R_x en cada caso, en términos de la razón (*V/I*).

b) Suponiendo que no se conocen ni R_A ni R_V, ¿cómo se podría determinar valor de R_x?

Solución: a) Método 1: Si se conecta el voltímetro en paralelo con R_x, tienen una resistencia equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V}$$

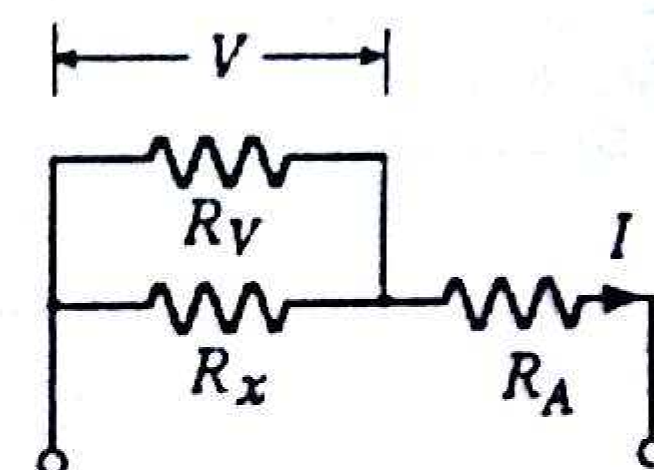
El voltaje que indica el voltímetro es también el voltaje de la resistencia equivalente:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{IR_{eq}} = \frac{1}{I}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V}\right)$$

Despejando, tenemos el inverso del verdadero valor de R_x:

$$\frac{1}{R_x} = \left[\frac{1}{V}\right]_I - \frac{1}{R_V}$$

Se observa que solamente si $R_V >> R$, tendríamos: $V/I = R_x$. Es decir, un voltímetro debe tener una resistencia muy *alta* para que no tome corriente del circuito.



Método 1

Método 2: Si se conecta el amperímetro en serie con R_x, el voltaje V que indica el voltímetro es la suma:

$$V = IR_x + IR_A$$

Despejando R_x:

$$R_x = \left[\frac{V}{I}\right]_2 - R_A$$

Se observa que solamente si $R_A << R_x$, tendríamos: $V/I = R_x$. Esto significa que el amperímetro debe tener una resistencia muy *baja* para que no haya caída de voltaje a través del medidor mismo

b) Si conectamos directamente el voltímetro a través del amperímetro, se tiene:

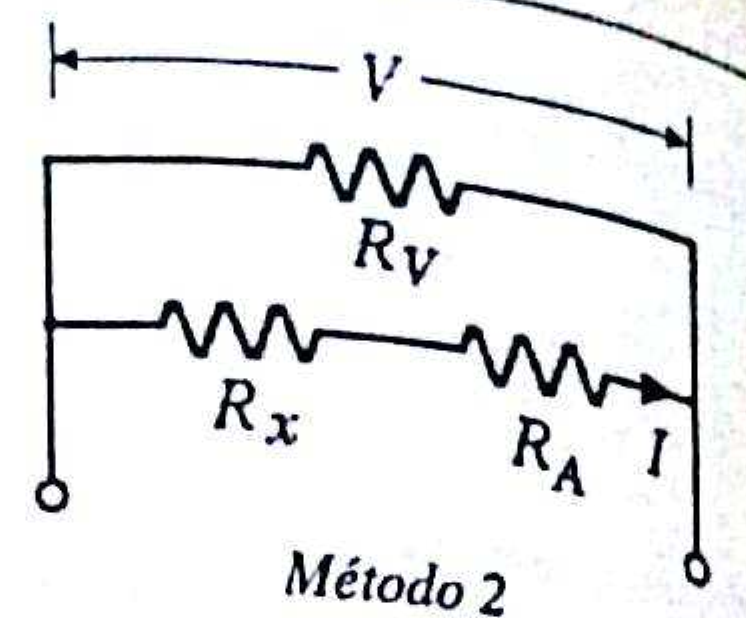
$$(\frac{V}{I}) = R_A$$

Si luego conectamos el voltímetro en paralelo con R_x y el amperímetro (método 2) se obtiene:

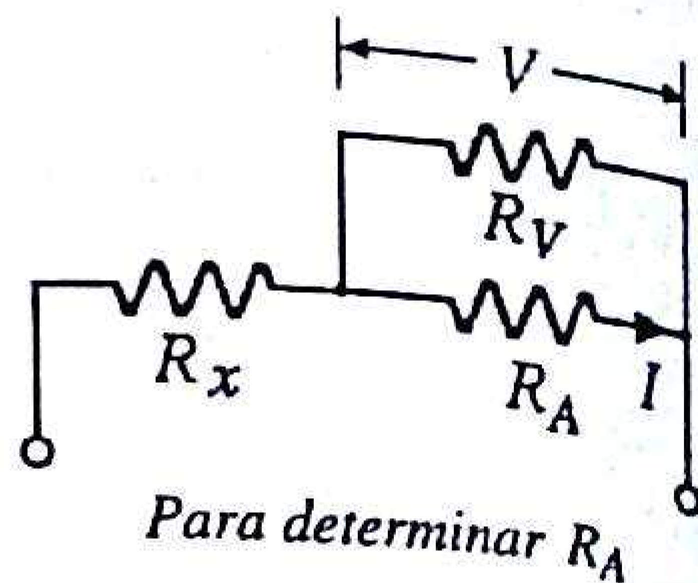
$$V' = I'(R_x + R_A) \qquad \Rightarrow \qquad (\frac{V}{I})' = R_x + R_A$$

Por lo tanto:

$$R_x = (\frac{V}{I})' - (\frac{V}{I})$$



Método 2



Para determinar R_A

Respuesta:

b) *Método 1:* $R = (\frac{V}{I}) - R_A$

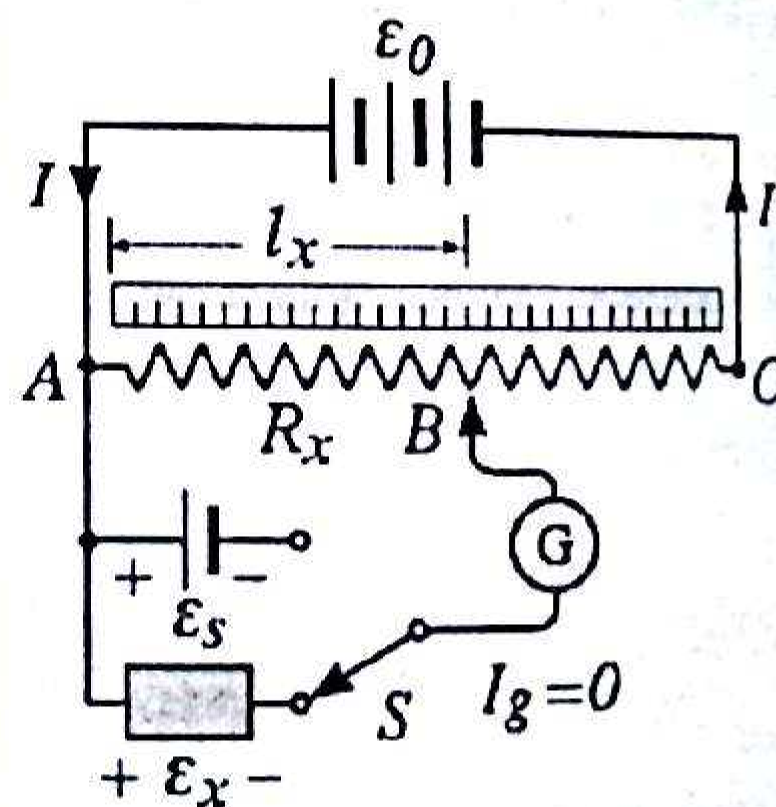
Método 2: $\frac{1}{R} = (\frac{I}{V}) - \frac{1}{R_V}$

b) $R_x = (V/I)' - (V/I)$

PR-7.08. *Medición de voltajes con el potenciómetro*

Un potenciómetro permite medir la fem de una pila ε_x, sin sacarle corriente. Con una batería auxiliar ε_0 se produce una corriente I en un alambre largo y uniforme $\overline{AC}$, que está dividido en dos partes por un contacto deslizante B. Este contacto se ajusta hasta que la corriente I_g del galvanómetro sea cero, y se mide la longitud $\overline{AB} = l_x$. Luego se pasa el interruptor S a una batería estándar de fem ε_s conocida, y se busca la nueva longitud $\overline{AB} = l_s$ que produzca la condición $I_g = 0$. Demuestre que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_s(\frac{l_x}{l_s})$$



Solución: Cuando la fem desconocida está conectada, se ajusta el cursor B hasta que el galvanómetro G dé una lectura nula. En esta condición, toda la corriente I pasa por el tramo de resistencia entre AB y la caída de potencial en ese tramo es:

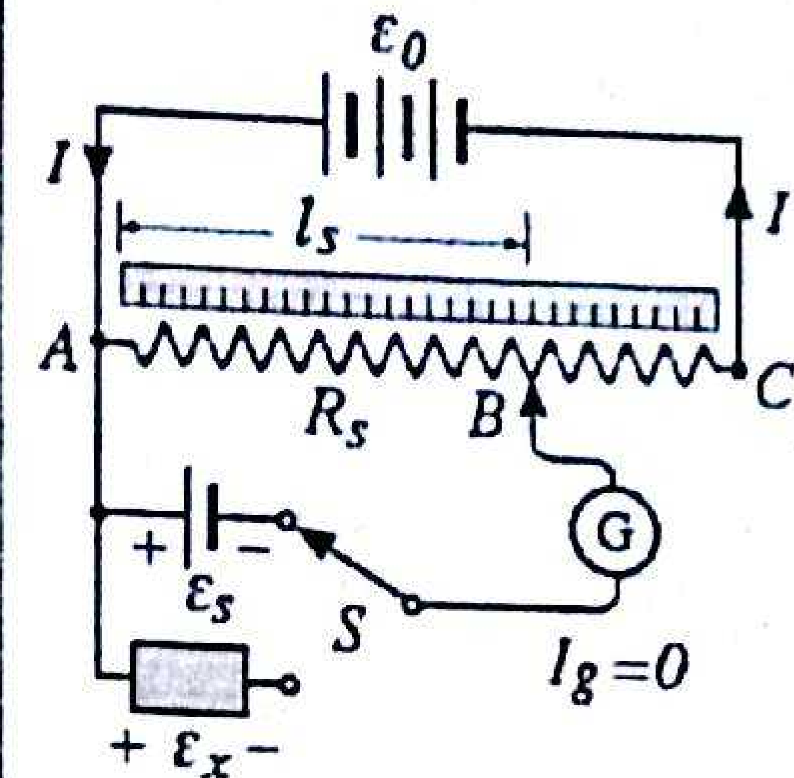
$$\varepsilon_x = IR_x$$

Luego la fem desconocida es reemplazada en el circuito por la fem estándar ε_s que se conoce con precisión, y se procede a ajustar el contacto B hasta una nueva posición en que $I_g = 0$. Si R_s es la nueva resistencia, el voltaje entre A y B será:

$$\varepsilon_s = IR_s$$

Como la corriente I es la misma en ambas situaciones, se tiene:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_s} = \frac{IR_x}{IR_s} = \frac{R_x}{R_s} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_s(\frac{R_x}{R_s})$$



Las resistencias R_x y R_s entre A y B son proporcionales a las longitudes de alambre respectivas, $R_x = kl_x$ y $R_s = kl_s$. La fem desconocida resulta proporcional a la relación entre las longitudes:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_s(\frac{l_x}{l_s})$$

Respuesta:

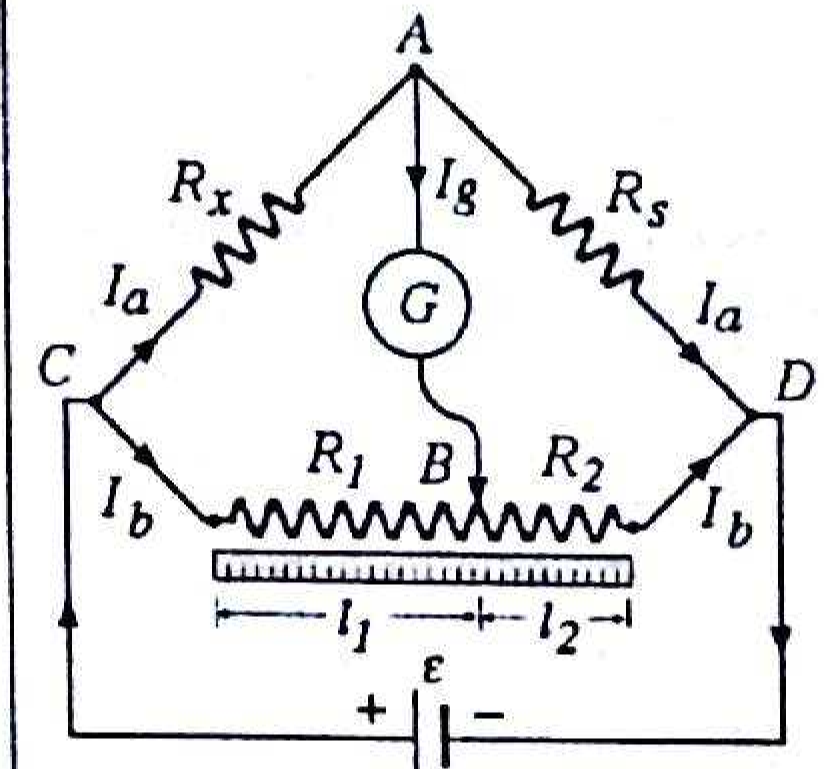
$$\varepsilon_x = \varepsilon_s(\frac{l_x}{l_s})$$

Observe que durante la medición de la fem, no pasa corriente por la pila de modo que el potenciómetro se comporta como un voltímetro de resistencia infinita.

PR-7.09. *Medición de resistencias con un puente*

El puente de Wheatstone permite hacer medidas precisas de una resistencia desconocida R_x por comparación con una resistencia R_s que se conoce con buena precisión. Un alambre de resistencia largo está dividido en dos secciones de resistencias R_1 y R_2 por un contacto deslizante en B. La relación entre las longitudes l_1 y l_2 se varía hasta que no pase corriente por el galvanómetro y el puente quede *balanceado*. Demuestre que R_x viene dada por la relación:

$$R_x = R_s(\frac{l_1}{l_2})$$



Solución: Cuando el puente está balanceado, no hay corriente entre los nodos A y B y por las resistencias R_x y R_s pasa la misma corriente, I_a, mientras que por R_1 y R_2 pasa la misma corriente, I_b. Al no haber caída de potencial en el galvanómetro ($V_A = V_B$), se cumple:

$$V_{CA} = V_{CB} \quad \Rightarrow \quad I_a R_x = I_b R_I \quad (1)$$

$$V_{DA} = V_{DB} \quad \Rightarrow \quad I_a R_s = I_b R_2 \quad (2)$$

Dividiendo las ecuaciones (1) y (2), se cancelan las corrientes:

$$\frac{R_x}{R_s} = \frac{R_I}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_x = R_s(\frac{R_I}{R_2})$$

Las resistencias de las dos secciones del alambre son proporcionales a las longitudes respectivas, $R_I = kl_I$ y $R_2 = kl_2$. Por lo tanto:

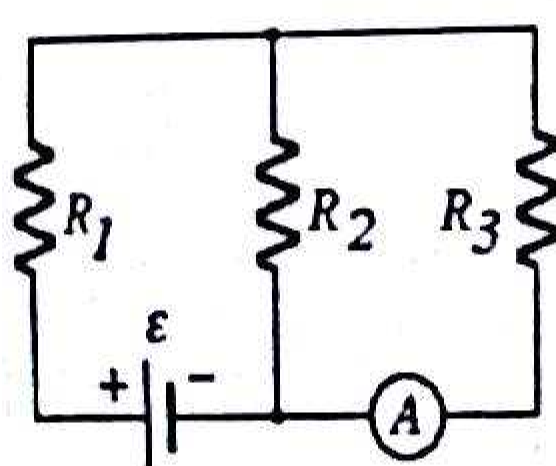
$$R_x = R_s(\frac{l_I}{l_2})$$

Respuesta:

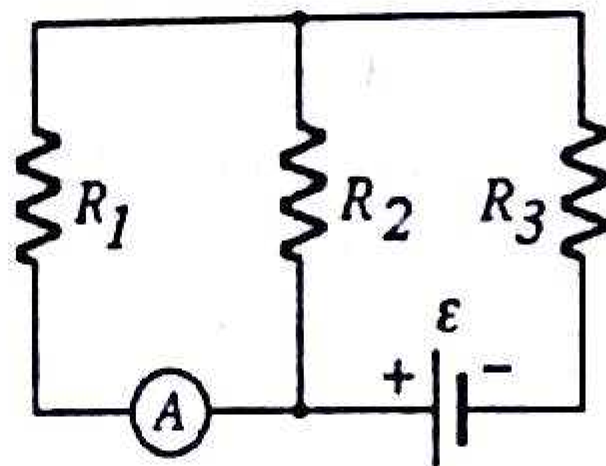
$$R_x = R_s(\frac{l_I}{l_2})$$

PR-7.10. *Intercambio de batería y amperímetro, da igual*

a) Determine la lectura del amperímetro en el circuito *a*.



(Fig. a)



(Fig. b)

b) Si se intercambian de lugar el amperímetro y la batería (Fig. b), demuestre que la lectura del amperímetro no se altera.

Considere que los valores: R_I = 1 Ω, R_2 = 2 Ω, R_3 = 3 Ω, ε = 11 v. El amperímetro y la batería son ideales.

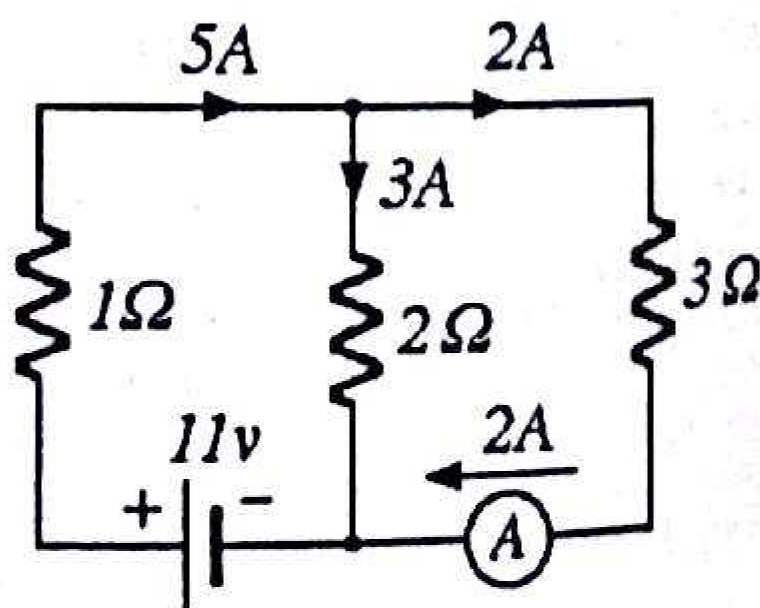
Solución: a) Como la resistencia interna del amperímetro es nula, en el circuito de la *Fig. a*, la batería ve una resistencia equivalente constituida por R_I en serie con la combinación $R_2 \| R_3$, es decir:

$$R = 1\Omega + \frac{(2\Omega)(3\Omega)}{2\Omega + 3\Omega} = 1\Omega + \frac{6}{5}\Omega = \frac{11}{5}\Omega$$

La corriente de la batería es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{11v}{11/5\Omega} = 5A$$

Esta corriente de 5A se bifurca en el nodo de R_2 y R_3 en proporción inversa a sus valores, es decir, 3:2. Por lo tanto, la corriente en R_2 es 3A y en R_3 (y en al amperímetro) es 2A.



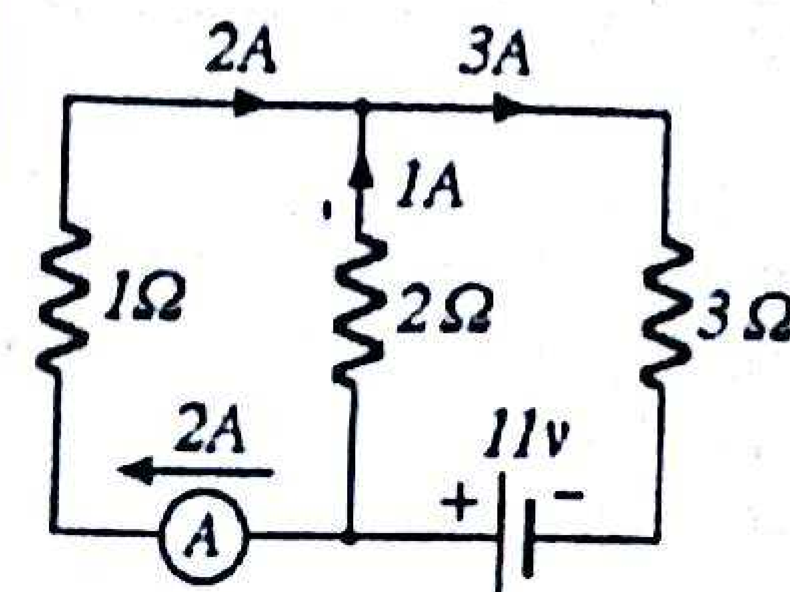
b) En el circuito de la *Fig. b*, la batería ve una resistencia constituida por R_3 en serie con la combinación $R_I \| R_2$:

$$R = 3\Omega + \frac{(2\Omega)(1\Omega)}{2\Omega + 1\Omega} = 3\Omega + \frac{2}{3}\Omega = \frac{11}{3}\Omega$$

La corriente de la batería es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{11v}{11/3\Omega} = 3A$$

Esta corriente de 3A se bifurca en el nodo de R_I y R_2 en proporción inversa a sus valores, es decir, 2:1. Por lo tanto, la corriente en R_2 es 1A y en R_I (y en el amperímetro) es 2A.

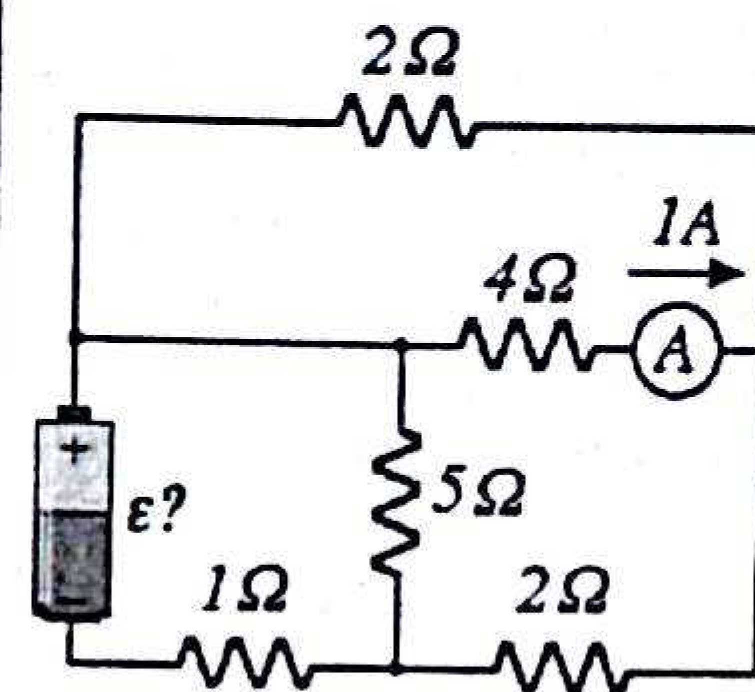


Respuesta:

En ambos casos:
$I_A = 2A$

PR-7.11. *Una pila para que el amperímetro indique 1 A.*

Se requiere de una pila para alimentar el circuito mostrado en la figura de modo que la lectura del amperímetro sea 1 ampere en el sentido indicado. Suponiendo que la resistencia interna de la pila es despreciable, ¿cuál será su fem?



Solución: Como el amperímetro no tiene resistencia, el voltaje en la resistencia superior de 2 Ω es igual al de la resistencia de 4 Ω, es decir, V_{ac} = (4 Ω)(1A) = 4 v. La corriente en esa resistencia es 4v / 2 Ω = 2A. Por lo tanto la corriente en la resistencia inferior de 2 Ω es 1 A + 2A = 3A. Por otra parte, el voltaje en la resistencia de 5 Ω es:

$$V_{be} = V_b - V_e = (1A)(4\Omega) + (3A)(2\Omega) = 10v$$

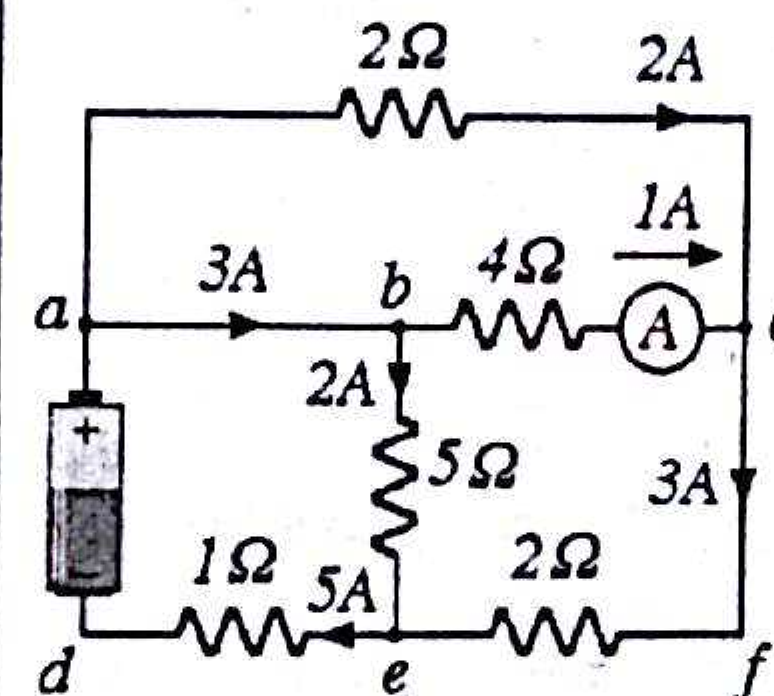
La corriente en la resistencia de 5 Ω es: 10v/5 Ω = 2 A en el sentido de *b* hacia *e*.

Finalmente, para hallar la fem de la batería aplicamos la regla de Kirchhoff a la malla *abed*:

$$(V_a - V_d) - 0 - (2A)(5\Omega) - (5A)(1\Omega) = 0$$

$$\varepsilon = V_{ad} = (2A)(5\Omega) + (5A)(1\Omega) = 15v$$

La pila debe tener una fem de 15 voltios.

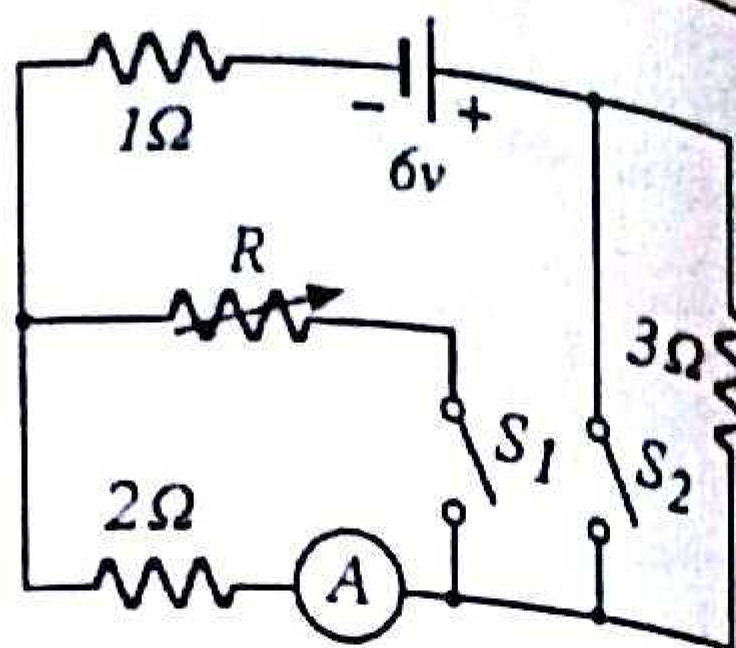


Respuesta:

ε = 15 voltios

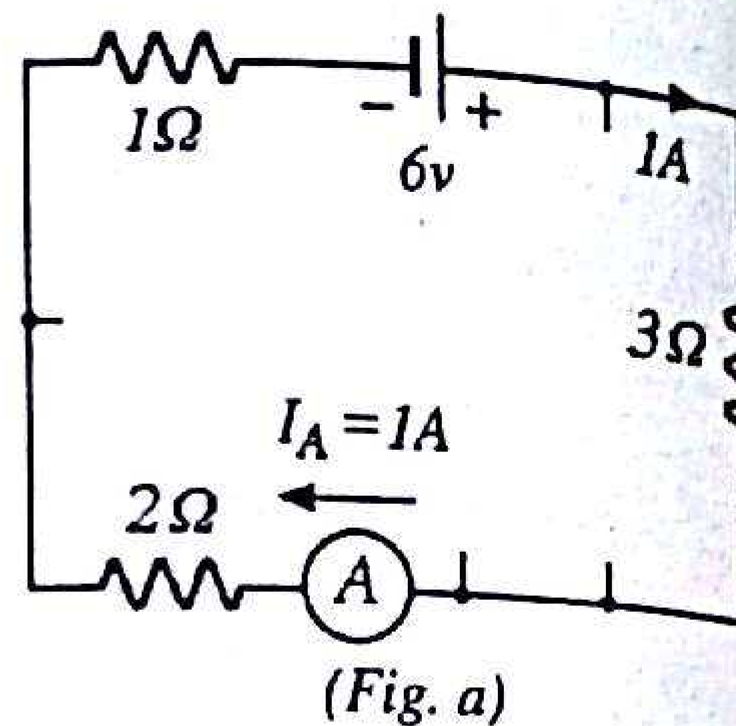
PR-7.12. *La lectura del amperímetro no debe cambiar*

En el circuito mostrado, se va ajustando el valor de la resistencia R del potenciómetro hasta que la lectura del amperímetro sea la misma cuando ambos interruptores están abiertos que cuando ambos están cerrados. ¿Cuál será el valor de R?



Solución: Como el amperímetro no tiene resistencia interna, el valor de la corriente que debe indicar cuando ambos interruptores están abiertos (*Fig. a.*) es:

$$I_A = \frac{\varepsilon}{1\Omega + 3\Omega + 2\Omega} = \frac{6v}{6\Omega} = 1A$$

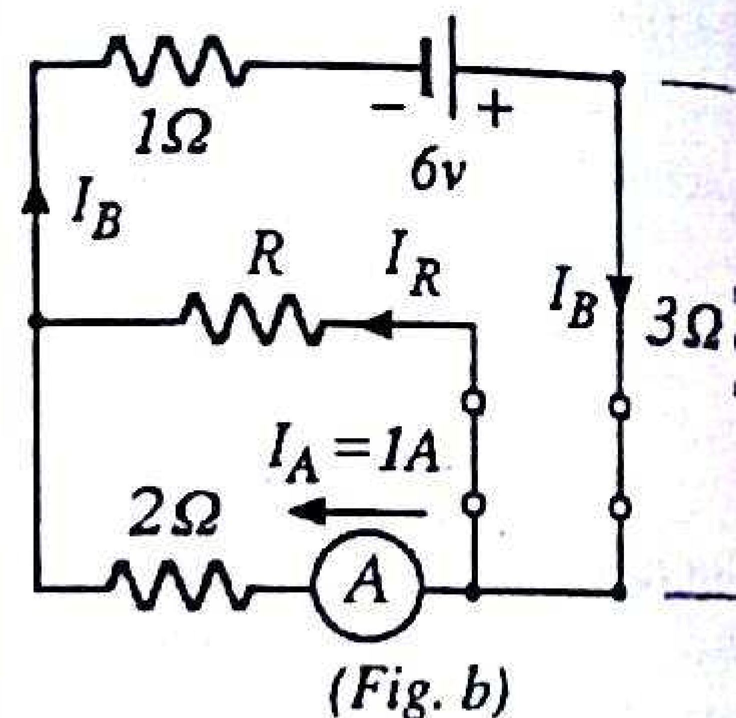


(*Fig. a*)

Después de cerrar S_1 y S_2, el circuito es el de la *Fig. b*. Si la corriente del amperímetro mantiene su valor (I_A = 1 A), el voltaje en la resistencia R es el mismo que en la resistencia de 2Ω, es decir: $V_R = (1A)(2\Omega) = 2v$. Para hallar la corriente en R, escribimos la ecuación de la malla de la batería y el amperímetro:

$$\varepsilon - I_A(2\Omega) - I_B(1\Omega) = 0$$

$$I_B = \frac{\varepsilon - I_A(2\Omega)}{1\Omega} = \frac{6v - (1A)(2\Omega)}{1\Omega} = 4A$$



(*Fig. b*)

La corriente en R es:

$$I_R = I_B - I_A = 4A - 1A = 3A$$

El valor de R es:

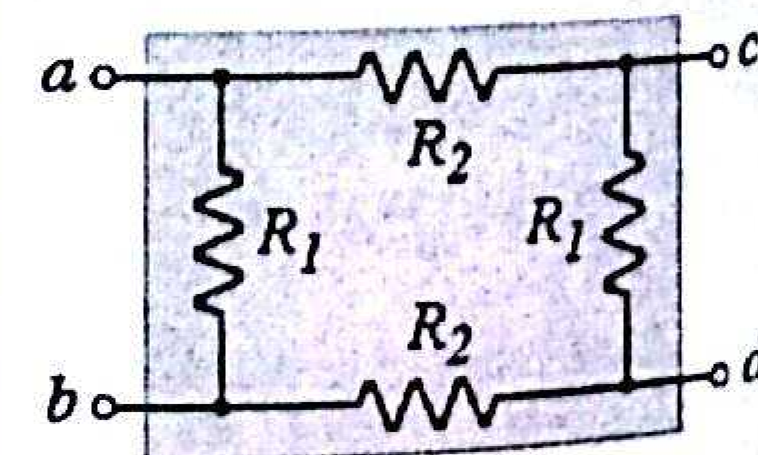
$$R = \frac{V_R}{I_R} = \frac{2v}{3A} = \frac{2}{3}\Omega$$

Respuesta:

$R = (2/3)\ \Omega$.

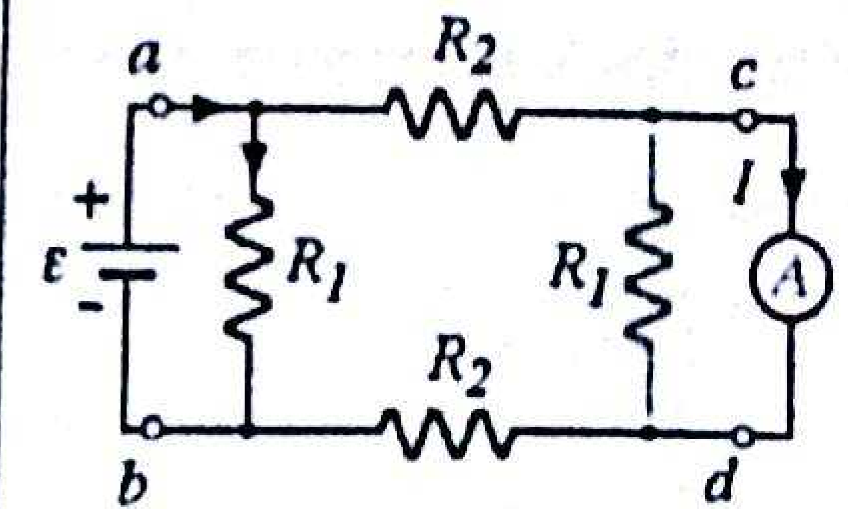
PR-7.13. *Averiguando lo que hay dentro de la caja*

En el interior de una caja negra hay cuatro resistores conectados como indica la figura. Para determinar sus valores se procede a conectar entre los terminales a y b una batería ideal de fem = 10 voltios, y entre los terminales c y d un amperímetro ideal, cuya lectura es 1 mA. Si sustituimos el amperímetro por un voltímetro ideal este indica 5 voltios. ¿Cuánto vale R_1 y R_2?

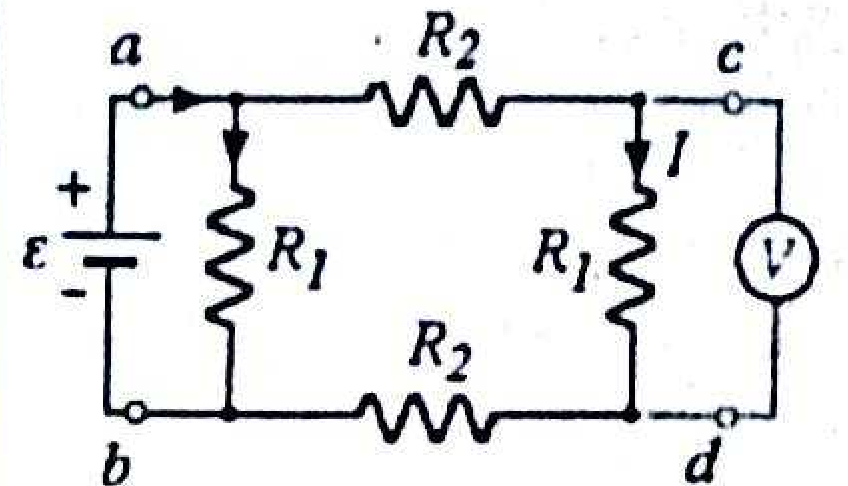


Solución: Cuando se conecta el amperímetro ideal (resistencia cero) entre los terminales c y d, la resistencia R_1 queda sin voltaje (corto-circuitada) y la corriente que indica el amperímetro es:

$$I = \frac{\varepsilon}{2R_2} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{\varepsilon}{2I} = \frac{10v}{2(0.001A)} = 5k\Omega$$



Cuando se sustituye el amperímetro por un voltímetro ideal (resistencia infinita), el circuito queda con los terminales c-d abiertos. La corriente en la rama de la resistencia R_1 en serie con $2R_2$ es: $I = \varepsilon/(R_1 + 2R_2)$ y el voltaje que indica el voltímetro es:



$$V = IR_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + 2R_2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{R_1 + 2R_2}{R_1} = \frac{\varepsilon}{V} = \frac{10v}{5v} = 2$$

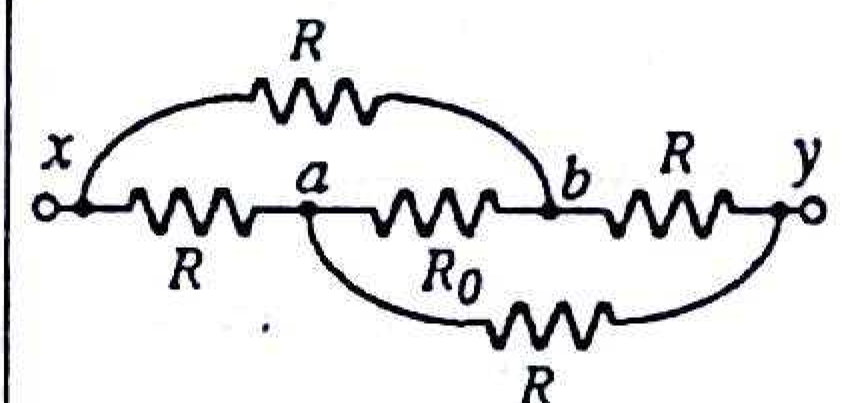
$$R_1 = 2R_2 = 2(5\ k\Omega) = 10\ k\Omega$$

Respuesta:

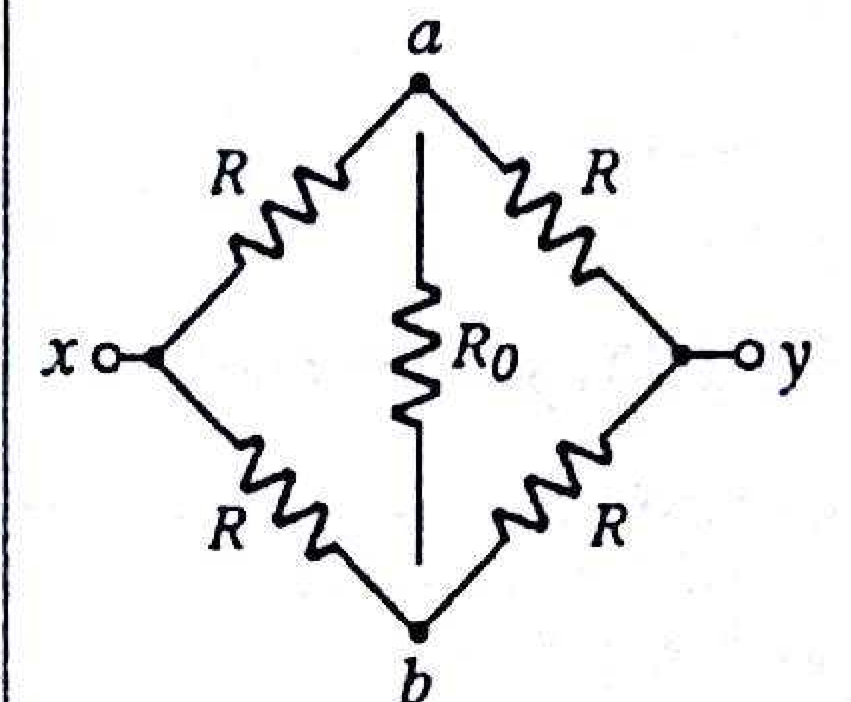
$R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 5\ k\Omega$

PR-7.14. *¿Cuál es la resistencia equivalente?*

Determine la resistencia equivalente entre los terminales x e y del circuito mostrado. Todas las resistencias son de igual valor, R, excepto la del medio, que vale R_0.



Solución: Los alambres de conexión pueden ser re acomodados de manera tal que se aprecie la simetría del circuito respecto de la resistencia central, como muestra la figura. Cuando se conecta una batería entre los terminales x y y, es evidente que debido a la simetría, los nodos a y b están al mismo potencial.



Por lo tanto, no fluye corriente en la resistencia R_0 y este puede ser eliminado, sin que se alteren las corrientes en el resto del circuito. Al hacer esto, nos quedamos con las ramas superior e inferior, cada una con dos resistencias en serie (valor $2R$). Las ramas a su vez están conectadas en paralelo. Por lo tanto:

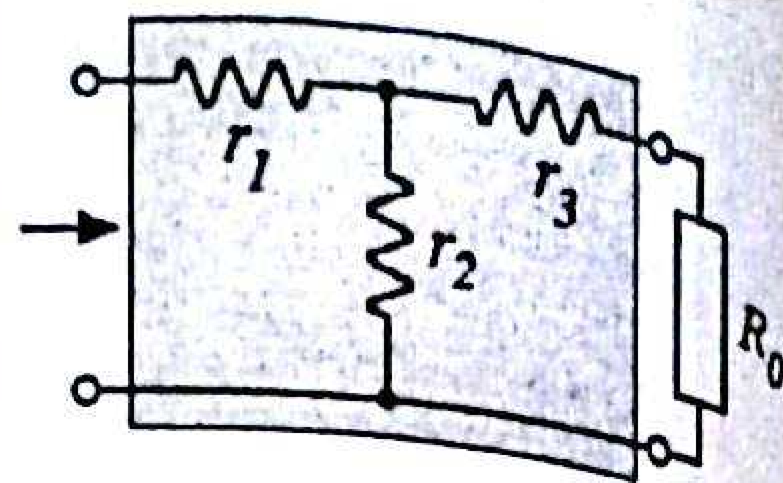
$$R_{xy} = \frac{(2R)(2R)}{(2R + 2R)} = R$$

Respuesta:

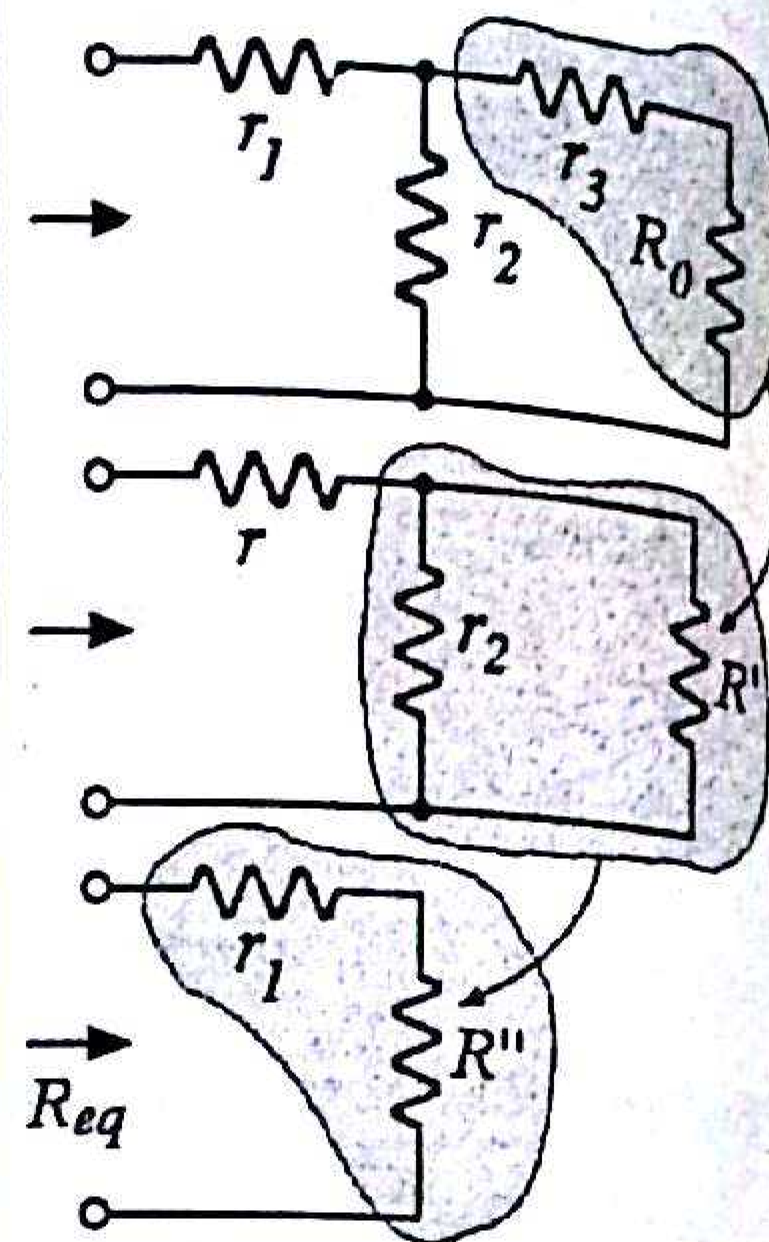
$R_{xy} = R$

PR-7.15. *Intercalar la caja no afecta la resistencia*

Cierto dispositivo tiene resistencia R_o, y cuando se intercala una caja negra , la cual contiene tres resistores idénticos de valor r conectados en "T", como indica la figura, la resistencia equivalente sigue siendo R_o. ¿Cuál será el valo le cada resistencia de la caja negra?



Solución: Para hallar la resistencia entre los terminales de entrada reducimos el circuito paso a paso. En la rama de la derecha, por quedar R_o en serie con r_3 es equivalente a $R' = R_0 + r_3$. A su vez esta combinación queda en paralelo con la resistencia r_2 del medio y la resultante es:



$$R'' = \frac{R' r_2}{R' + r_2} = \frac{(R_0 + r_3) r_2}{R_0 + r_3 + r_2} = \frac{(R_0 + r) r}{R_0 + 2r}$$

Esta combinación queda a su vez en serie con la resistencia r_1 de la izquierda. Por lo tanto, la resistencia equivalente entre los terminales de entrada es:

$$R_{eq} = r_1 + R'' = r + \frac{(R_0 + r) r}{R_0 + 2r}$$

La condición $R_{eq} = R_0$ implica que:

$$r(R_0 + 2r) + r(R_0 + r) = R_0(R_0 + 2r)$$

Agrupando términos y simplificando, se obtiene el valor de r:

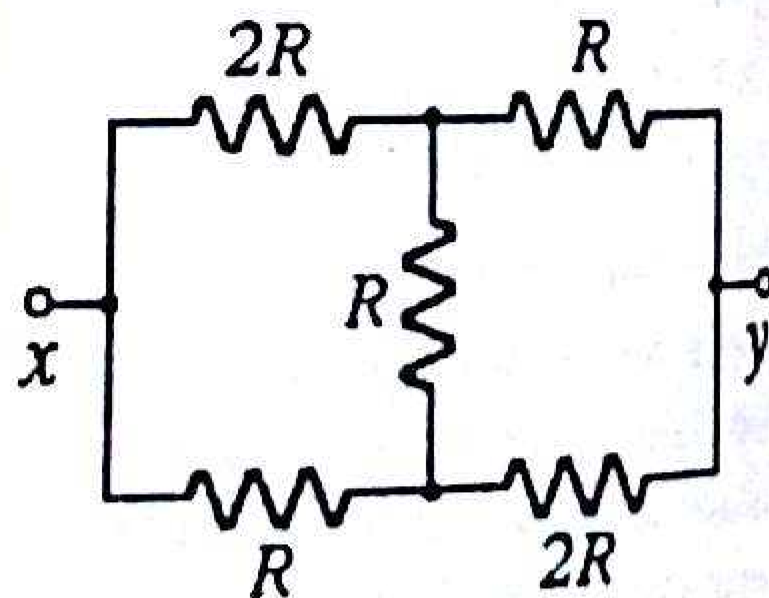
$$3r^2 = R_0^2 \qquad r = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$$

Respuesta:

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$$

PR-7.16. *¿Cuál es la resistencia equivalente?*

Determine la resistencia equivalente entre los terminales x e y del circuito mostrado. Todas las resistencias son de igual valor, R.



Solución: Debido a la simetría del circuito, podemos ver que la corriente en las resistencias R de las ramas de arriba y de abajo deben ser iguales (I_1).

Similarmente la corriente en las resistencias $2R$ de arriba y de abajo, también deben ser iguales (I_2). De esta manera, la corriente en la resistencia central es $(I_2 - I_1)$. Aplicando Kirchhoff a la malla de la izquierda, podemos escribir:

$$I_2(2R) + (I_2 - I_1)R - (I_1)R = 0$$

Simplificando tenemos:

$$3I_2R - 2I_1R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{3}{2} I_2$$

Escribiendo la diferencia de potencial $V_{xy} = V_x - V_y$ como la suma de las caídas de potencial en las dos resistencias de arriba:

$$V_{xy} = I_2(2R) + I_1(R) = 2I_2R + \frac{3}{2} I_2R = \frac{7}{2} I_2R$$

De manera que la resistencia equivalente entre los terminales xy es:

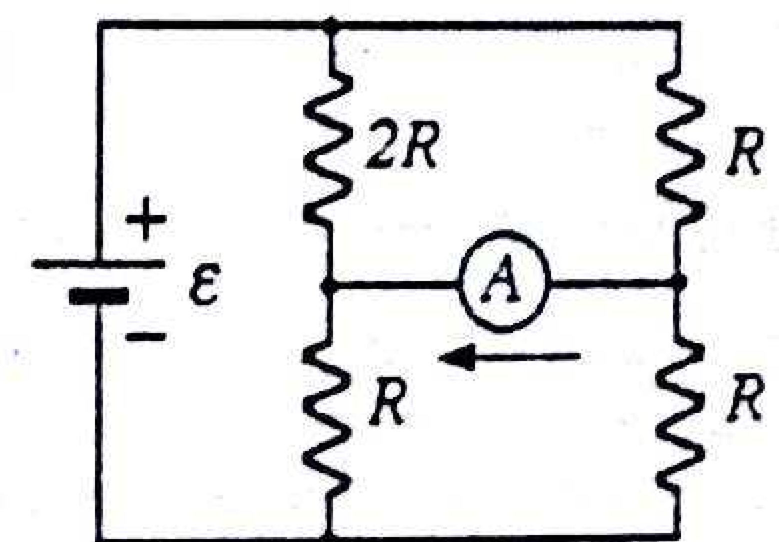
$$R_{xy} = \frac{V_{xy}}{I_1 + I_2} = \frac{\frac{7}{2} I_2R}{\frac{3}{2} I_2 + I_2} = \frac{\frac{7}{2} I_2R}{\frac{5}{2} I_2} = \frac{7}{5} R$$

Respuesta:

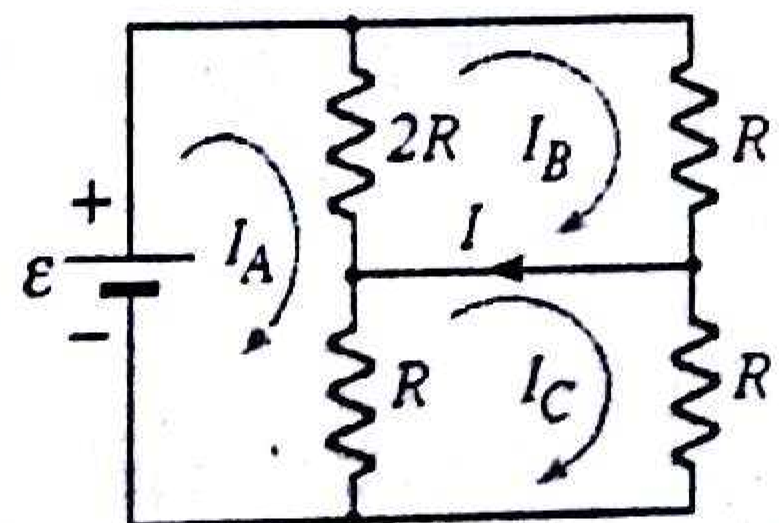
$$R_{xy} = \frac{7}{5} R$$

PR-7.17. *¿Cuál será la lectura del amperímetro?*

En el circuito mostrado, tanto la batería como el amperímetro tienen resistencias despreciables. ¿Cuál será la corriente que indicará el amperímetro en términos de la fem $\mathcal{E}$ y de R?



Solución: Como el amperímetro no tiene resistencia, lo podemos reemplazar por un alambre. Para hallar las corrientes usaremos el procedimiento de asignar (arbitrariamente) sentidos a las corrientes I_A, I_B, e I_C en las tres mallas. La corriente del amperímetro es la diferencia $(I_B - I_C)$. Si recorremos cada malla en los sentidos indicados podemos escribir las tres ecuaciones de Kirchhoff:



Malla A: $\varepsilon - I_A(3R) + I_B(2R) + I_C(R) = 0$

Malla B: $+I_A(2R) - I_B(3R) - 0 = 0$

Malla C: $+I_A(R) - 0 - I_C(2R) = 0$

Ecuación matricial

$$[R][I]=[V]$$

$$\begin{bmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reordenando las ecuaciones y resolviendo el sistema mediante determinantes (regla de Kramer), obtenemos:

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 3R & \varepsilon & -R \\ -2R & 0 & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}} = \frac{4R^2\varepsilon}{18R^3 - 3R^3 - 8R^3} = +\frac{4}{7}\frac{\varepsilon}{R}$$

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 3R & -2R & \varepsilon \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}} = \frac{3R^2\varepsilon}{18R^3 - 3R^3 - 8R^3} = +\frac{3}{7}\frac{\varepsilon}{R}$$

Finalmente, podemos determinar la corriente a través del amperímetro:

$$I = I_B - I_C = \frac{4}{7}\frac{\varepsilon}{R} - \frac{3}{7}\frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{7}\frac{\varepsilon}{R}$$

Respuesta:

$$I = \frac{1}{7}\frac{\varepsilon}{R}$$

PR 7.18. *Cuídese del espionaje telefónico*

Se sospecha que un espía ha conectado un audífono en un lugar desconocido de la línea telefónica bifilar de longitud $L = 20$ km, que conecta el cuartel de policía de la ciudad A con el de la ciudad B. Se sabe que la resistencia por unidad de longitud del cable es $\lambda = 2\ \Omega/km$.



A fin de determinar su ubicación se realizan las siguientes mediciones:

1. Con la línea abierta en B, la resistencia medida en A es 50 Ω.

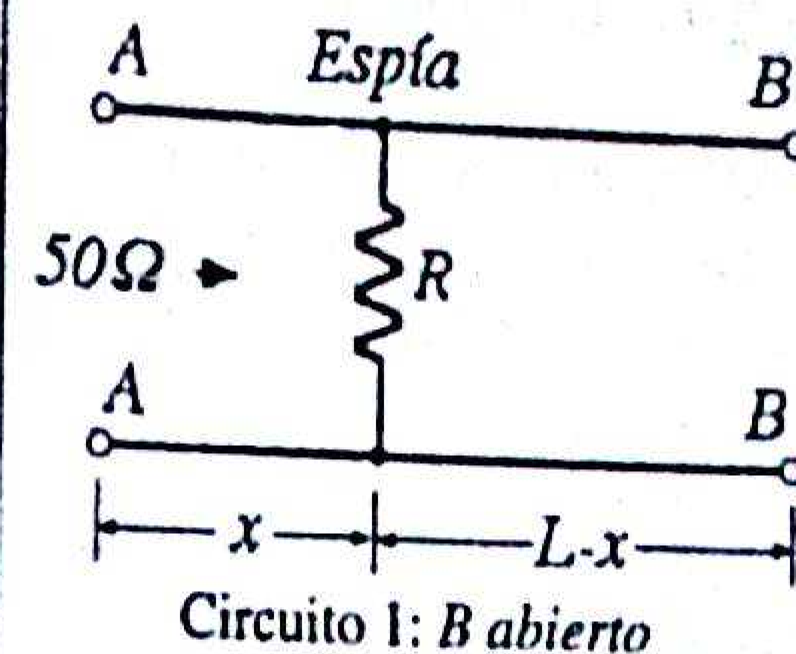
2. Si pone un cortocircuito en B, la resistencia medida en A es 40 Ω.

Determine el lugar donde se encuentra conectado el audífono espía y el valor de su resistencia.

Solución: Sea R la resistencia desconocida del audífono espía y, x su distancia desde la ciudad A. Consideremos los dos circuitos por separado:

Circuito 1: Si la línea en B está abierta, la resistencia total vista desde A consiste de la resistencia de los dos tramos de longitud x de cable de ida y retorno, en serie con R:

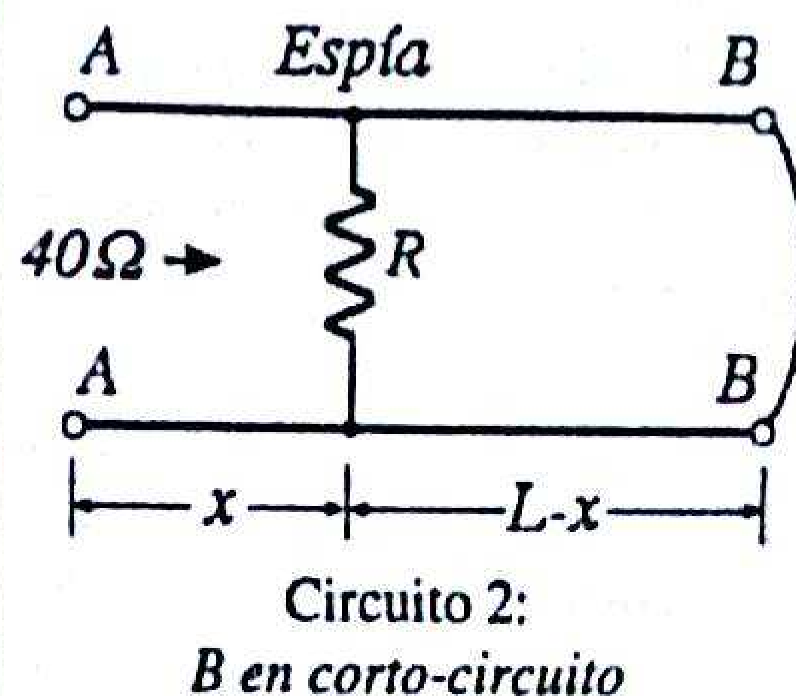
$$50 = 2\lambda x + R \qquad (1)$$



Circuito 1: *B abierto*

Circuito 2: Al cortocircuitar los extremos en B, queda la resistencia R conectada en paralelo con el tramo de longitud $2(L - x)$, y a su vez esta combinación queda en serie con el tramo de longitud $2x$:

$$40\Omega = 2\lambda x + \frac{R[2\lambda(L-x)]}{R + 2\lambda(L-x)} \qquad (2)$$



Circuito 2:
B en corto-circuito

Tenemos así, un par de ecuaciones simultáneas con las dos incógnitas x y R. Podemos despejar R de la ecuación (1) y sustituirla en la ecuación (2).

$$40 = 2\lambda x + \frac{(50 - 2\lambda x)[2\lambda(L-x)]}{50 - 4\lambda x + 2\lambda L}$$

Después de desarrollar y simplificar, nos queda una ecuación cuadrática en x:

$$(4\lambda^2)x^2 - (160\lambda)x + (2000 - 20\lambda L) = 0 \qquad (3)$$

Reemplazando los valores numéricos: $\lambda = 2\ \Omega/km$ y $L = 20$ km, se obtiene:

$$16x^2 - 320x + 1200 = 0 \qquad (4)$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{320 \pm \sqrt{320^2 - 4x16x1200}}{2x16} = \frac{320 \pm 160}{32} \begin{matrix} \to x_+ = 15km \\ \to x_- = 5km \end{matrix}$$

La solución $x_+ = 15$ km, queda descartada ya que al sustituirla en la ecuación (1) arroja un valor negativo de R. Por otra parte, al sustituir en la ecuación (1) la solución $x_- = 5$ km, resulta $R = 30\ \Omega$, lo cual sí tiene significado físico. Concluimos entonces que el espía se encuentra a una distancia $x = 5$ km de la ciudad A y el audífono conectado representa una resistencia de fuga de $R = 30\ \Omega$.

Respuesta:

El audífono espía está a 5 km de A y su resistencia es: $R = 30\ \Omega$.

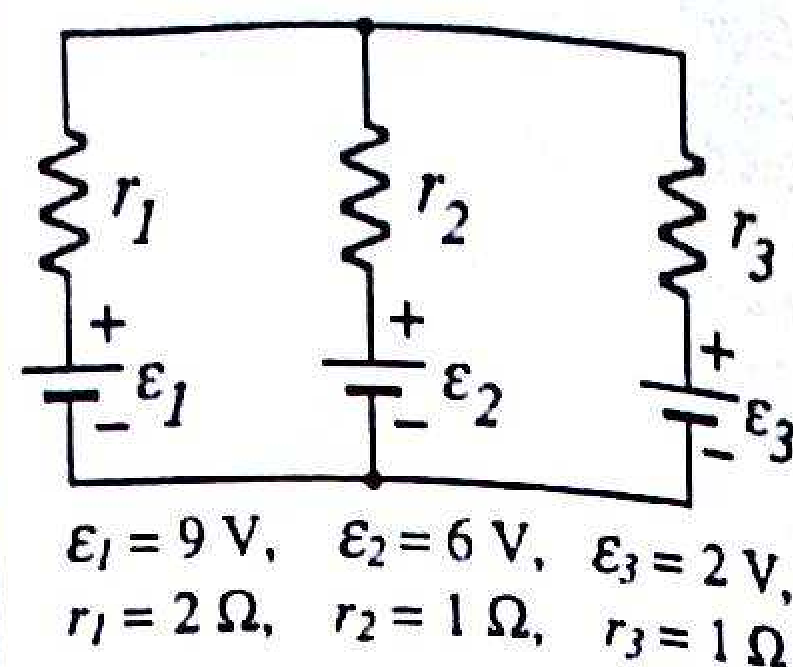
PR-7.19. *Energía suministrada = Energía consumida*

En el circuito mostrado en la figura determine:

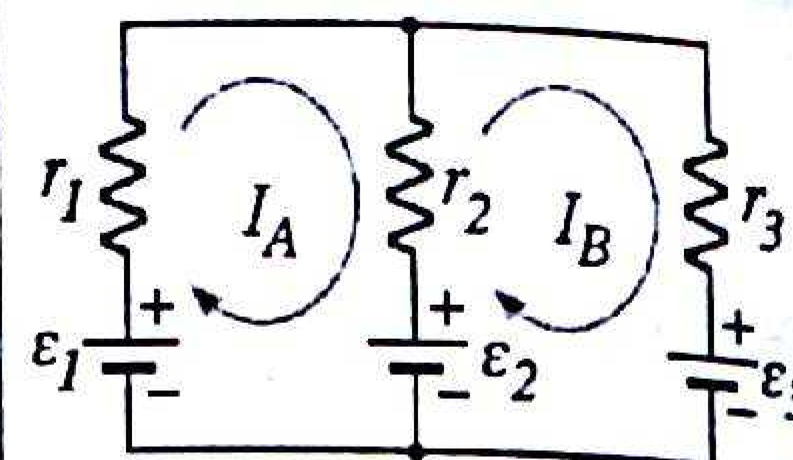
a) La corriente en cada resistencia.

b) Las potencias disipadas en las resistencias y las potencias generadas por las baterías

c) Haga un balance energético para verificar que la potencia total gastada coincide con la potencia total generada.



Solución: a) Podemos asignar a priori corrientes independientes, I_A e I_B en las mallas A y B, que circulan en sentidos horarios. Para escribir las ecuaciones de Kirchhoff, se recorren las mallas en los mismos sentidos que las corrientes:



Malla A: $\quad \varepsilon_1 - (r_1 + r_2)I_A + r_2 I_B - \varepsilon_2 = 0$

Malla B: $\quad \varepsilon_2 + r_2 I_A - (r_2 + r_3)I_B - \varepsilon_3 = 0$

Reordenando:

$$(r_1 + r_2)I_A - r_2 I_B = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$-r_2 I_A + (r_2 + r_3)I_B = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

Ecuación matricial: $[R][I] = [V]$

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Las corrientes I_A e I_B, se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones por la Regla de Kramer:

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & -r_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 & r_2 + r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(r_2 + r_3) + r_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) - r_2^2} = 2\text{A}$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -r_2 & \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(r_1 + r_2) + r_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) - r_2^2} = 3\text{A}$$

Las corrientes en las resistencias r_1, r_3 y r_2 son:

$$I_1 = I_A = 2\text{ A}, \quad I_3 = I_B = 3\text{ A}, \quad I_2 = I_B - I_A = 1\text{ A}$$

b) Las potencias en las resistencias y en las baterías son:

	Gastadas	Generadas
$P_{r1} = I_1^2 r_1 = (2\text{ A})^2(2\,\Omega)$	$= 8$ W	
$P_{r2} = I_2^2 r_2 = (1\text{ A})^2(1\Omega)$	$= 1$ W	
$P_{r3} = I_3^2 r_3 = (3\text{ A})^2(1\Omega)$	$= 9$ W	
$P_{\varepsilon 1} = \varepsilon_1 I_1 = (9\text{v})(2\text{A}) =$		18 W
$P_{\varepsilon 2} = \varepsilon_2 I_2 = (6\text{v})(1\text{A}) =$		6 W
$P_{\varepsilon 3} = \varepsilon_3 I_3 = (2\text{v})(3\text{A}) =$	6 W	
	$\sum P_{gast} = 24$ W	$\sum P_{gen} = 24$ W

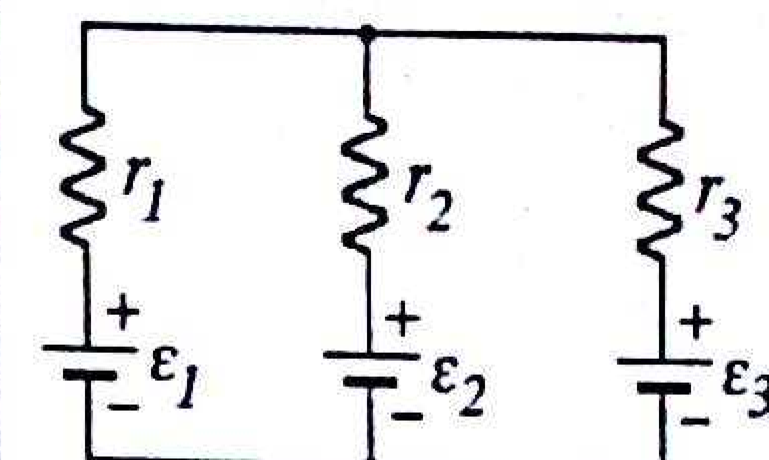
Note que la corriente I_3 entra al borne (+) de la batería ε_3 y por tanto, ésta *absorbe* energía de las otras dos baterías.

Respuesta:

a) $I_1 = 2$A, $I_2 = 1$A, $I_3 = 3$A
b) $P_{r1} = 8$W, $P_{r2} = 1$W, $P_{r3} = 9$W
$P_{\varepsilon 1} = 18$W, $P_{\varepsilon 2} = 6$W, $P_{\varepsilon 3} = -6$W
c) P *gastada* = P *generada* = 24W

PR-7.20. *El principio de superposición en circuitos*

Considere de nuevo el circuito del problema anterior y calcule la corriente en cada resistencia, debida a cada una de las baterías, independiente de la presencia de las demás. Verifique que la corriente neta en cada resistencia coincide la obtenida en el problema anterior.



$\varepsilon_1 = 9$ V, $\varepsilon_2 = 6$ V, $\varepsilon_3 = 2$ V
$r_1 = 2\,\Omega$, $r_2 = 1\,\Omega$, $r_3 = 1\,\Omega$

Solución: Batería $\varepsilon_1 = 9$ v: La resistencia vista desde la batería es r_1 en serie con la combinación $r_2 // r_3$. Es decir:

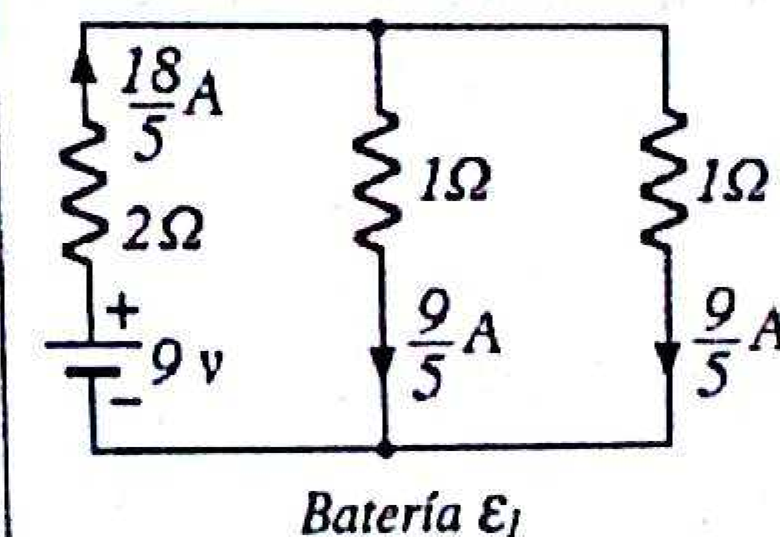
$$R = 2\Omega + \frac{(1\Omega)(1\Omega)}{1\Omega + 1\Omega} = 2\Omega + \frac{1}{2}\Omega = \frac{5}{2}\Omega$$

La corriente en la rama de la batería es:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{9\text{v}}{5/2\Omega} = \frac{18}{5}\text{A}\uparrow$$

Esta corriente de 18/5 A se reparte por igual en las dos resistencias de $1\,\Omega$. Es decir:

$$I_2 = \frac{9}{5}\text{A}\downarrow \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{9}{5}\text{A}\downarrow$$



Batería ε_1

Batería $\varepsilon_2 = 6$ v: La resistencia vista desde la batería es: r_2 en serie con la combinación $r_1 // r_3$. Es decir:

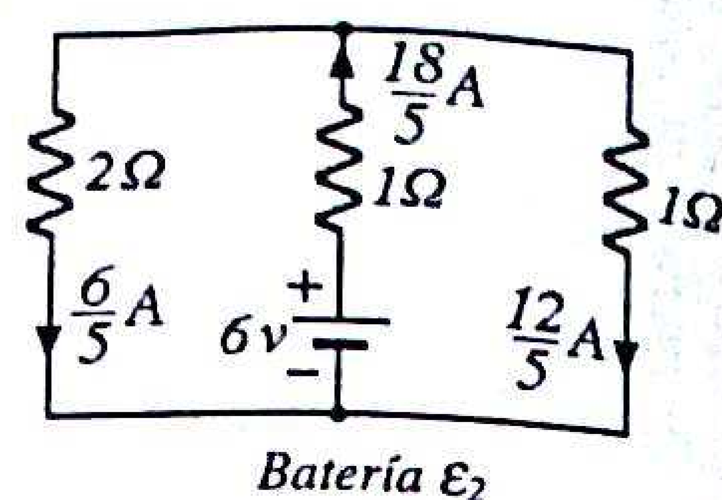
$$R = 1\Omega + \frac{(2\Omega)(1\Omega)}{2\Omega + 1\Omega} = 1\Omega + \frac{2}{3}\Omega = \frac{5}{3}\Omega$$

La corriente en la rama de la batería es:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{6v}{5/3\Omega} = \frac{18}{5}A\uparrow$$

Esta corriente de 18/5A se bifurca en las ramas de r_1 y r_3 en proporción inversa a sus valores, para dar el mismo voltaje, es decir, en la relación 1:2:

$$I_1 = \frac{6}{5}A\downarrow \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{12}{5}A\downarrow$$



Batería ε_2

__Batería__ $\varepsilon_3 = 2$ v: La resistencia vista desde la batería es: r_3 en serie con la combinación $r_1 // r_2$. Es decir:

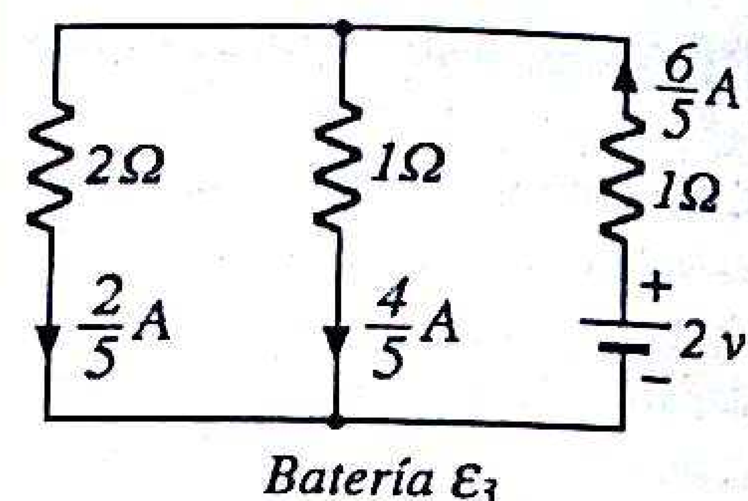
$$R = 1\Omega + \frac{(2\Omega)(1\Omega)}{2\Omega + 1\Omega} = 1\Omega + \frac{2}{3}\Omega = \frac{5}{3}\Omega$$

La corriente en la rama de la batería es:

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2v}{5/3\Omega} = \frac{6}{5}A\uparrow$$

Esta corriente de 6/5A se bifurca en las ramas de r_1 y r_2 en proporción inversa a sus valores, para dar el mismo voltaje, es decir, en la relación 1:2:

$$I_1 = \frac{2}{5}A\downarrow \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{4}{5}A\downarrow$$



Batería ε_3

Ahora se procede a sumar las corrientes en cada R:

	ε_1	ε_2	ε_3	Total
R_1:	$\frac{18}{5}A\uparrow$	$\frac{6}{5}A\downarrow$	$\frac{2}{5}A\downarrow$	$\sum I_1 = \frac{10}{5}A = 2A\uparrow$
R_2:	$\frac{9}{5}A\downarrow$	$\frac{18}{5}A\uparrow$	$\frac{4}{5}A\downarrow$	$\sum I_2 = \frac{5}{5}A = 1A\uparrow$
R_3:	$\frac{9}{5}A\downarrow$	$\frac{12}{5}A\downarrow$	$\frac{6}{5}A\uparrow$	$\sum I_3 = \frac{15}{5}A = 3A\downarrow$

Queda demostrado que las corrientes resultantes de la superposición son las mismos que fueron obtenidas en el problema anterior, donde resolvimos el mismo circuito pero con la presencia simultanea de las tres baterías.

Note que el principio de superposición no se puede aplicar a las potencias individuales:

$$P_R = [\sum I_k]^2 R \neq \sum I_k^2 R$$

Respuesta:

$I_1 = 2A,\ I_2 = 1A,\ I_3 = 3A$

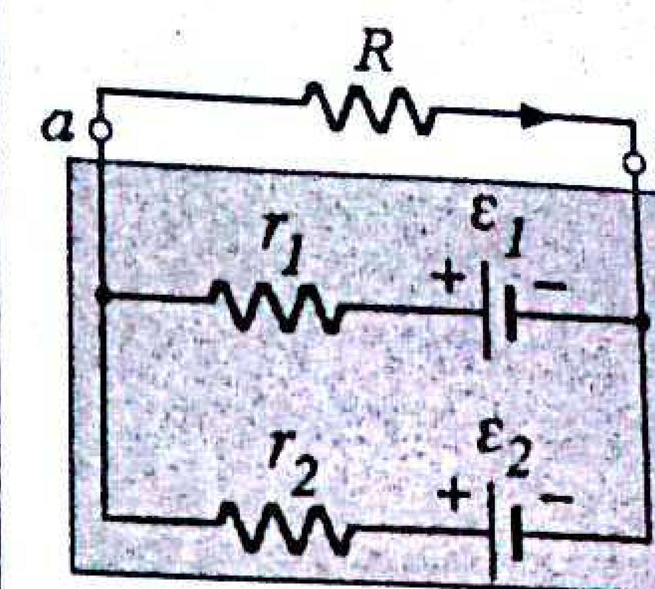
PR-7.21. *El teorema de Thévenin*

Según el teorema de Thévenin cualquier parte de un circuito que solo contenga baterías y resistores puede ser sustituido por una sola batería en serie con una resistencia. La fem ε_T de la batería es la diferencia de potencial entre los terminales a y b abiertos y la resistencia equivalente r_T es la que se *ve* desde esos terminales estando las baterías cortocircuitadas.

a) Determine el equivalente Thévenin entre los terminales a y b para el circuito sombreado.

b) Con ε_T y r_T halle la corriente en la resistencia R.

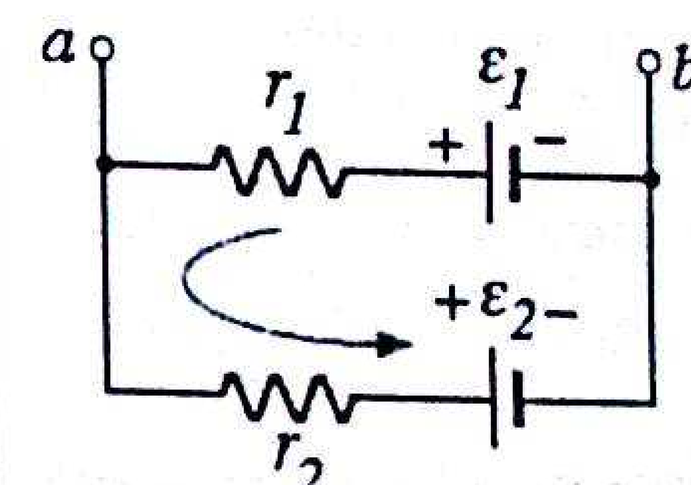
c) Calcule el valor de la corriente en R resolviendo el circuito original y compárelo con el método de Thévenin.



$r_1 = 3\Omega,\ r_2 = 6\Omega,\ R = 1\Omega$
$\varepsilon_1 = 4v,\ \varepsilon_2 = 1v$

Solución: a) Considerando el circuito sombreado con los terminales abiertos a y b, la corriente es:

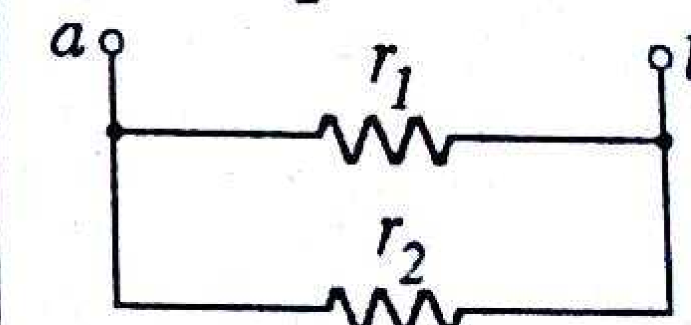
$$I = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(r_1 + r_2)$$



La fem de Thevénin es el voltaje entre los terminales:

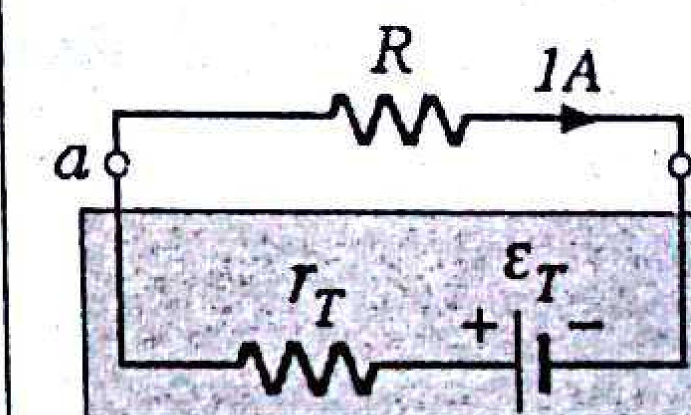
$$\varepsilon_T = V_{ab} = \varepsilon_1 - Ir_1 = \varepsilon_1 - (\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2})r_1$$

$$\varepsilon_T = \frac{r_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} = \frac{(6\Omega)(4v) + (3\Omega)(1v)}{(3\Omega + 6\Omega)} = 3v$$



La resistencia Thévenin es r_1 en paralelo con r_2:

$$r_T = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{(3\Omega + 6\Omega)} = 2\Omega$$



Con el circuito equivalente Thévenin mostrado podemos calcular ahora la corriente en la resistencia externa R:

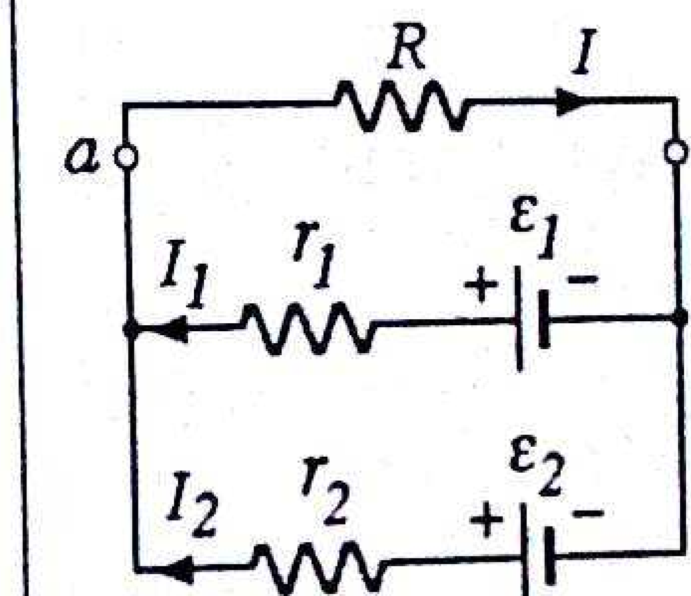
$$I = \frac{\varepsilon_T}{r_T + R} = \frac{3v}{2\Omega + 1\Omega} = 1A$$

b) Para el circuito original escribimos las tres ecuaciones de mallas y nodos con las tres incógnitas I_1, I_2 e I:

$$\varepsilon_2 - I_2 r_2 - IR = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_1 - I_1 r_1 - IR = 0 \qquad (2)$$

$$I = I_1 + I_2 \qquad (3)$$



Si multiplicamos la Ec. 1 por r_1 y la Ec. 2 por r_2, y luego sumamos las dos ecuaciones, encontramos:

$$r_1\varepsilon_2 + r_2\varepsilon_1 - r_1r_2(I_1+I_2) - R(r_1+r_2)I = 0$$

Sustituyendo (I_1+I_2) de la ecuación (3) y despejando I, se obtiene:

$$I = \frac{r_1\varepsilon_2 + r_2\varepsilon_1}{r_1r_2 + R(r_1+r_2)} = \frac{(3\Omega)(1\text{v})+(6\Omega)(4\text{v})}{(3\Omega)(6\Omega)+(1\Omega)(3\Omega+6\Omega)} = 1\text{A}$$

Respuesta:

a) $\varepsilon_T = \frac{r_2\varepsilon_1+\varepsilon_2 r_1}{r_1+r_2} = 3\text{v}$

$r_T = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = 2\Omega$

b) $I = \frac{\varepsilon_T}{r_T+R} = 1\text{A}$

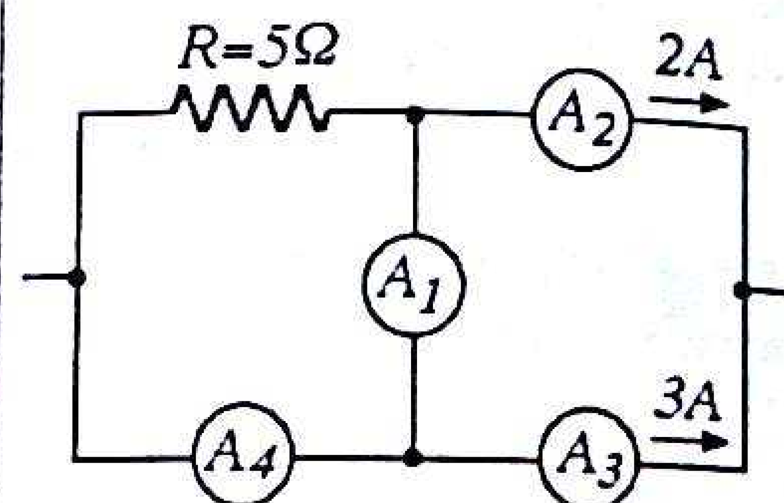
c) $I = \frac{r_1\varepsilon_2+r_2\varepsilon_1}{r_1r_2+R(r_1+r_2)} = 1\text{A}$

PR-7.22. *¿Qué indicarán los otros amperímetros?*

En el circuito mostrado hay una resistencia R y cuatro amperímetros idénticos de igual resistencia interna r, desconocida. Sabemos que la lectura del amperímetro A_2 es 2 amperes y que la del amperímetro A_3 es 3 amperes.

a) ¿Cuáles son las lecturas de los amperímetros A_1 y A_4?

b) Halle la resistencia interna r, de los amperímetros?



Solución: a) Podemos relacionar los voltajes en los amperímetros A_1, A_2 y A_3 aplicando Kirchhoff a la malla *cdbc*:

$$-I_1r-(2A)r+(3A)r=0$$

Simplificando las r, hallamos la corriente I_1:

$$I_1 = 3A-2A = 1A$$

Aplicando Kirchhoff al nodo d, hallamos I_R:

$$I_R + I_1 = 2A \quad \Rightarrow \quad I_R = 2A - I_1 = 2A - 1A = 1A$$

Aplicando Kirchhoff al nodo c, hallamos I_4:

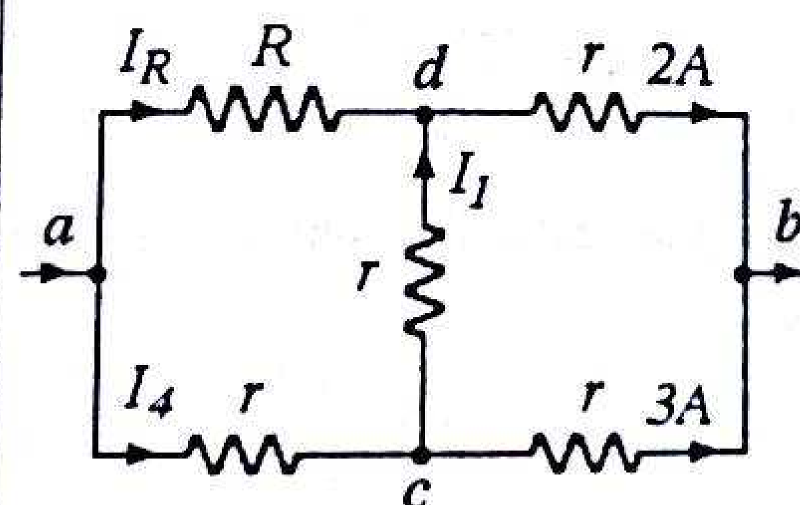
$$I_4 = I_1 + 3A = 1A + 3A = 4A$$

Finalmente, se halla el valor de r aplicando Kirchhoff a la malla *cadc*:

$$I_4r - I_RR + I_1r = 0$$

$$(4A)r-(1A)R+(1A)r=0$$

$$r = R/5$$



Respuesta:

a) $I_1 = 1$ A, $I_4 = 4$ A

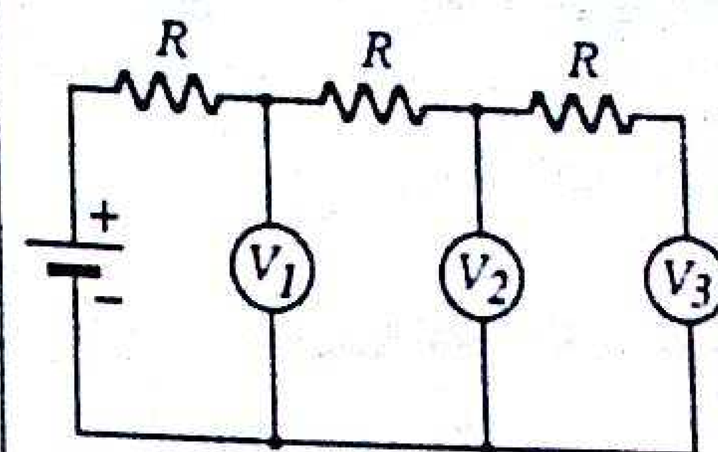
b) $r = R/5$

PR-7.23. *¿Cuál será la lectura del voltímetro V_2?*

En el circuito mostrado se tienen tres resistencias de igual valor, R y tres voltímetros idénticos de resistencias internas r, desconocidas. La lectura del primer voltímetro es $V_1 = 5$ voltios y la del tercero es $V_3 = 1$ voltio.

a) ¿Cuál es la lectura V_2 del segundo voltímetro?

b) ¿Cuál es el valor de r?

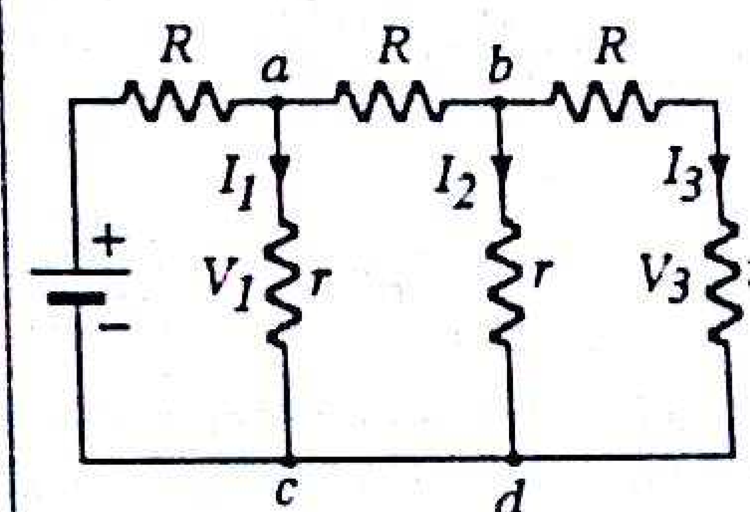


Solución: Por el tercer voltímetro pasa una corriente $I_3 = V_3/r$ que produce en R una caída de potencial $I_3R = V_3R/r$. La corriente en el segundo voltímetro es:

$$I_2 = \frac{V_{bd}}{r} = \frac{I_3(R+r)}{r} = \frac{V_3(R+r)}{r^2}$$

La corriente en la segunda resistencia R es (I_2+I_3) y la caída de potencial allí es:

$$V_{ab} = (I_2+I_3)R = [\frac{V_3(R+r)}{r^2}+\frac{V_3}{r}]R = \frac{V_3R}{r}(\frac{R}{r}+2)$$



El voltaje en el primer voltímetro es:

$$V_1 = V_{ac} = V_{ab}+V_{bd} = \frac{V_3R}{r}(\frac{R}{r}+2)+I_2r$$

$$V_1 = \frac{V_3R}{r}(\frac{R}{r}+2)+\frac{V_3(R+r)}{r^2}r = \frac{V_3R}{r}(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}+3)$$

$$\frac{V_1}{V_3} = 5 = \frac{R}{r}(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}+3) = (\frac{R}{r})^2+1+3\frac{R}{r}$$

Si llamamos $x = R/r$, tenemos una ecuación cuadrática cuya solución positiva es:

$$x^2+3x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x = R/r = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Con este valor de $r = R$, hallamos la lectura del segundo voltímetro:

$$V_2 = I_3(R+r) = \frac{V_3}{r}(R+r) = 2V_3 = 2V$$

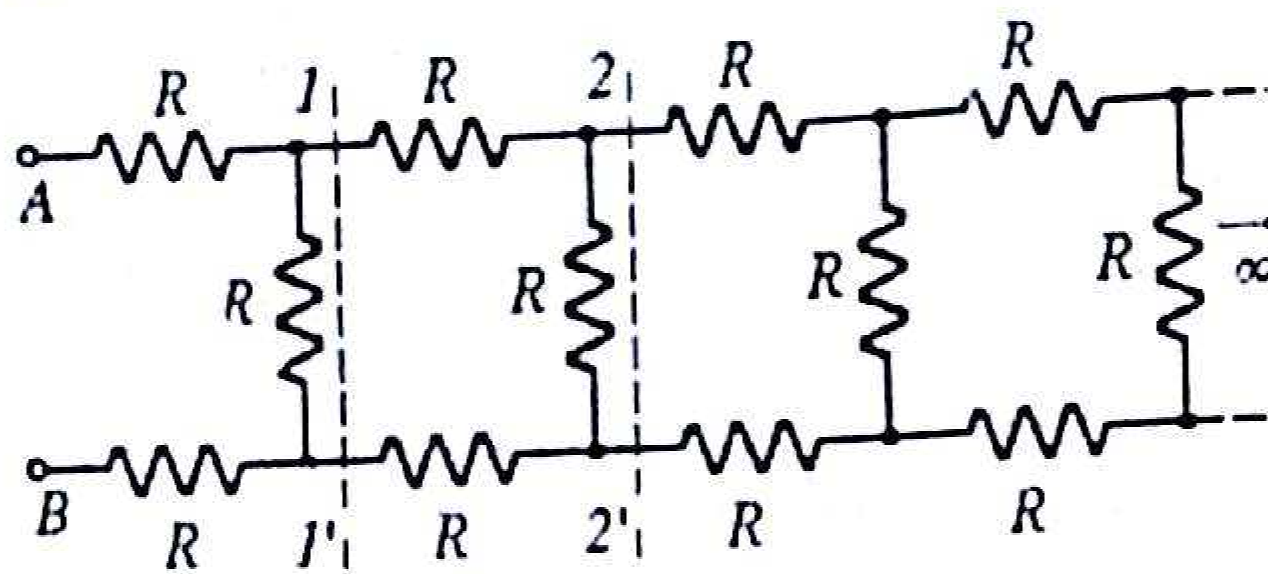
Respuesta:

a) $V_2 = V_3(\frac{R}{r}+1) = 2V$

b) $r = R$

PR-7.24. *Una escalera de resistencias*

Sea una red constituida por n eslabones de resistores de igual valor, R.



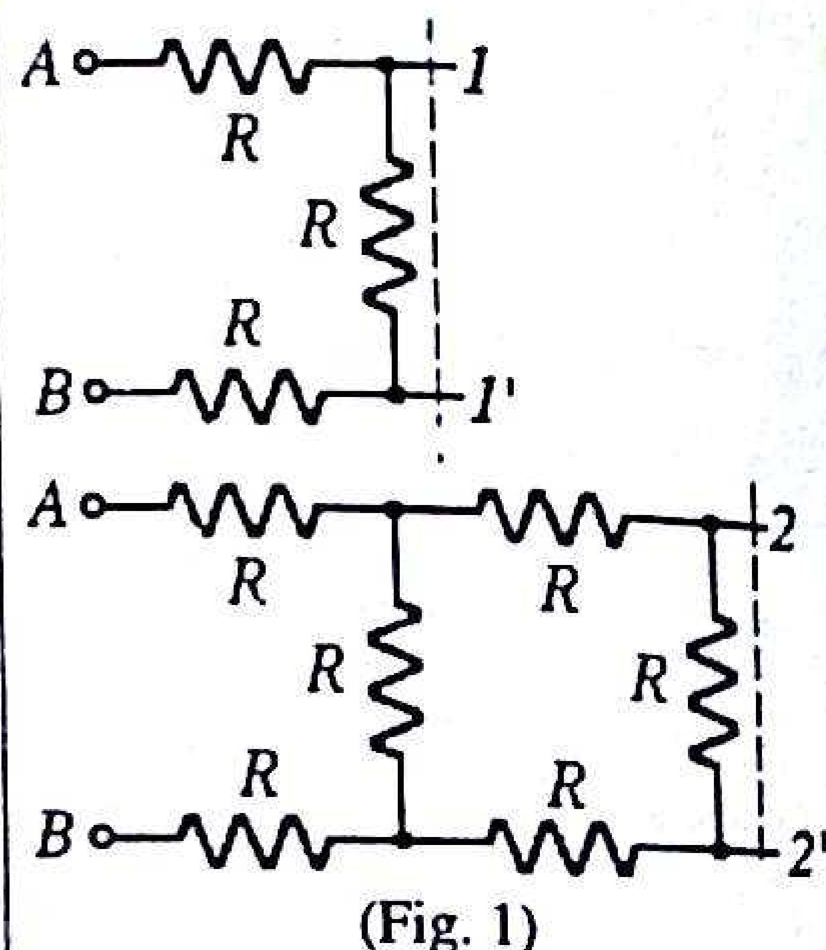
a) Halle la resistencia de entrada para los casos, $n = 1$ y $n = 2$.
b) ¿Cuál será la resistencia de entrada para infinitos eslabones?
c) Suponga que la red contiene un *número finito n* de eslabones, ¿qué resistencia habría que conectar al final del circuito para que la resistencia entre los terminales de entrada A y B no dependa del número de eslabones?

Solución: a) En el caso de un solo eslabón tenemos tres resistencias de igual valor R conectadas en serie. La resistencia de entrada es:

$$R_{AB} = R + R + R = 3R$$

En el caso de dos eslabones tenemos dos resistencias de igual valor R, en serie con la combinación: $R \,//\, 3R$ (Fig. 1). La resistencia de entrada es:

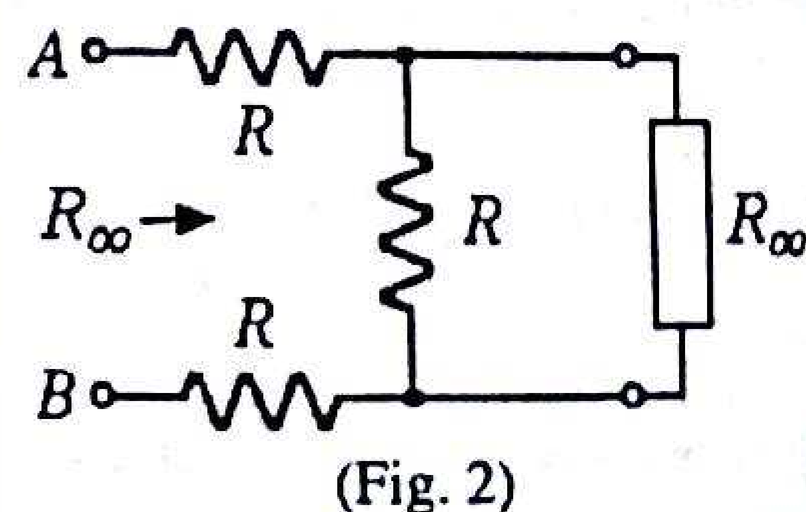
$$R_{AB} = 2R + \frac{(3R)R}{3R+R} = \frac{11}{4}R$$



(Fig. 1)

b) Cuando se tienen infinitos eslabones, si agregamos al principio un eslabón más, no se modifica la resistencia del circuito. Tenemos así el circuito de la Fig. 2, siendo la resistencia entre los terminales de entrada también igual a R_∞:

$$R_{AB} = R_\infty = 2R + \frac{R_\infty R}{R_\infty + R}$$



(Fig. 2)

Se obtiene así una ecuación cuadrática en R_∞:

$$R_\infty^2 - 2RR_\infty - 2R^2 = 0$$

Cuyas raíces son: $R_\infty = R \pm \sqrt{3}R$. La solución positiva es:

$$R_\infty = R(1+\sqrt{3})$$

c) Aplicando el resultado anterior, se deduce que para que una red finita de n eslabones tenga una resistencia de entrada que no dependa del número de eslabones, hay que conectarle en el extremo final una resistencia de valor:

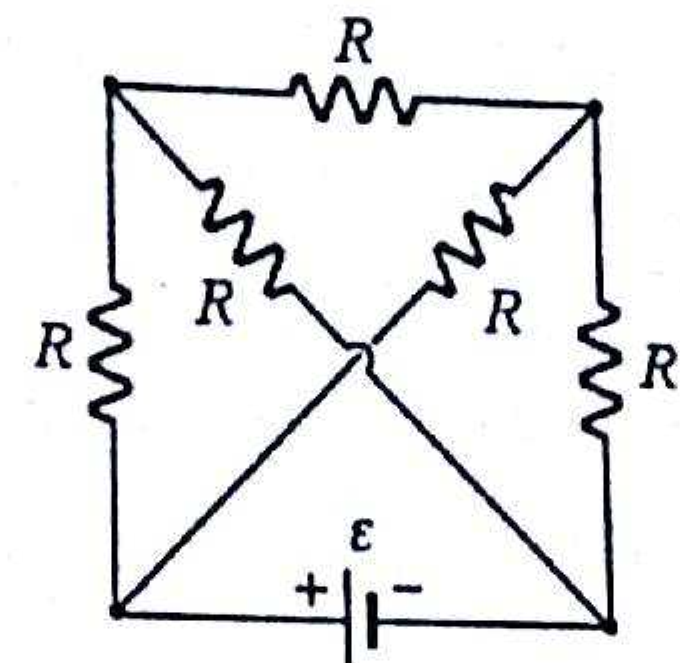
$$R_x = R_\infty = R(1+\sqrt{3})$$

Respuesta:

a) $R_1 = 3R, \quad R_2 = 2{,}75R$
b) $R_\infty = R(1+\sqrt{3})$
c) $R_x = R_\infty = R(1+\sqrt{3})$

PR-7.25. *Determine las corrientes en cada rama*

Para el circuito mostrado, determine:
a) La corriente en cada rama.
b) La resistencia vista desde la batería.



Solución: a) La simetría indica que el número de corrientes a determinar es solo cuatro y que existen solo dos ecuaciones independientes de nodos:

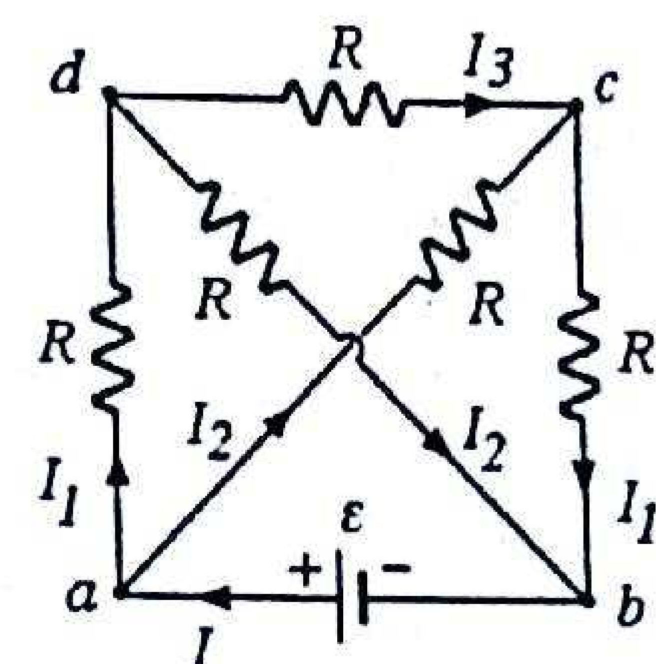
Nodos a y b: $\quad I_1 + I_2 = I \quad$ (1)

Nodos d y c: $\quad I_2 + I_3 = I_1 \quad$ (2)

Existen solo dos ecuaciones independientes de mallas:

Malla $dcbd$: $\quad -I_3R - I_1R + I_2R = 0 \quad$ (3)

Malla $acba$: $\quad -I_2R - I_1R + \varepsilon = 0 \quad$ (4)



De las ecuaciones (2) y (3) encontramos: $I_1 - I_2 = I_2 - I_1$. Es decir, $I_1 = I_2$. De la ecuación (4) se deduce que:

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{2R}$$

De la ecuación (3) hallamos:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.$$

Similarmente, de la ecuación (1) hallamos:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R}$$

b) La resistencia del circuito vista desde la batería es:

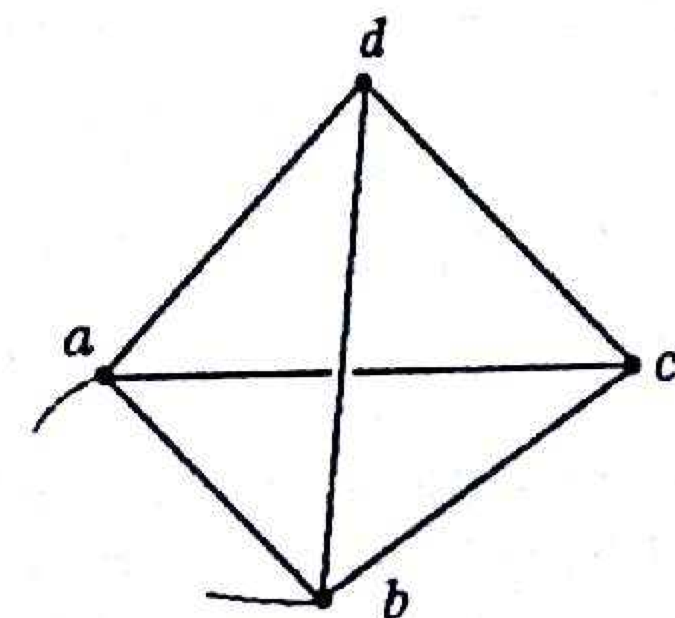
$$R_{ab} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon / R} = R$$

Respuesta:

a) $I_1 = I_2 = \dfrac{\varepsilon}{2R}, \; I_3 = 0, \; I = \dfrac{\varepsilon}{R}$
b) $R_{ab} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon / R} = R$

PR-7.26. *Un tetraedro con alambres de igual resistencia*

Seis alambres idénticos con resistencias iguales a R, se sueldan formando un tetraedro. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre dos vértices cualesquiera?



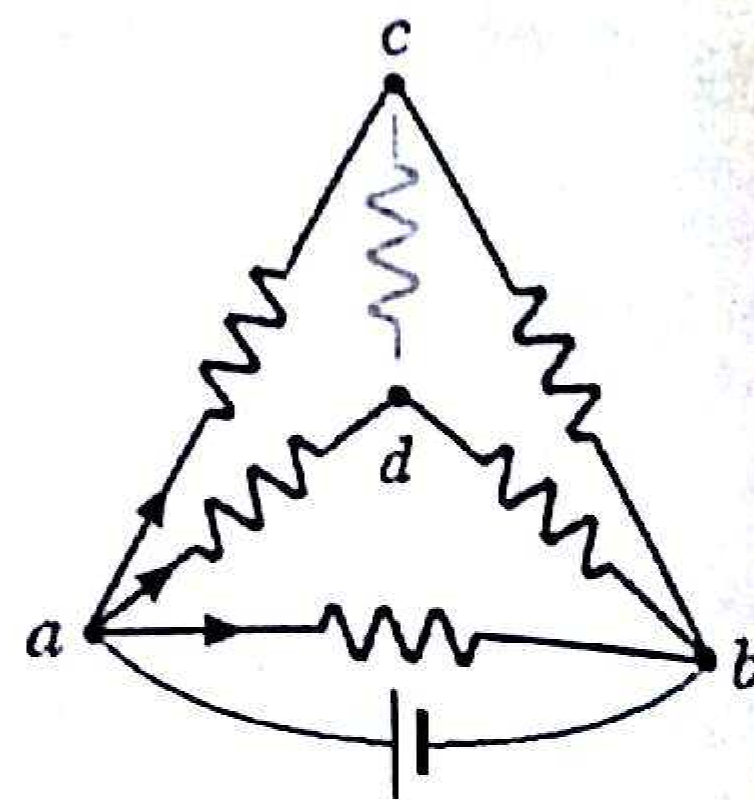
Solución: Si conectamos una batería entre los vértices a y b, la simetría indica que los puntos c y d deben estar al mismo potencial. Esto significa que en la arista cd no circula corriente y podemos removerla sin que se modifiquen las otras corrientes. La ramas acb y adb tienen resistencias respectivas:

$$R_{acb} = R + R = 2R \qquad R_{adb} = R + R = 2R.$$

Estas dos resistencias de valor $2R$ quedan en paralelo y su combinación resulta en una resistencia de valor R. Quedamos finalmente con dos resistencias iguales en paralelo entre los terminales a y b:

$$R_{ab} = \frac{RR}{R+R} = \frac{1}{2}R$$

Observe que este circuito es similar al del problema anterior, excepto que tiene una resistencia adicional entre los terminales a y b.

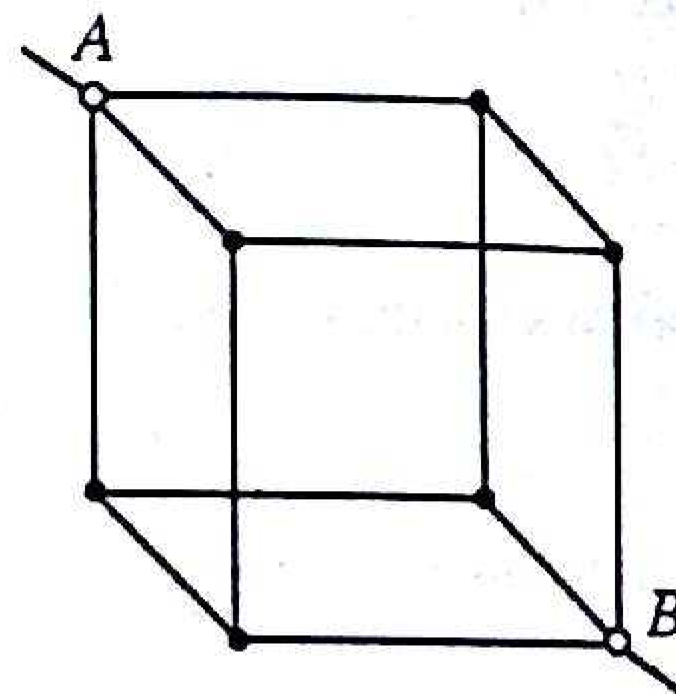


Respuesta:

$$R_{ab} = \frac{1}{2}R$$

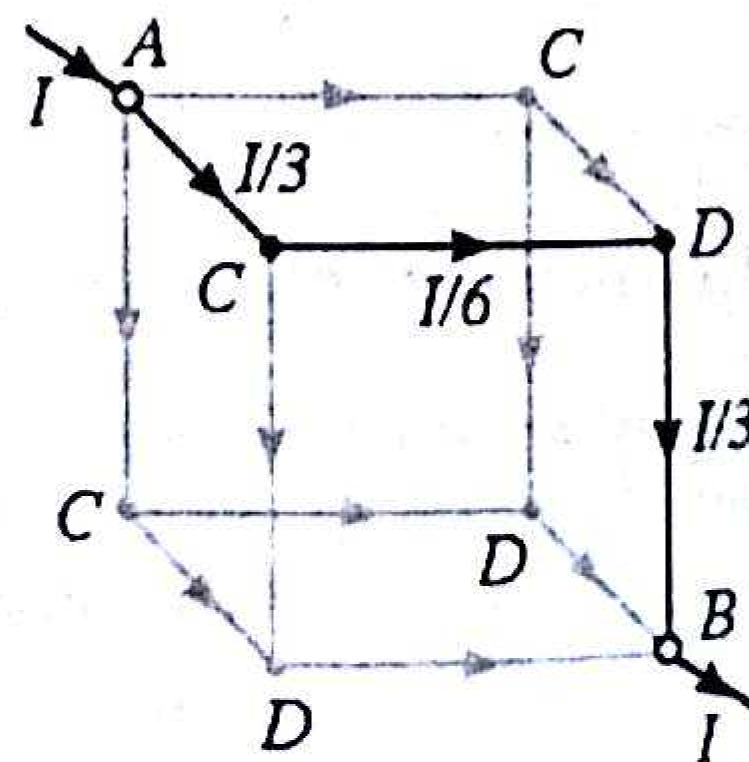
PR-7.27. *Resistencia entre dos esquinas de un cubo I*

Doce alambres idénticos con resistencia R, se sueldan por las puntas formando un cubo, con un alambre en cada arista. ¿Cuál es la resistencia entre las esquinas opuestas de la diagonal A y B del cuerpo del cubo?



Solución: a) Al aplicar una diferencia de potencial entre A y B, pasa una corriente I que entra al cubo por la esquina A y sale por la esquina B. Debido a la simetría, esta corriente se divide en el punto A, en partes iguales ($I/3$) entre las tres aristas. Si consideramos la rama AC, la corriente $I/3$ se ramifica a su vez en el punto C en dos partes iguales de valor $I/6$. La corriente en CD se combina en el punto D con la corriente de igual valor ($I/6$) proveniente de la rama simétrica para dar: $I/6 + I/6 = I/3$ en la rama DB. Finalmente, las tres corrientes de valor ($I/3$) de las ramas simétricas concurren en el punto B para sumar: $I/3 + I/3 + I/3 = I$.

Por otra parte, si recorremos el camino ACDB, la diferencia de potencial entre A y B es la suma de las diferencias de potenciales en las tres ramas consecutivas:



$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CD} + V_{DB} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R = \frac{5}{6}IR$$

Por lo tanto, la resistencia entre A y B es:

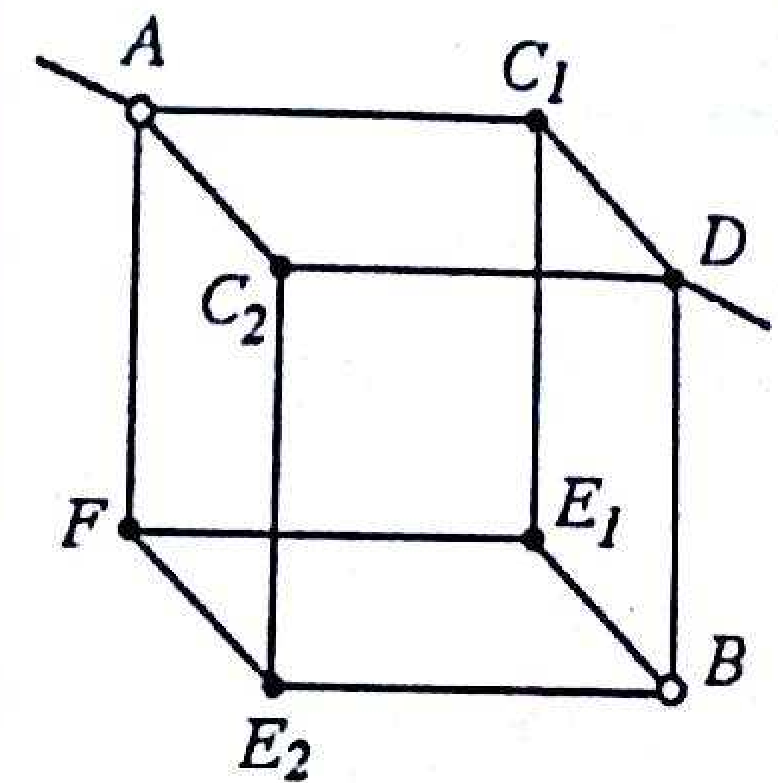
$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{(5/6)IR}{I} = \frac{5}{6}R$$

Respuesta:

$$R_{AB} = \frac{5}{6}R$$

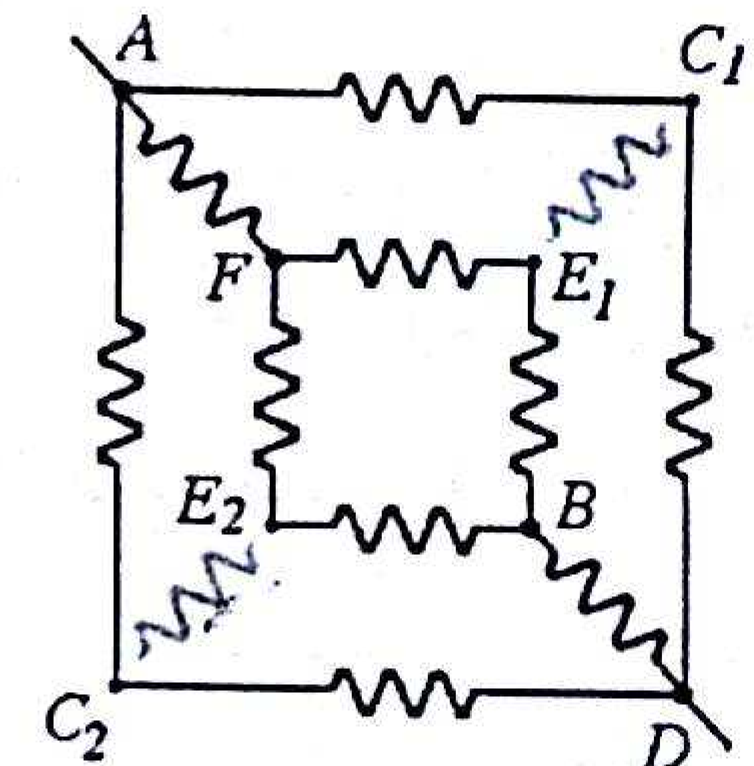
PR-7.28. *Resistencia entre dos esquinas de un cubo II*

Doce alambres idénticos con resistencia R, se sueldan por las puntas formando un cubo, con un alambre en cada arista. ¿Cuál será la resistencia entre las esquinas A y D opuestas de la diagonal de una cara del cubo?



Solución: Si colocamos los alambres en un plano, podemos observar que, por simetría no debe pasar corriente en las ramas $\overline{C_1E_1}$ y $\overline{C_2E_2}$ y por lo tanto, estas resistencias se pueden desconectar sin que con ello se alteren las demás corrientes. En el plano inferior del cubo, las cuatro resistencias equivalen a $2R$ en paralelo con $2R$, resultando $R_{FB} = R$, esto significa que la resistencia serie total $\overline{AFBD}$ equivale a $3R$. Por otra parte, en el plano superior, las resistencias $\overline{AC_1D}$ y $\overline{AC_2D}$ cada una vale $2R$ y la combinación de las dos dan una resultante de R. Por lo tanto, la resistencia total entre los terminales A y D equivalen a una resistencia R en paralelo con $3R$, es decir:

$$R_{AD} = \frac{R(3R)}{R+3R} = \frac{3}{4}R$$

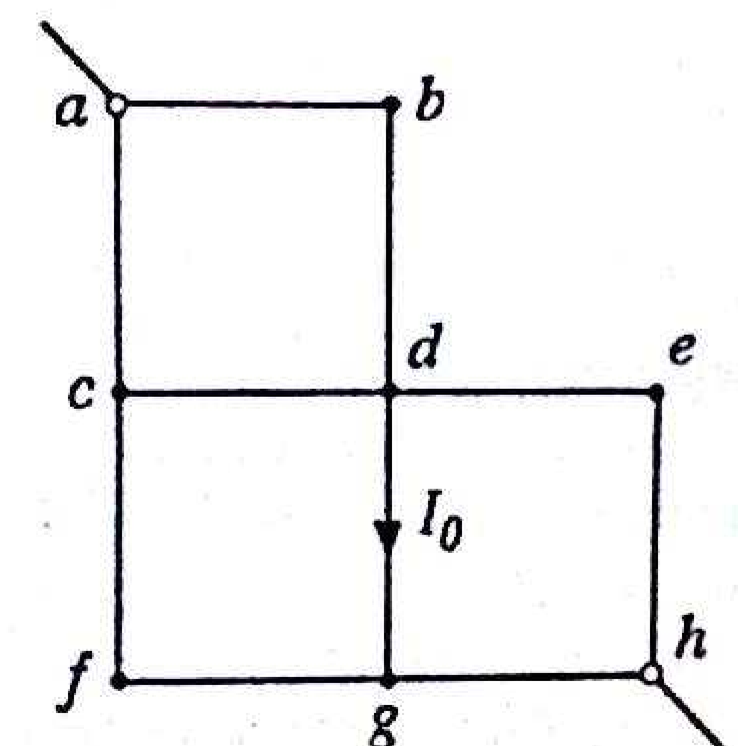


Respuesta:

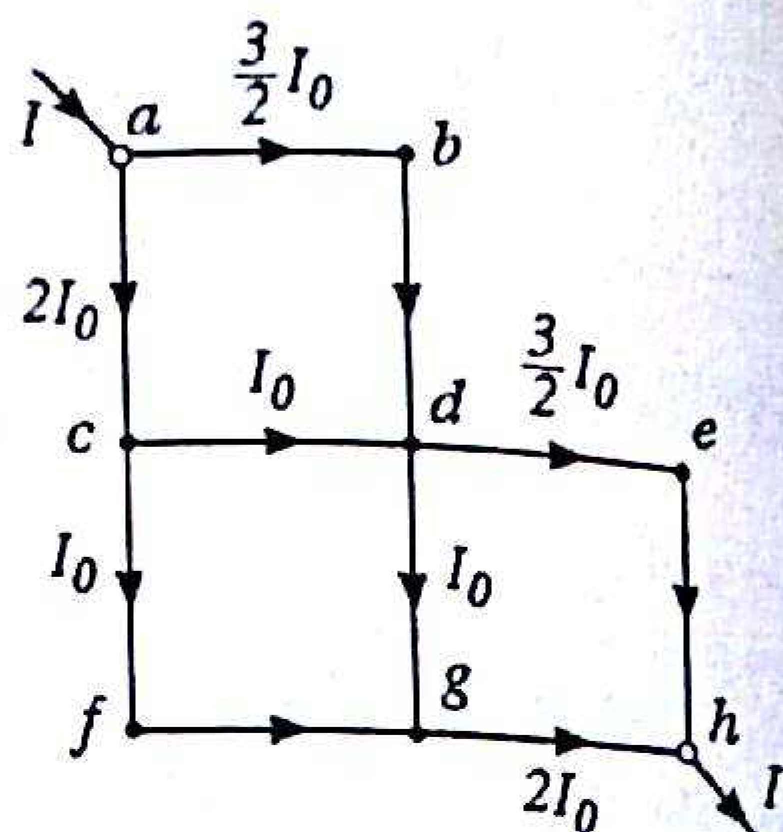
$$R_{AD} = \frac{3}{4}R$$

PR-7.29. *Resistencia equivalente de la red entre a y h*

En el siguiente circuito, cada uno de los alambres tiene igual resistencia, R, ¿Cuál será el valor de la resistencia entre los nodos extremos a y h?



Solución: Supongamos que en la rama $d \to g$ pasa una corriente I_0. Debido a la simetría, por la rama $c \to d$ también pasará una corriente I_0. La rama $c \to d \to g$ tiene igual voltaje y resistencia que la rama $c \to f \to g$ y por lo tanto, la corriente en esta rama también es I_0. Como consecuencia, en la rama $a \to c$ la corriente será $2I_0$.



El voltaje en la rama $a \to b \to d$ es el mismo que en la rama $a \to c \to d$.

$$V_{ad} = (2I_0)R + I_0R = 3I_0R$$

La corriente en la rama $a \to b \to d$, será:

$$I_{abd} = \frac{V_{ad}}{2R} = \frac{3I_0R}{2R} = \frac{3}{2}I_0$$

Esta corriente será igual a la que pasa por la rama $d \to e \to h$. Calculemos ahora, el voltaje total entre d y h.

$$V_{ah} = V_{ab} + V_{bd} + V_{de} + V_{eh} = (\frac{3}{2}I_0)(4R) = 6I_0R$$

Como la corriente total que entra por el nodo a y la que sale por el nodo h es: $I = 2I_0 + 3I_0/2 = (7/2)I_0$, entonces la resistencia entre estos dos puntos será:

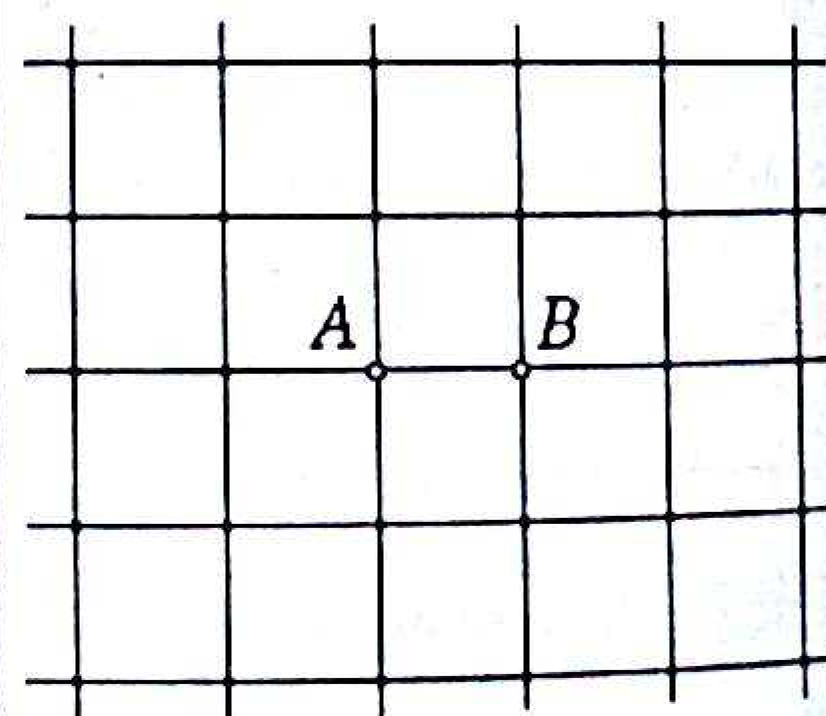
$$R_{ah} = \frac{V_{ah}}{I} = \frac{6I_0R}{(7/2)I_0} = \frac{12}{7}R$$

Respuesta:

$$R_{ah} = \frac{12}{7}R$$

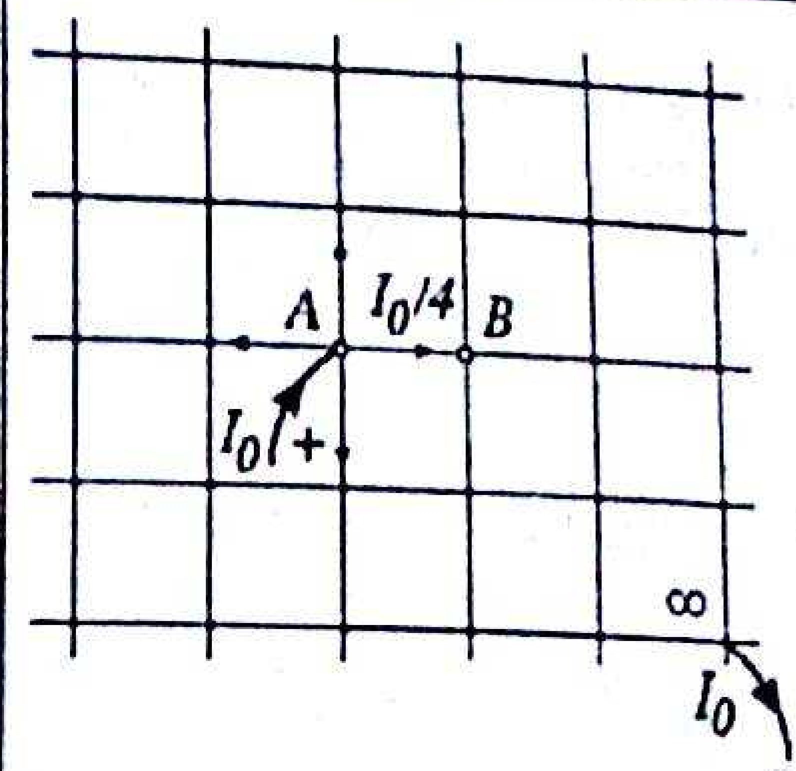
PR-7.30. *Imaginación y superposición*

Sea una red de extensión ilimitada que está constituida por celdas cuadradas de resistencia R en cada lado. ¿Cuál es la resistencia equivalente de todo el circuito entre dos nodos adyacentes cualesquiera A y B?

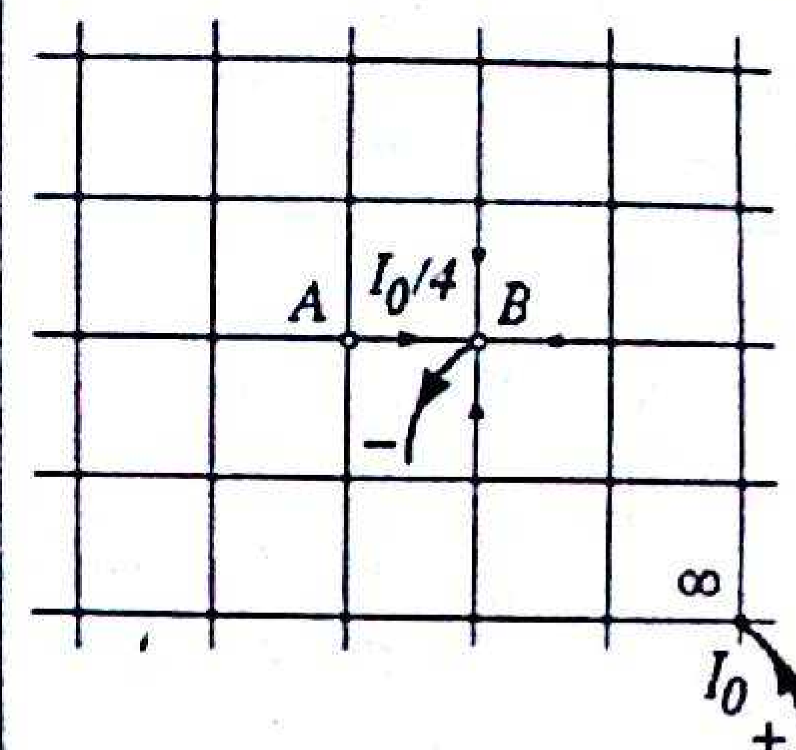


Solución: Imagine que conectamos una batería con el polo (+) en el punto A y el polo (-) en el borde distante de la red en el infinito. Entonces habrá una corriente I_o que *entra* en el nodo A y sale por los bordes de la malla; debido a la simetría, esta corriente se distribuye por cada rama adyacente *desde* A con igual valor $I_o/4$.

Imagine ahora, que conectamos una batería de igual fem que la anterior, pero con el polo (-) en el punto B y el polo (+) en el borde distante de la red en el infinito. Habrá también una corriente I_o que entra por los bordes distantes de la malla y sale por B; la corriente en cada rama adyacente *hacia* B con igual valor $I_o/4$.



Si superponemos estos dos estados, la corriente en los bordes distantes es cero mientras que la corriente total desde A hacia B es la suma:



$$I_{AB} = \frac{1}{4}I_0 + \frac{1}{4}I_0 = \frac{1}{2}I_0$$

Es decir justo *la mitad* de una corriente que entra a la red por A y sale por B, pasa por la rama AB. El voltaje en AB es:

$$V_{AB} = I_{AB}R = \frac{1}{2}I_0R$$

De modo que la resistencia equivalente entre esos puntos será:

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I_0} = \frac{1}{2}R$$

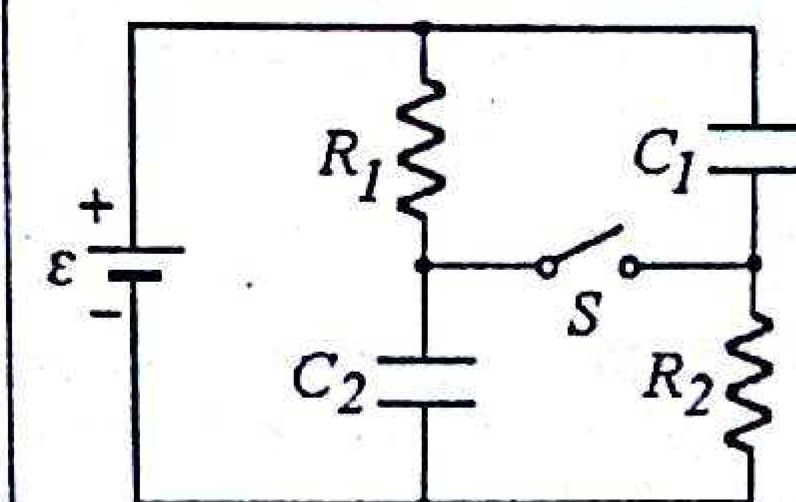
Respuesta:

$$R_{AB} = \frac{1}{2}R$$

PR-7.31. *Carga en los capacitores: Antes y después*

En el circuito mostrado, determine las cargas en los capacitores. Considere los siguientes casos:
a) El interruptor S ha estado siempre abierto.
b) Después de un tiempo largo de cerrar el interruptor S.

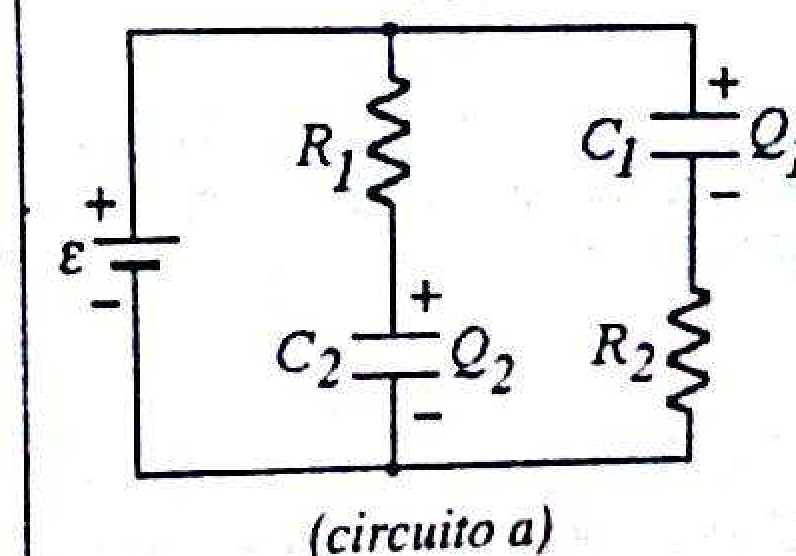
Suponga los valores numéricos:
$R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ, $C_1 = 3$ μF, $C_2 = 4$ μF, $\varepsilon = 6$ V.



Solución: a) Con el interruptor S abierto, los capacitores están completamente cargados y no fluye corriente por los resistores (Circuito a). Como no hay caída de potencial en los resistores, el voltaje en cada capacitor es igual al voltaje de la fuente: $V_{C1} = V_{C2} = \varepsilon$. Por lo tanto, las cargas son:

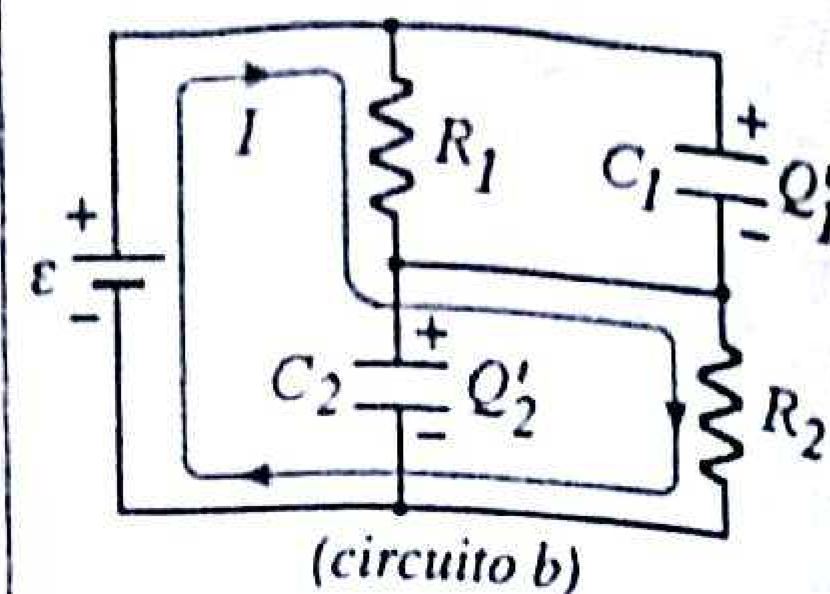
$$Q_1 = C_1\varepsilon = (3\ \mu F)(6\ v) = 18\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2\varepsilon = (4\ \mu F)(6\ v) = 24\ \mu C$$



(circuito a)

b) Después de cerrar el interruptor, al cabo de un tiempo los capacitores estarán completamente cargados y la única corriente que circula será en los resistores (circuito b):



(circuito b)

$$I = \varepsilon/(R_1 + R_2)$$

Las caída de potencial en cada resistor es:

$$V_1 = IR_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} R_1 \qquad V_2 = IR_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} R_2$$

Estas diferencias de potencial son las mismas que en los respectivos capacitores, por estar en paralelo con los resistores. Por lo tanto las cargas en los capacitores son:

$$Q_1' = C_1 V_1 = \frac{\varepsilon R_1 C_1}{R_1 + R_2} = \frac{(6\text{v})(1\text{k}\Omega)(3\mu\text{F})}{1\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = 6\mu\text{C}$$

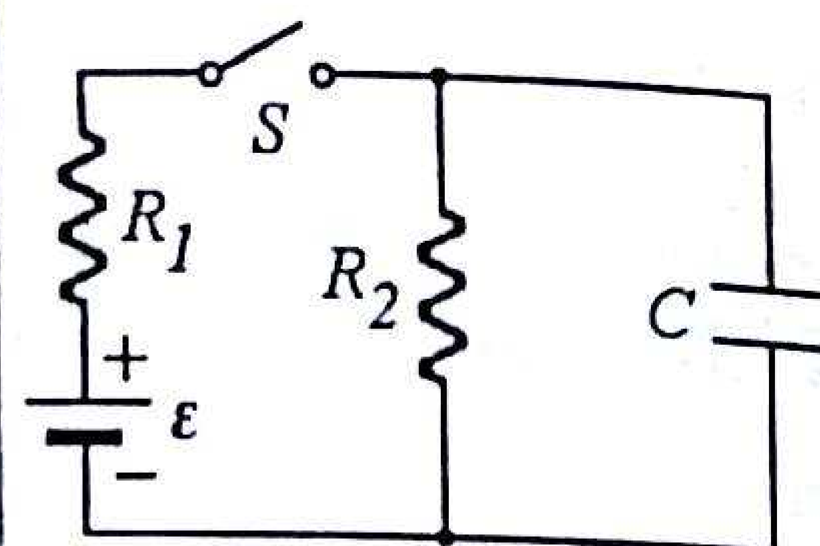
$$Q_2' = C_2 V_2 = \frac{\varepsilon R_2 C_2}{R_1 + R_2} = \frac{(6\text{v})(2\text{k}\Omega)(4\mu\text{F})}{1\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = 16\mu\text{C}$$

Respuesta:

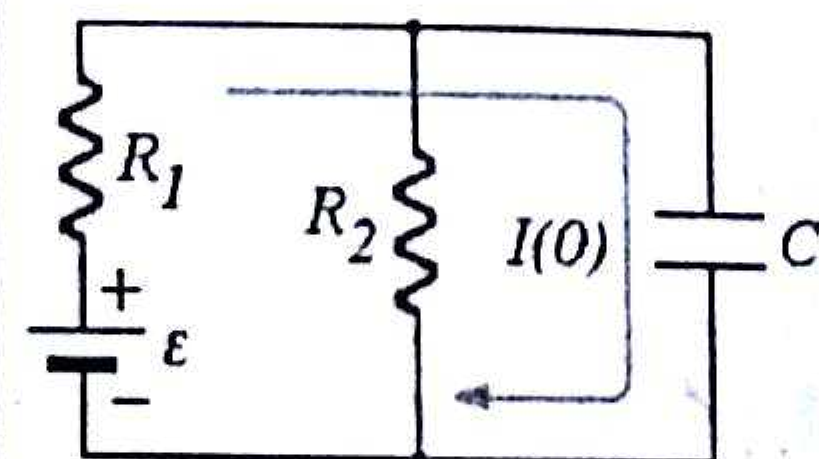
a) $Q_1 = 18\ \mu\text{C},\ Q_2 = 24\ \mu\text{C}$
b) $Q_1' = 6\ \mu\text{C},\ \ Q_2' = 16\ \mu\text{C}$

PR-7.32. *Cargas y corrientes transientes*

En el circuito mostrado, se cierra el interruptor S en el instante $t = 0$. Determine:
a) La corriente en la batería en el instante inicial ($t = 0$).
b) La corriente en la batería y la carga del capacitor después de un tiempo muy largo ($t = \infty$)
c) La corriente de la batería y la carga del capacitor en función del tiempo.

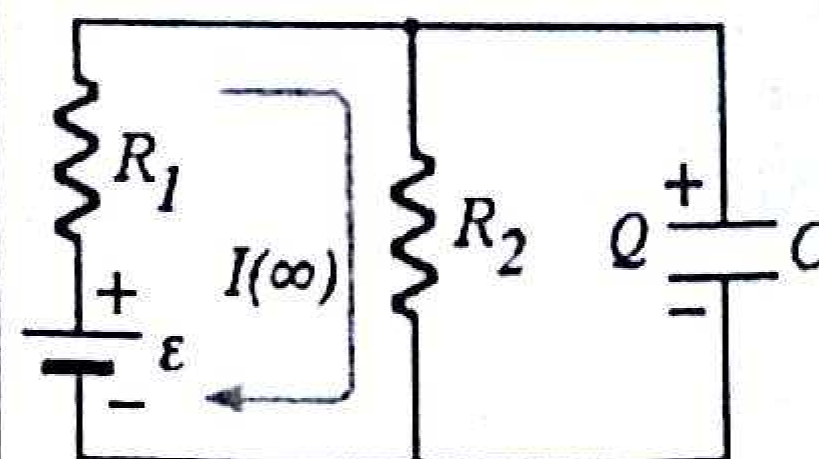


Solución: a) Inicialmente, el capacitor está descargado y su voltaje es cero. Por la resistencia R_2 no pasa corriente y la corriente de la batería es:



$$I(0) = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

b) Después de un tiempo muy largo el capacitor C está completamente cargado y no pasa corriente. La corriente de la batería es:



$$I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

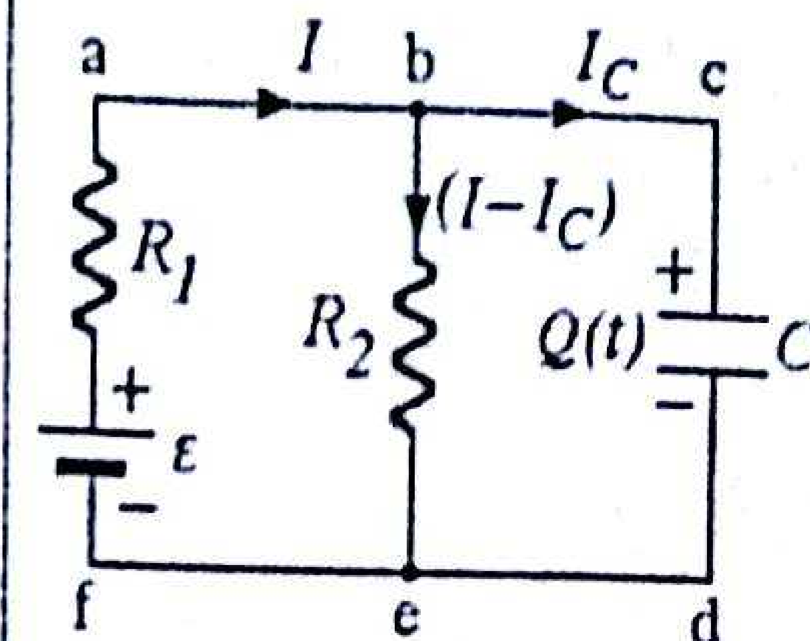
El voltaje en el capacitor es igual que en R_2, por lo tanto:

$$V_2 = I(\infty)R_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad Q = CV_2 = \frac{\varepsilon C R_2}{R_1 + R_2}$$

c) Durante en proceso de carga, las ecuaciones de Kirchhoff de las mallas son:

Malla fabef: $\qquad \varepsilon - IR_1 - (I - I_C)R_2 = 0 \qquad (1)$

Malla ebcde: $\qquad (I - I_C)R_2 - \dfrac{Q}{C} = 0 \qquad (2)$



Eliminando I de estas dos ecuaciones:

$$\varepsilon - (I_C + \frac{Q}{R_2 C})(R_1 + R_2) + I_C R_2 = 0$$

Tomando en cuanta que: $I_C = dQ/dt$, se tiene:

$$\varepsilon - \frac{dQ}{dt}R_1 - \frac{Q}{R_2 C}(R_1 + R_2) = 0$$

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}Q - \frac{\varepsilon}{R_1}$$

$$\int_0^Q \frac{dQ}{(Q - \frac{\varepsilon R_2 C}{R_1 + R_2})} = -\int_0^t (\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2})dt$$

$$ln(Q - \frac{\varepsilon R_2 C}{R_1 + R_2})\Big|_0^Q = -(\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2})t$$

La carga en el capacitor en función del tiempo es:

$$Q(t) = \frac{\varepsilon C R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \text{con} \qquad \tau = (\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})C$$

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = (\frac{\varepsilon C R_2}{R_1 + R_2})(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C})\frac{\varepsilon}{R_1}e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R_1}e^{-t/\tau}$$

La corriente I en la batería se obtiene sustituyendo I_C en la ecuación (2):

$$I = \frac{Q}{R_2 C} + I_C = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\varepsilon}{R_1}e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}(1 + \frac{R_2}{R_1}e^{-t/\tau})$$

Respuesta:

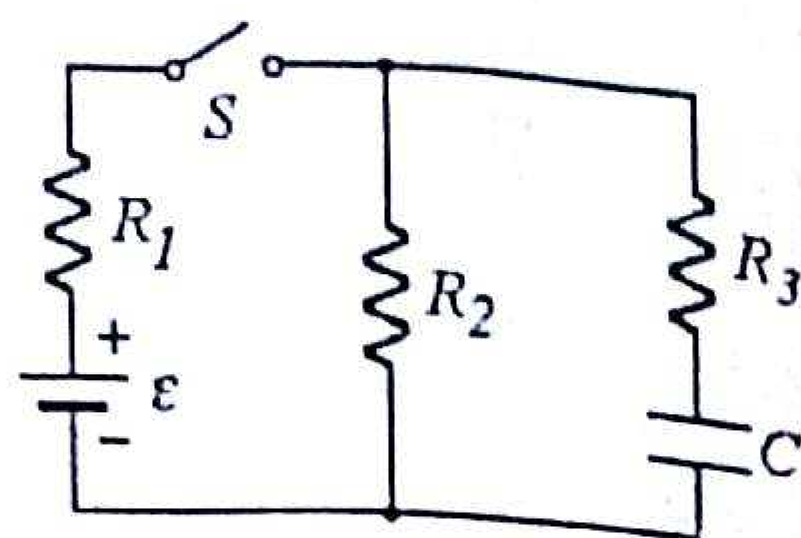
a) $I(0) = \dfrac{\varepsilon}{R_1}$,
b) $I(\infty) = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$
$Q(\infty) = \dfrac{\varepsilon C R_2}{R_1 + R_2}$
c) $Q(t) = \dfrac{\varepsilon C R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau})$
$\tau = (\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})C$
$I(t) = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}(1 + \dfrac{R_2}{R_1}e^{-t/\tau})$

PR-7.33. *Corriente inicial y mucho después de cerrar S*

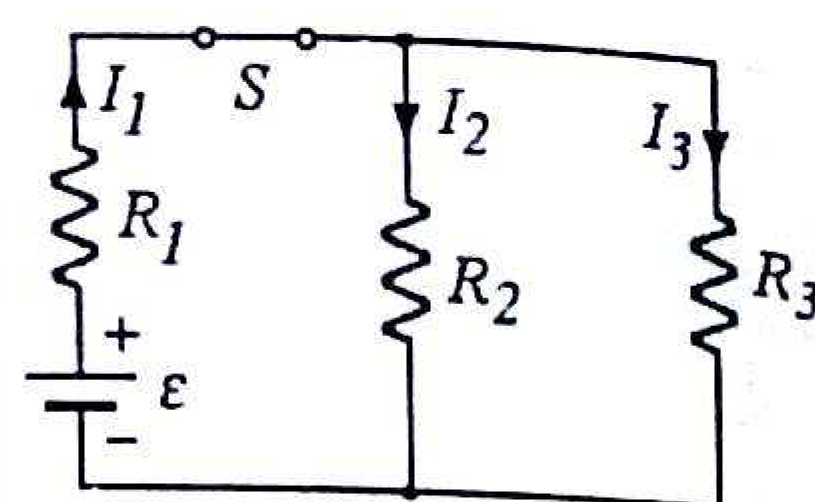
En el circuito mostrado todas las resistencias tienen igual valor, $R_1 = R_2 = R_3 = R$. El capacitor está inicialmente descargado y en $t = 0$ se cierra el interruptor.

a) Determine la corriente en cada resistencia en $t = 0$.

b) Determine la corriente en cada resistencia y la carga del capacitor en $t = \infty$.



Solución: a) En el instante inicial $t = 0$, el capacitor está descargado y su voltaje es cero. La situación en ese instante es como si el capacitor fuera reemplazado por un alambre (fig. a). La resistencia R_1 queda en serie con la combinación de R_2 en paralelo con R_3. Por lo tanto, la corriente en R_1 (y también en la batería) es:



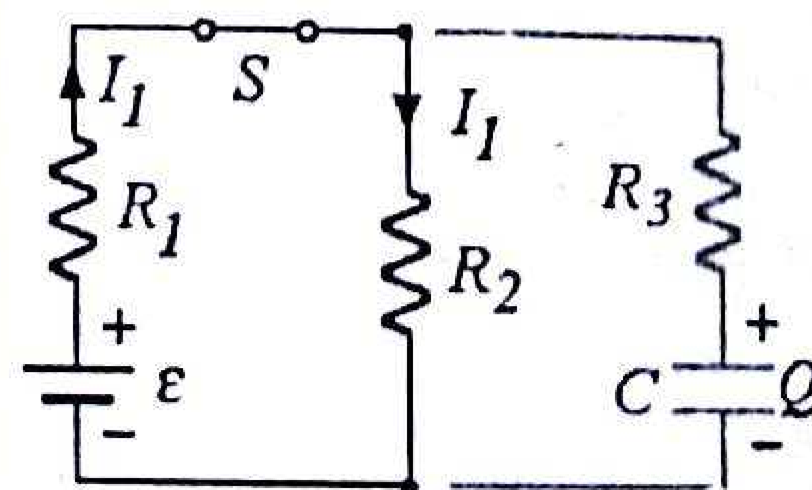
a) Circuito en $t = 0$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{\varepsilon}{R + \dfrac{RR}{R+R}} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{R}$$

Como $R_2 = R_3$, esta corriente se divide por igual en R_2 y R_3:

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{R}$$

b) En la situación final, $t = \infty$, el capacitor estará completamente cargado y la corriente en esa rama será cero ($I_3 = 0$). A los efectos de las corrientes, es como si esa rama estuviese desconectada. La corriente en la resistencia R_1 es la misma que en la resistencia R_2 y vale:



b) Circuito en $t = \infty$

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R}$$

Como no hay caída de voltaje R_3, el voltaje en el capacitor es el mismo que el de la resistencia R_2, es decir:

$$V_C = V_{R2} = \varepsilon/2,$$

y la carga final del capacitor es:

$$Q = \frac{1}{2}\varepsilon C$$

Respuesta:

a) $I_1 = \dfrac{2}{3}\dfrac{\varepsilon}{R}$, $I_2 = I_3 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\varepsilon}{R}$

b) $I_1 = I_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{R}$, $Q = \dfrac{1}{2}\varepsilon C$

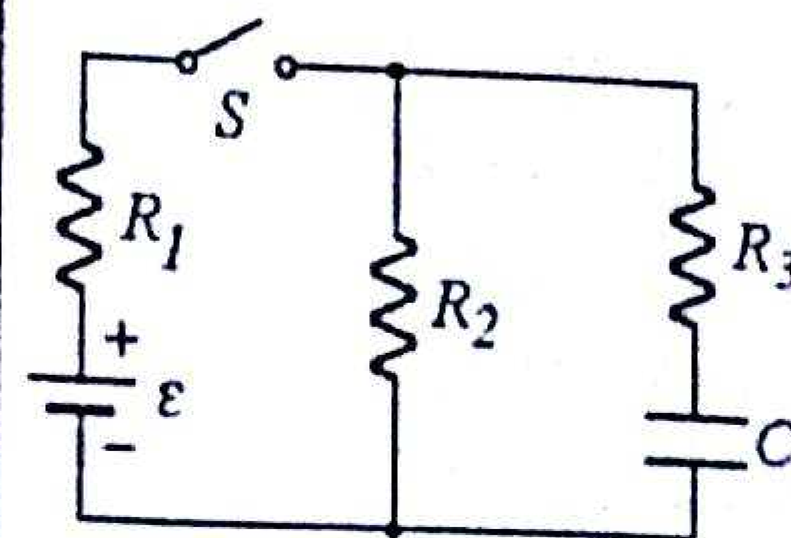
PR-7.34. *Carga del capacitor en función del tiempo*

En el circuito del problema anterior todas las resistencias tienen igual valor, $R_1 = R_2 = R_3 = R$. El capacitor está inicialmente descargado y en el instante $t = 0$ se cierra el interruptor. Determine para cualquier instante de tiempo:

a) La carga del capacitor.

b) Las corrientes en todas las resistencias.

c) Compruebe que las expresiones obtenidas cumplen los casos límites del problema anterior para $t = 0$ y $t = \infty$.

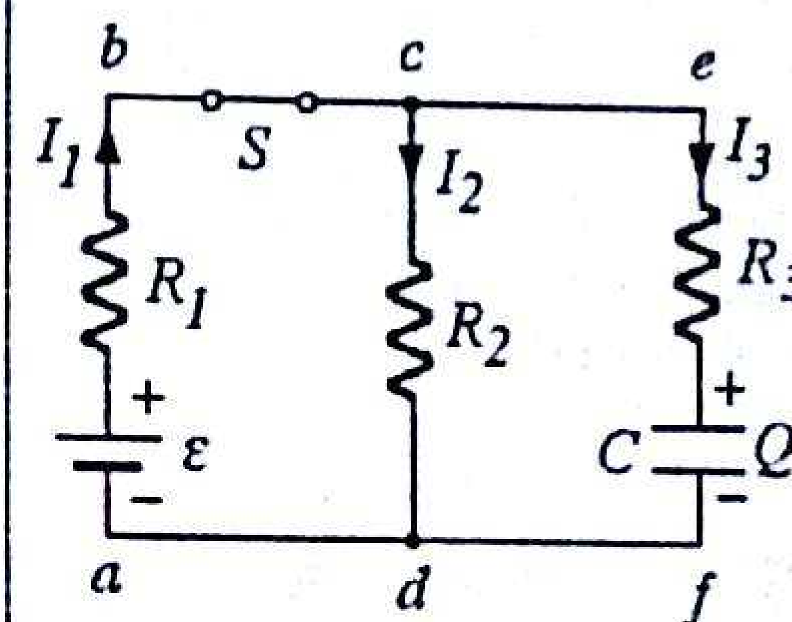


Solución: a) Consideremos en un instante arbitrario, las corrientes I_1, I_2 e I_3. El capacitor tendrá una cierta carga Q, y su voltaje será Q/C. Aplicando Kirchhoff:

Malla abcda: $\quad \varepsilon - I_1 R - I_2 R = 0 \quad (1)$

Malla efdce: $\quad -I_3 R - \dfrac{Q}{C} + I_2 R = 0 \quad (2)$

Nodos c o d: $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (3)$



Si despejamos I_1 de la ecuación (3) y la sustituimos en la ecuación (1), se obtiene:

$$\varepsilon - 2I_2 R - I_3 R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\varepsilon - I_3 R}{2R} \quad (4)$$

Sustituyendo esta expresión de I_2 en la ecuación (2), y tomando en cuenta que $I_3 = dQ/dt$:

$$\frac{3R}{2}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Para determinar $Q(t)$ de esta ecuación diferencial usamos el método de separación de variables:

$$\frac{dQ}{\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{Q}{C}} = \frac{2}{3R}dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^Q \frac{dQ}{\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{Q}{C}} = \frac{2}{3R}\int_0^t dt$$

Por lo tanto:

$$-C\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon/2 - Q/C} \frac{du}{u} = -C\,ln(\frac{\varepsilon/2 - Q/C}{\varepsilon/2}) = \frac{2}{3R}t$$

$$\frac{\varepsilon/2 - Q/C}{\varepsilon/2} = e^{-2t/3RC}$$

Despejando Q:

$$Q(t) = \frac{\varepsilon C}{2}[1 - e^{-2t/3RC}]$$

b) La corriente I_3 es la misma del capacitor y se obtiene derivando la carga:

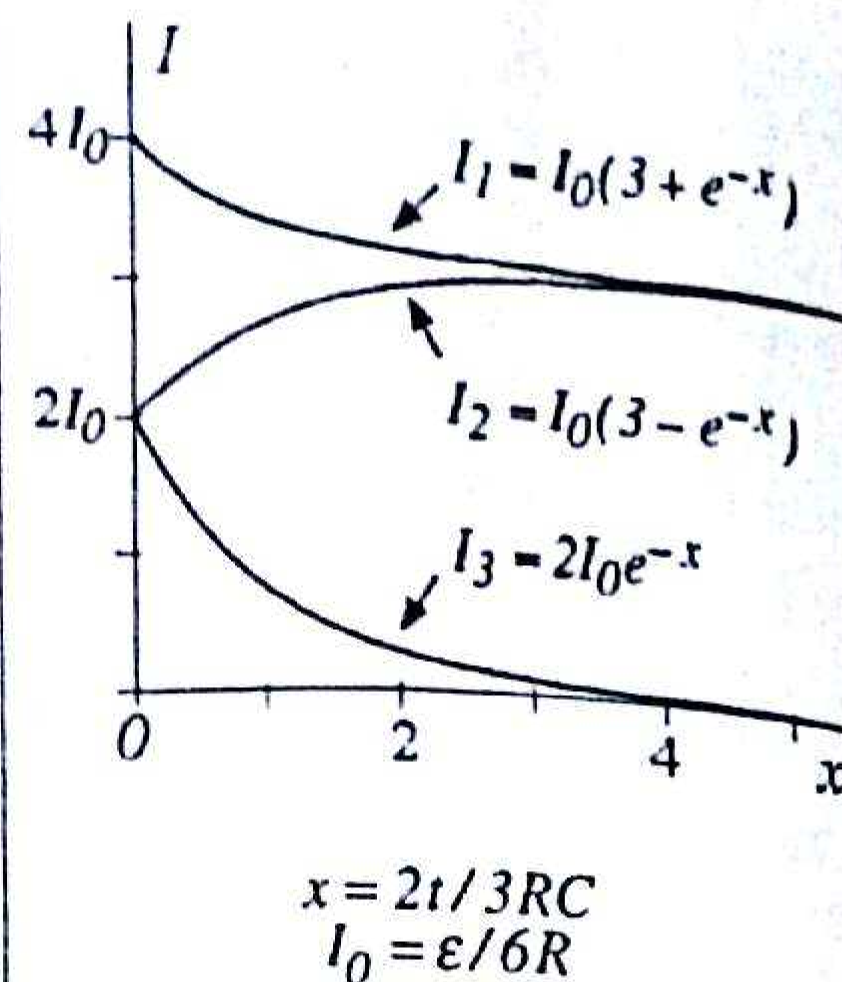
$$I_3 = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{3R}e^{-2t/3RC}$$

Reemplazando I_3 en la ecuación (4), se obtiene I_2:

$$I_2 = \frac{\varepsilon - I_3 R}{2R} = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{\varepsilon}{6R}e^{-2t/3RC} = \frac{\varepsilon}{6R}[3 - e^{-2t/3RC}]$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 + e^{-2t/3RC}]$$

c) Las expresiones de la carga Q y las corrientes I_1, I_2 e I_3 para $t = 0$ y $t = \infty$, arrojan los mismos valores límites que habíamos obtenido en el problema anterior.



$x = 2t/3RC$
$I_0 = \varepsilon/6R$

Respuesta:

a) $Q(t) = \frac{\varepsilon C}{2}[1 - e^{-2t/3RC}]$

b) $I_1 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 + e^{-2t/3RC}]$

$I_2 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 - e^{-2t/3RC}]$

$I_3 = \frac{\varepsilon}{3R}e^{-2t/3RC}$

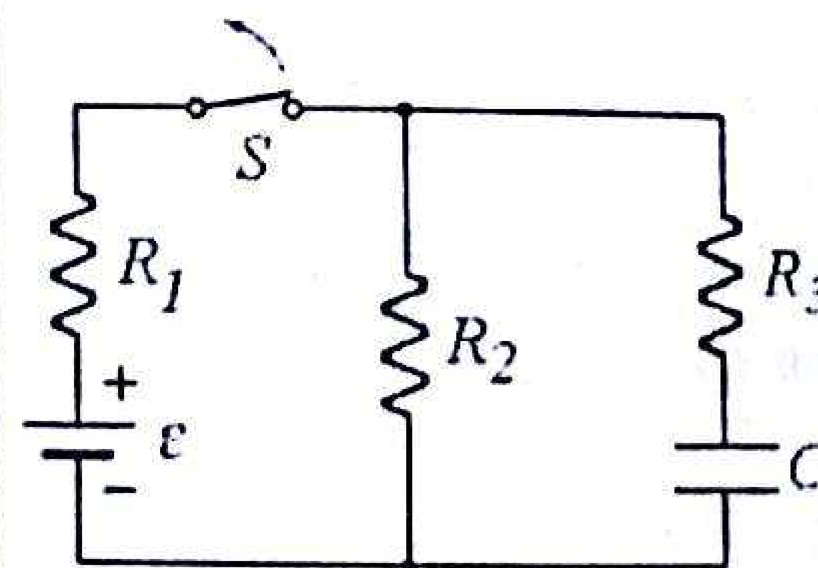
PR-7.35. *Descarga de capacitor en función del tiempo*

En el circuito de la figura el interruptor S ha estado cerrado por un tiempo suficiente largo y el capacitor se encuentra completamente cargado.

a) ¿Cuál es la corriente estacionaria en cada resistor y la carga del capacitor?

b Si en el instante $t = 0$ se abre el interruptor, determine la corriente en R_2 en función del tiempo.

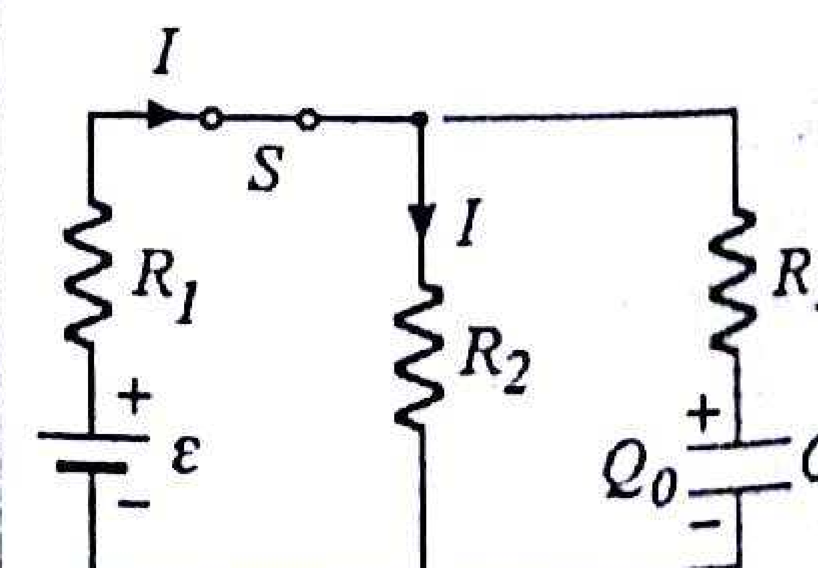
c) Grafique la corriente en R_2 en función del tiempo.



$R_1 = 1\text{k}\Omega,\ R_2 = 2\text{k}\Omega,\ R_3 = 3\text{k}\Omega,$
$\varepsilon = 6\text{ V},\ C = 2\text{ mF}$

Solución: a) En la condición estacionaria el capacitor está completamente cargado y no hay corriente en su rama. El voltaje ε de la batería está aplicado a la combinación serie R_1 y R_2 y la corriente es:

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{6\text{v}}{1\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = 2\text{mA}$$

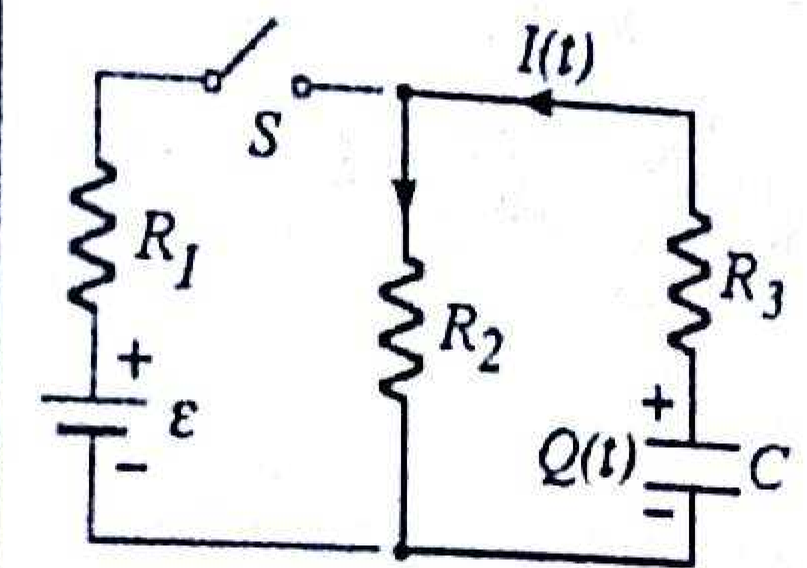


El voltaje del capacitor es igual al voltaje en R_2 y su carga es:

$$Q_0 = CV_C = C(IR_2) = \frac{\varepsilon R_2 C}{R_1 + R_2} = \frac{6\text{V}(2\text{k}\Omega)(2\text{mF})}{1\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = 8\text{mC}$$

b) Al desconectar la batería el capacitor se descarga a través de R_2 y R_3. Tomando en cuenta que $I = -dQ/dt$, la ecuación del circuito es:

$$\frac{Q}{C} - (R_2 + R_3)I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C} + (R_2 + R_3)\frac{dQ}{dt} = 0$$



La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{(R_2 + R_3)C} \quad \Rightarrow \quad \int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{(R_2 + R_3)C}\int_0^t dt$$

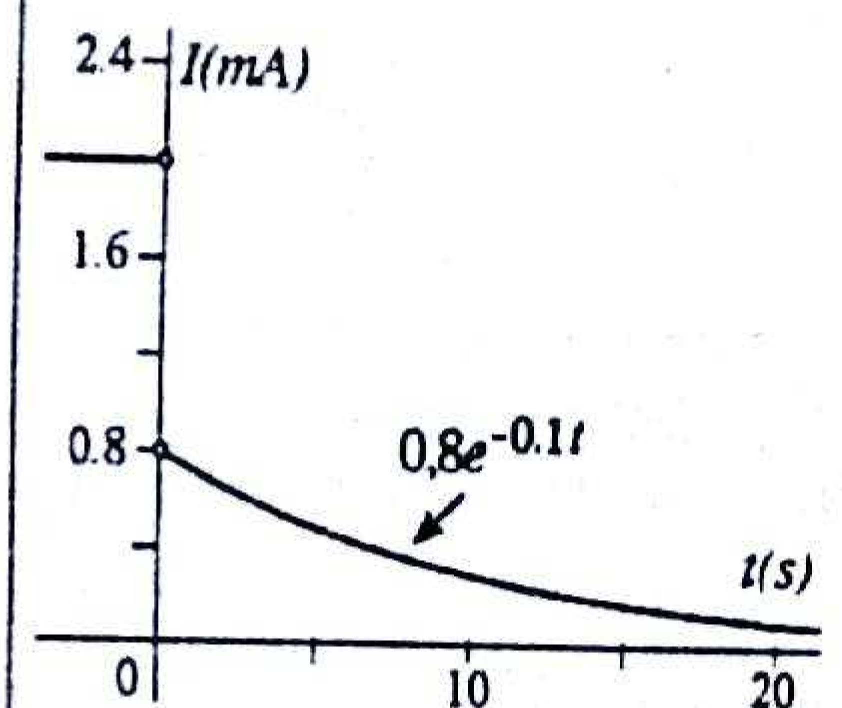
$$\ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{(R_2 + R_3)C} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/(R_2 + R_3)C}$$

La carga decrece exponencialmente con una constante de tiempo:

$$\tau = (R_2 + R_3)C = (2\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega)2\text{mF} = 10\text{s}$$

La corriente en el circuito es:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{(R_2 + R_3)C}e^{-t/(R_2 + R_3)C} = 0{,}8e^{-t/10}\text{ mA}$$



Respuesta:

a) $I_1 = I_2 = 2\text{mA},\ I_3 = 0$
$Q_0 = 8\text{mC}$

b) $I_2 = I_3 = 0{,}8e^{-0.1t}$ mA

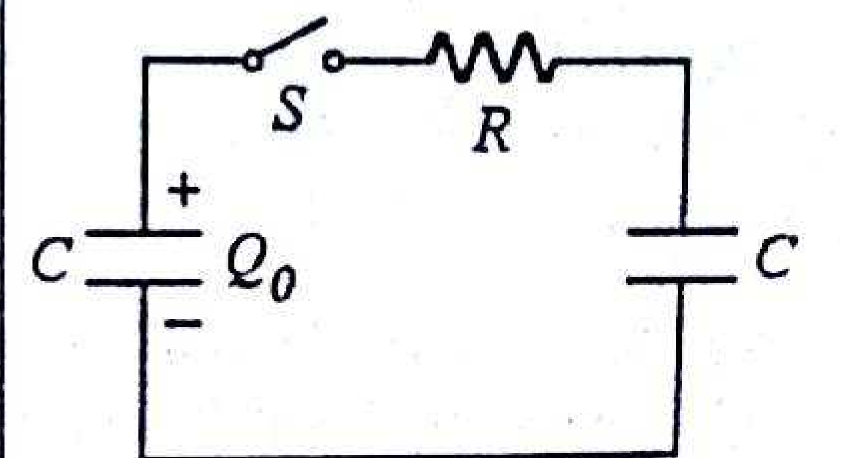
PR-7.36. *¡La mitad de la energía siempre se pierde!*

Sean dos capacitores de igual capacitancia C, uno tiene una carga inicial Q_0 y el otro está inicialmente descargado. Al cerrar el interruptor S los capacitores quedan conectados a través de una resistencia R.

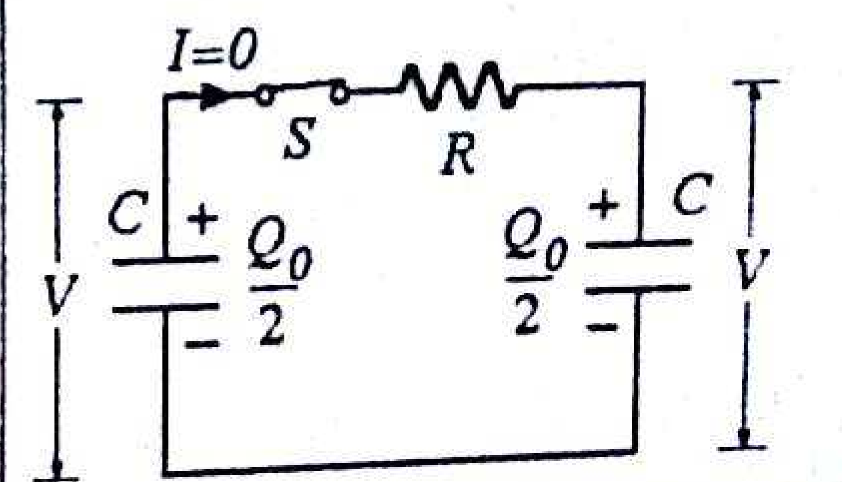
a) ¿Cuál será la distribución final de las cargas?

b) Demuestre que la mitad de la energía inicial se pierde.

c) ¿A dónde fue la energía perdida?



Solución: a) La carga total Q_o se conserva, y habrá un flujo de cargas de un capacitor al otro. Al finalizar el proceso, la carga quedará distribuida de tal manera que los voltajes de los capacitores son iguales para garantizar que la corriente en R sea cero. Por ser los capacitores idénticos, a cada uno le tocará la misma carga de $Q_o/2$.



b) Inicialmente la energía está almacenada en uno de los capacitores:

$$E_{ini} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Finalmente la energía quedará almacenada por igual en los dos capacitores:

$$E_{fin} = 2\frac{(Q_0/2)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C}$$

Esto significa que la energía total final en los dos capacitores es la mitad de la energía inicial:

$$\frac{E_{fin}}{E_{ini}} = \frac{Q_0^2/4C}{Q_0^2/2C} = \frac{1}{2}$$

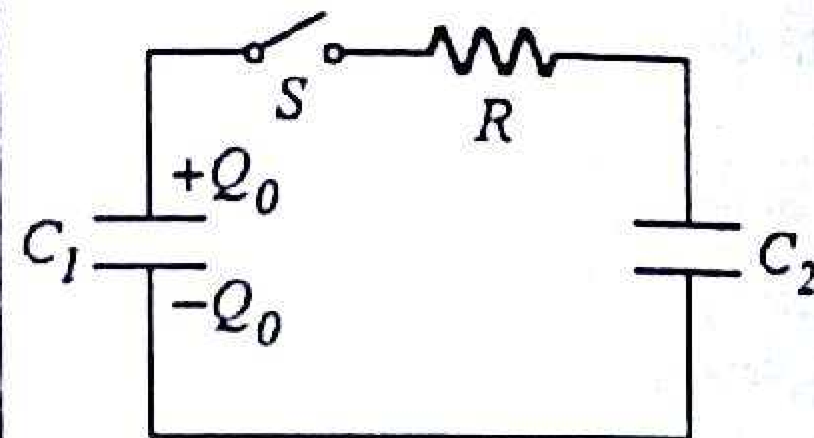
c) Podríamos suponer que el 50 % de la energía inicial se ha perdido como energía térmica por calentamiento Joule en la resistencia R. Pero, ¿dependerá esto del valor de R?

Respuesta:

a) $Q_1 = Q_2 = Q_0/2$
b) $E_{fin}/E_{ini} = 1/2$

PR-7.37. ***No importa el valor de R, se perderá el 50%***

Volvamos al circuito de los dos capacitores iguales $C_1 = C_2 = C$, uno tiene una carga inicial Q_O y el otro está inicialmente descargado. Después de cerrar el interruptor S, quedan conectados a través de una resistencia R.
a) Determine la corriente I en función del tiempo.
b) Calcule explícitamente la energía total perdida por calentamiento Joule en R, desde el instante $t = 0$ hasta $t = \infty$, y demuestre que esta energía es independiente del valor de la resistencia? Entonces que sucedería en el caso $R = 0$, ¿donde iría la energía perdida?



Solución: a) Cuando S está cerrado circula una corriente I, debida a que el capacitor C_2 gana carga a expensas de C_1, por lo tanto:

$$I = -\frac{dQ_1}{dt} = +\frac{dQ_2}{dt}$$

Esta corriente pasa por la resistencia y su valor es:

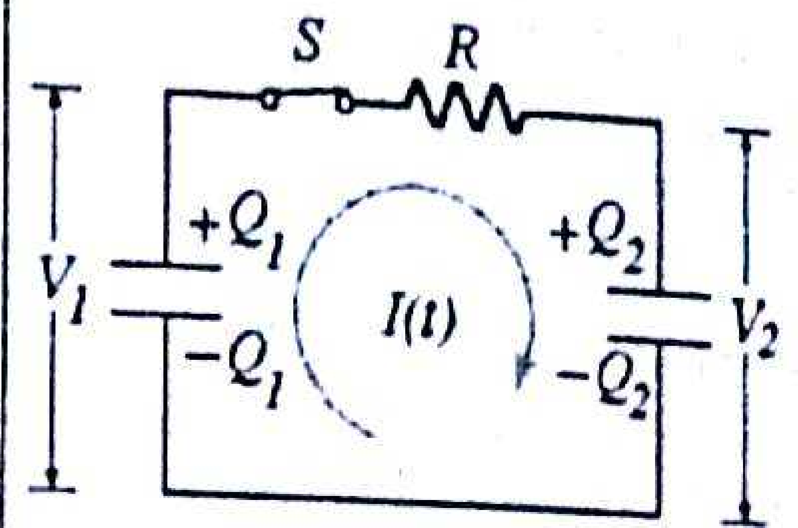
$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{Q_1/C - Q_2/C}{R} = \frac{Q_1 - Q_2}{RC} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{Q_1 - Q_2}{RC} \qquad \frac{dQ_2}{dt} = +\frac{Q_1 - Q_2}{RC}$$

Restando estas dos expresiones queda la ecuación:

$$\frac{d(Q_2 - Q_1)}{dt} = -\frac{2(Q_2 - Q_1)}{RC} \qquad (3)$$



Esta ecuación diferencial muestra que la tasa de variación temporal de la cantidad $(Q_2 - Q_1)$ es proporcional a la cantidad misma. Esto sugiere que su solución es del tipo exponencial: $(Q_2 - Q_1) = Ae^{Bt}$. Si reemplazamos esta expresión en la Ec. 3, se obtiene la constante B:

$$BAe^{Bt} = -\frac{2Ae^{Bt}}{RC} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{2}{RC}$$

La constante A se obtiene de las condiciones iniciales $Q_2(0) = 0$, $Q_1(0) = Q_0$. Por lo tanto $A = -Q_0$. Sustituyendo A y B en la solución:

$$Q_2 - Q_1 = -Q_0 e^{-2t/RC}$$

Sustituyendo en la ecuación 2:

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-2t/RC}$$

La corriente decae con una constante de tiempo $\tau = RC/2$.

b) La energía total disipada por efecto Joule en la resistencia es:

$$E_R = \int Pdt = \int_0^\infty I^2 R dt = (\frac{Q_0}{RC})^2 R \int_0^\infty e^{-4t/RC} dt$$

$$E_R = (\frac{Q_0}{RC})^2 R \frac{RC}{4} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{Q_0^2}{4C}$$

$$\int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

c) Hemos encontrado que la energía disipada en R por efecto Joule es la mitad de la energía disponible inicialmente, independientemente del valor de R. Si se hace $R = 0$, conectando los capacitores directamente o mediante alambres superconductores, la pérdida de energía podría ocurrir por el mecanismo de radiación electromagnética, durante la aceleración y frenado de las cargas. Este resultado es consecuencia de un importante teorema de electrostática, según el cual resulta imposible pasar de una configuración de equilibrio de cargas a otra configuración de equilibrio con la intervención únicamente de fuerzas eléctricas.

Respuesta:

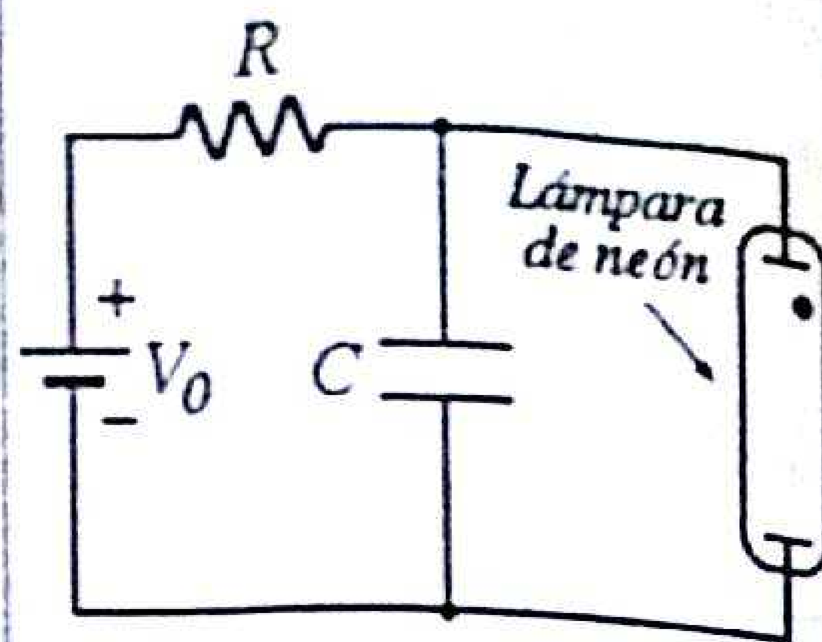
a) $I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-2t/RC}$
b) $E_R = Q_0^2/4C$ (se pierde el 50% para cualquier valor de R)

PR-7.38. *Oscilaciones RC para marcapasos cardíacos*

Una lámpara de neón se conecta en paralelo al capacitor de un circuito *RC*, alimentado por una fem de V_o voltios. Cuando la lámpara está apagada y el gas está frío, su resistencia es casi infinita. Al alcanzar el voltaje de disparo, V_d, la lámpara se enciende y se torna un buen conductor. En ese momento, el capacitor rápidamente se descarga a través de la lámpara. A medida que su voltaje desciende el gas se enfría y al llegar al voltaje de extinción V_e, se torna un aislador. A partir de ese momento, el capacitor empieza a cargarse de nuevo y, el ciclo de encendido y apagado se repite indefinidamente.

a) ¿Cómo varía el voltaje en el capacitor y en la lámpara?

b) Determine la frecuencia de los destellos de la lámpara



Oscilador de relajación

$V_o = 200$ V, $V_d = 100$ V, $V_e = 90$ V
$R = 200\ k\Omega$, $C = 50\mu F$

Solución: a) Durante el tiempo en que la lámpara no conduce se comporta como un circuito abierto. Aplicando Kirchhoff:

$$V_0 = IR + \frac{Q}{C}$$

Diferenciando y tomando en cuenta que $I = dQ/dt$, se obtiene:

$$0 = R\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{I}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando:

$$\int_0^I \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

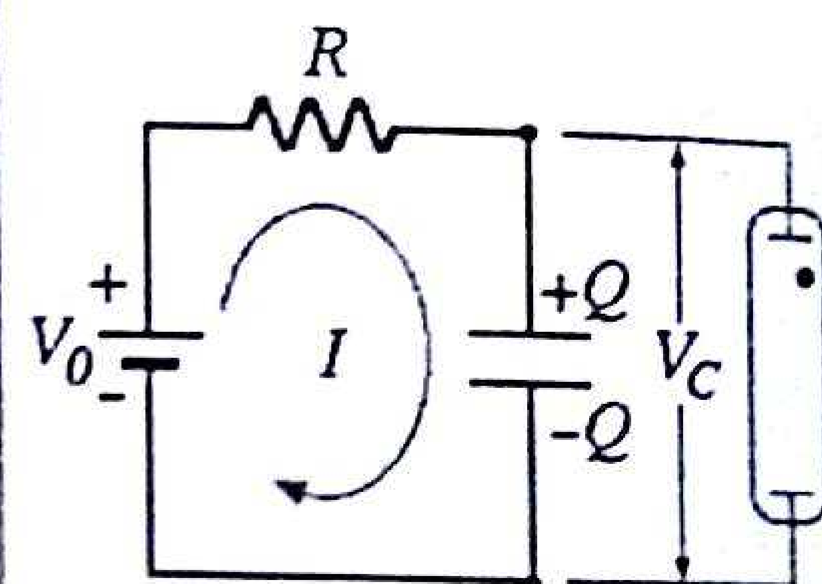
En el instante inicial ($t = 0$) el capacitor está descargado ($Q = 0$) y la corriente inicial es $I_o = V_o/R$. Por lo tanto:

$$I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$

El voltaje del capacitor en función del tiempo será:

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} = V_0 - I(t)R = V_0(1 - e^{-t/RC})$$

b) La ecuación anterior describe el proceso de carga del capacitor por la fuente y es válida hasta alcanzar el valor del voltaje de encendido de la lámpara de neón, V_d.

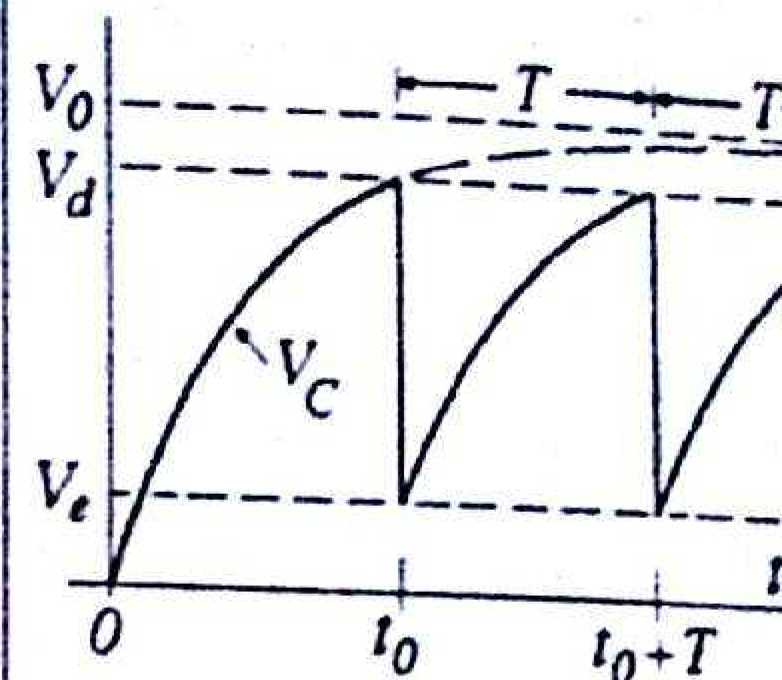


Lámpara apagada: el capacitor se carga

En ese momento, la lámpara presenta baja resistencia y el capacitor se descarga abruptamente hasta que su voltaje cae al valor V_e. De modo que la lámpara destella brevemente y se apaga, cesa la descarga del capacitor y este empieza a cargarse nuevamente, repitiéndose el proceso cíclicamente con *período T*. Aplicando la expresión de $V_c(t)$ en dos instantes t_o y $(t_o + T)$ tenemos:

$$V_C(t_0) = V_0(1 - e^{-t_0/RC}) = V_e$$

$$V_C(t_0 + T) = V_0(1 - e^{-(t_0+T)/RC}) = V_d$$



Oscilaciones del voltaje del capacitor

Combinando estas dos expresiones, encontramos:

$$\frac{V_0 - V_e}{V_0 - V_d} = e^{T/RC}$$

El periodo T o el inverso de la frecuencia (número de destellos por segundo) de la lámpara es:

$$T = \frac{1}{f} = RC\, ln\left(\frac{V_0 - V_e}{V_0 - V_d}\right)$$

$$T = (200k\Omega)(50\mu F)\ln\left(\frac{200V - 90V}{200V - 100V}\right) = 0.953s$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.05Hz$$

Una aplicación muy importante de un circuito de este tipo es el marcapasos electrónico que se implanta en el pecho de una persona. En este caso, debe oscilar entre 60 y 80 pulsos por minuto para mandar estímulos eléctricos a un corazón que tiende a perder su paso o a detenerse.

Respuesta:

a) $V_C(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})$

b $T = \frac{1}{f} = RC\, ln\left(\frac{V_0 - V_e}{V_0 - V_d}\right)$

$T = 0.953s$, $f = 1.05Hz$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-7.01. ***Una fuerza electromotriz es...***

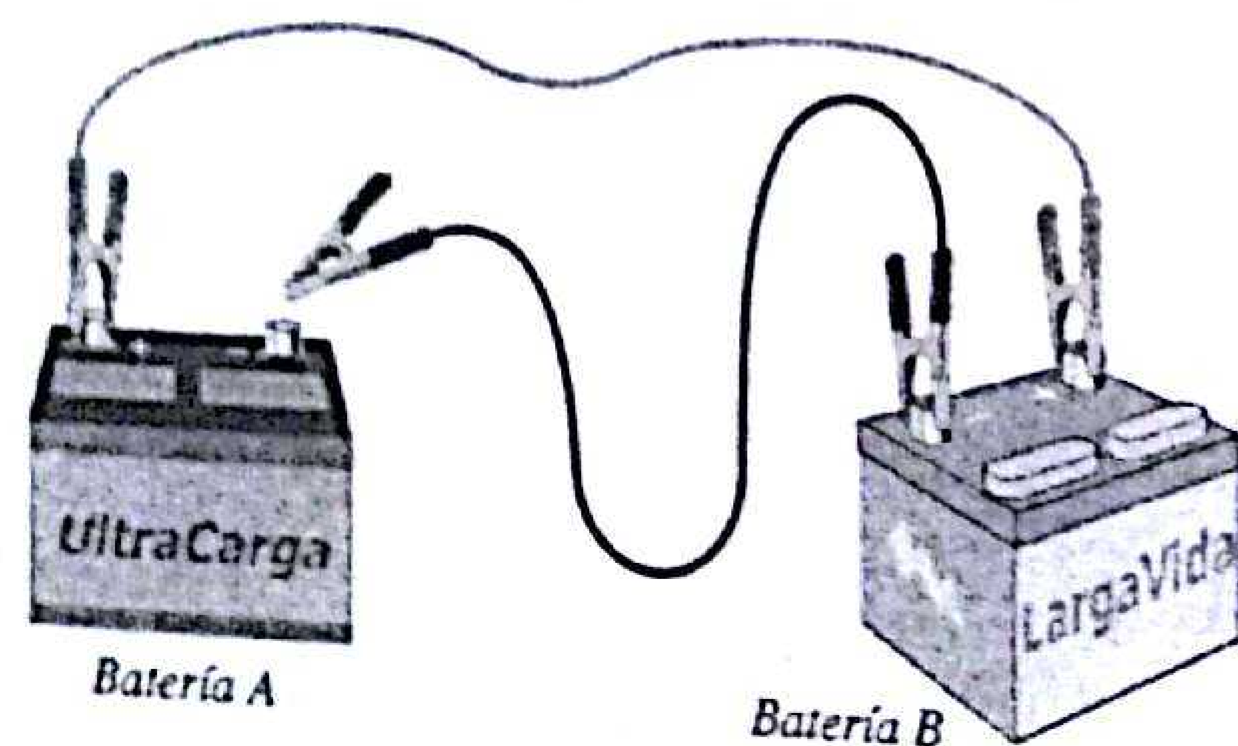
a) Una fuerza de origen eléctrico.
b) Una energía potencial electrostática.
c) Un trabajo por unidad de tiempo.
d) Un trabajo por unidad de carga.
e) El voltaje entre los terminales de una batería.

PE-7.02. ***¿Cuál de estas afirmaciones no es correcta?***

a) La regla de Kirchhoff de las mallas es consecuencia de la naturaleza conservativa de la fuerza eléctrica.
b) Según la regla de Kirchhoff de los nodos la cantidad de carga que entra a un punto debe ser igual a la que sale de dicho punto.
c) En un circuito, el voltaje entre los terminales de una batería podría exceder el valor de la fem de la batería.
d) El tiempo que tarda un capacitor en cargarse mediante una batería no depende del valor de la fem de la batería.
e) Las reglas de Kirchhoff se aplican solamente a elementos del circuito que obedezcan la ley de Ohm.

PE-7.03. ***Una batería en auxilio de otra batería***

Se tienen dos baterías de automóvil, *A* y *B*. El voltaje medido entre los terminales abiertos de la batería *A* es $V_A = 8V$ y su resistencia interna es $r_A = 9\,\Omega$, mientras que el voltaje medido entre los terminales abiertos de la batería *B* es $V_B = 12V$ y su resistencia interna es $r_B = 1\,\Omega$.



Si se conectan las dos baterías en paralelo, borne (+) con borne (+) y borne (-) con borne (-), el voltaje que se obtiene entre sus terminales comunes es:

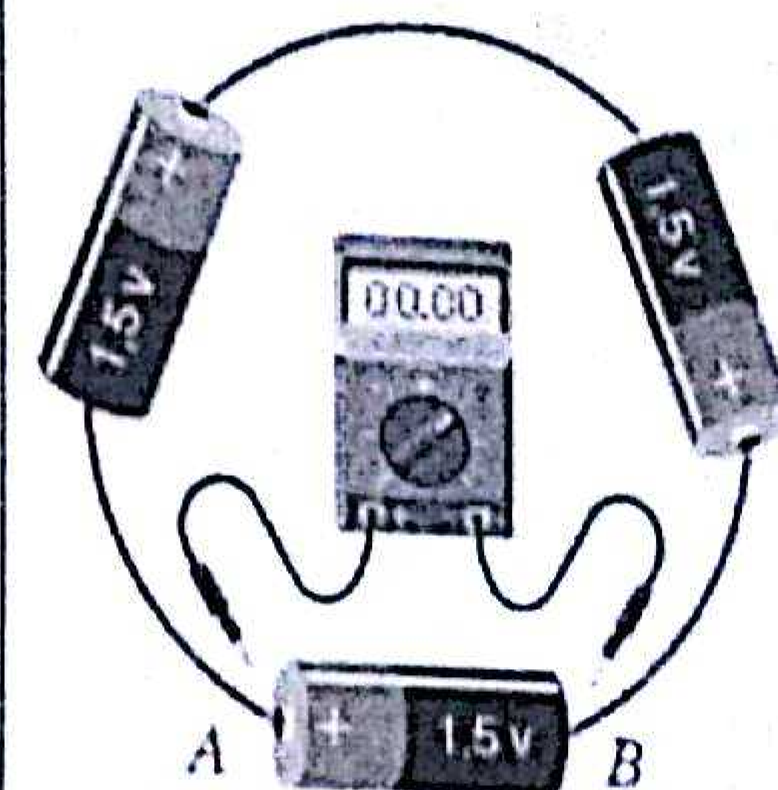
a) cero
b) 9,20 voltios
c) 11,6 voltios
d) 10,8 voltios
e) 8,40 voltios

PE-7.04. ***Cerrando un circuito con puras pilas***

Un estudiante conecta tres pilas idénticas de fem = 1,5 voltios y resistencias internas 1Ω, formando un circuito cerrado, de modo que el polo (+) de una pila está conectado al polo (-) de la siguiente, como se ilustra en la figura. Si el estudiante mide con un voltímetro a través de los bornes A y B de una de las pilas.

¿Cuál será la lectura del voltímetro?

a) cero b) 1,5 V c) 2,0 V d) 3,0 V e) 4,5 V

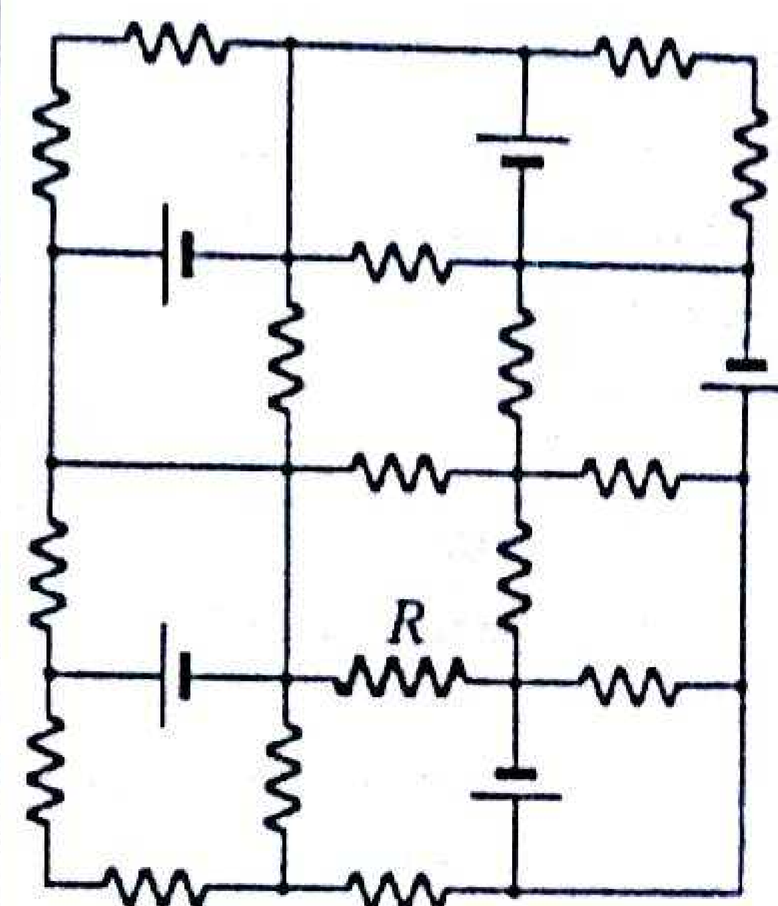


PE-7.05. ***Busque una buena ruta y sígala con Kirchhoff***

En el circuito mostrado todas las baterías son idénticas, con fem de 1 voltio y de resistencias internas despreciables. La resistencia *R* vale 1 Ω y el resto de las resistencias tienen un valor de 0,5 Ω. Se desprecia la resistencia de los alambres de conexión.

La corriente que circula por la resistencia *R* es:

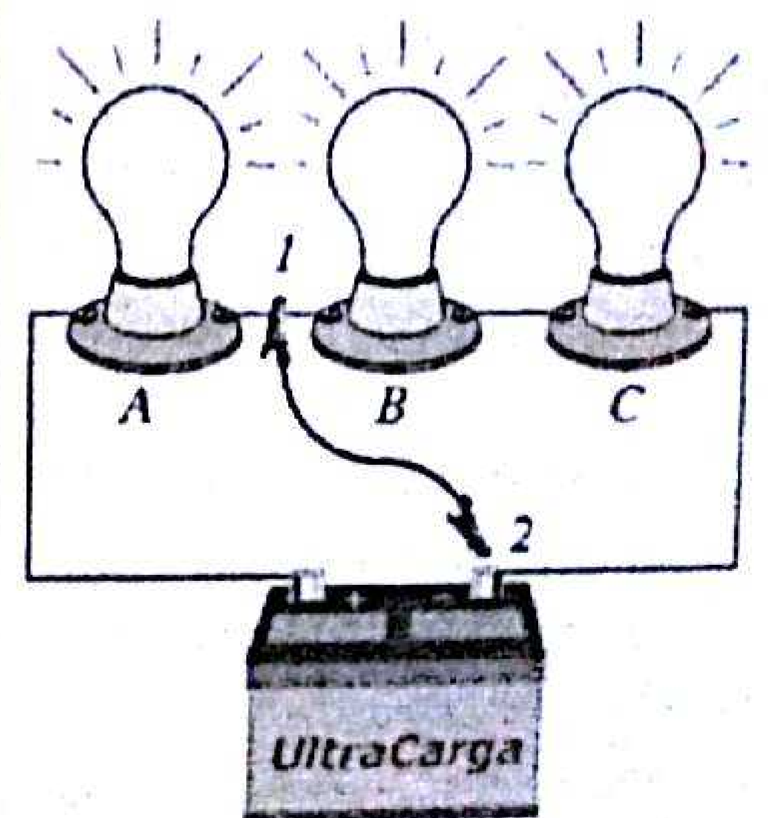
a) cero b) 1 A c) 2 A d) 3 A e) 4 A



PE-7.06. ***¡Cuidado con quemar los bombillos!***

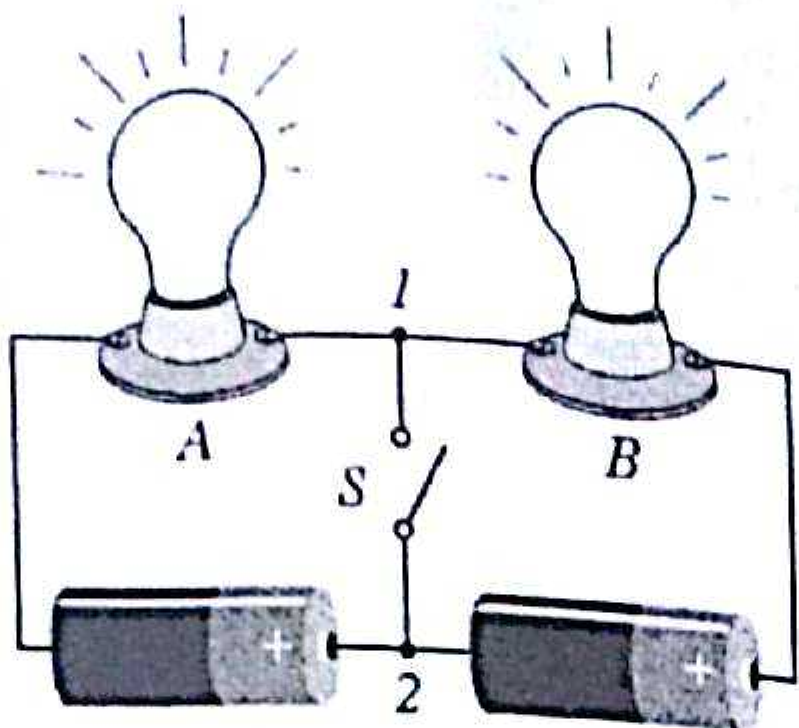
Tres bombillos idénticos A, B y C, se encuentran conectados en serie a una batería ideal. ¿Qué sucederá al conectar un alambre entre los puntos 1 y 2?

a) Los tres siguen brillando con igual intensidad.
b) Los tres brillan igual, pero con menor intensidad.
c) Los tres bombillos se apagan.
d) El bombillo *A* brilla menos, mientras que los bombillos *B* y *C* brillan más.
e) El bombillo *A* brilla más, mientras que los bombillos *B* y *C* se apagan.



PE-7.07. *Dos pilas para dos bombillos*

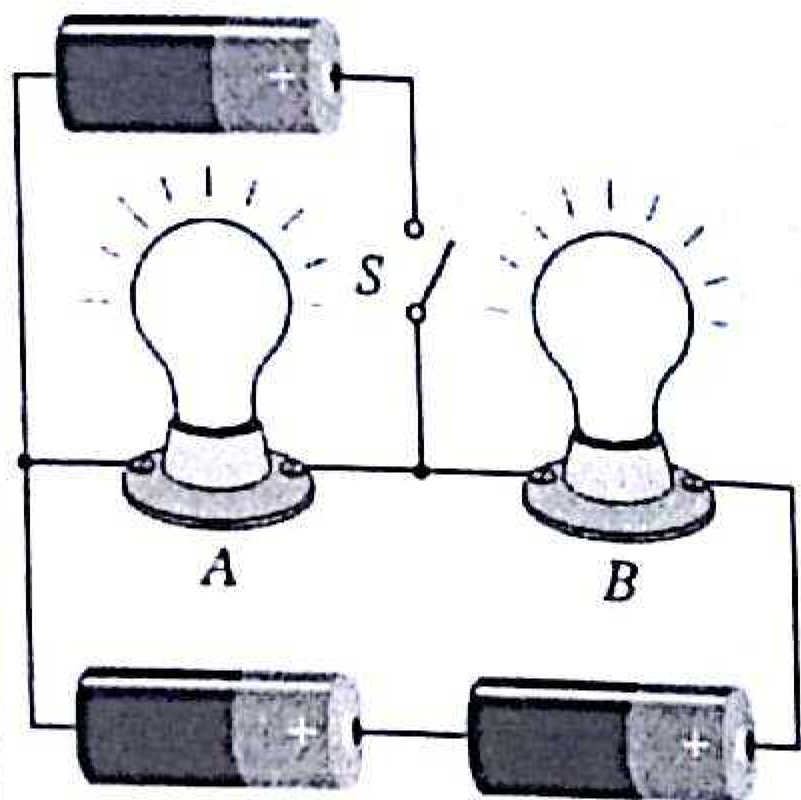
Dos bombillos idénticos se encuentran conectados en serie a dos pilas ideales idénticas. ¿Qué sucederá al conectar con un interruptor S los puntos 1 y 2?



a) Los dos bombillos siguen brillando igual que antes.
b) Los dos bombillos brillan igual pero con menor intensidad.
c) Los dos bombillos se apagan.
d) El bombillo A brilla menos y el bombillo B brilla más.
e) El bombillo A brilla más y el bombillo B brilla menos.

PE-7.08. *Conectando una pila de refuerzo*

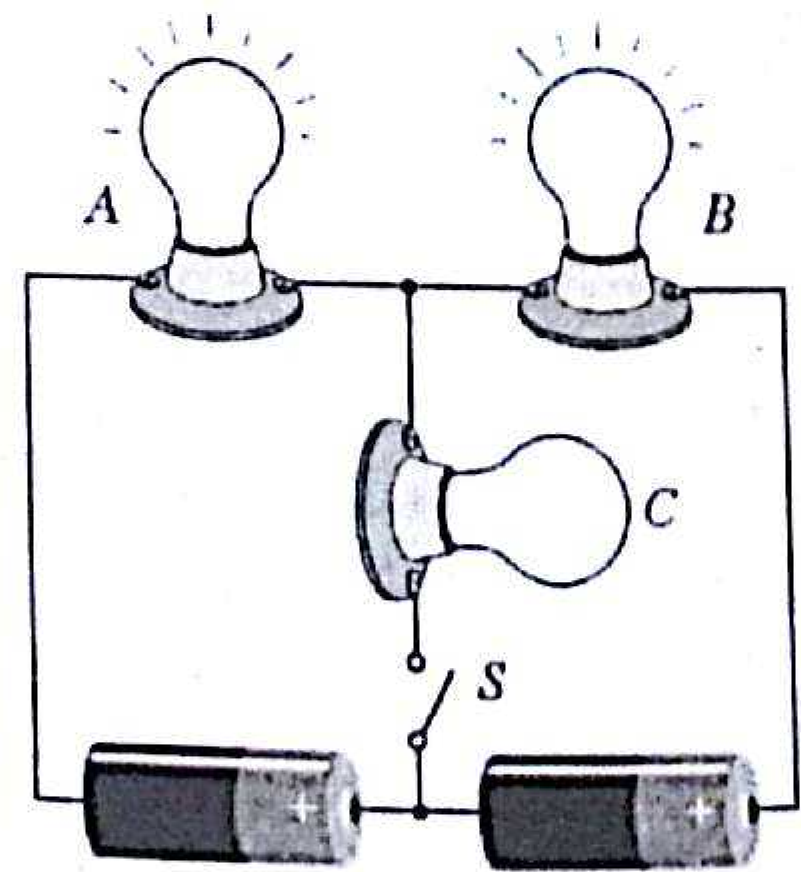
Dos bombillos idénticos A y B se encuentran conectados en serie a dos pilas idénticas de fem constante y sin resistencia interna. ¿Qué sucederá al cerrar el interruptor S, con lo cual se conecta al bombillo A, una pila idéntica adicional ?



a) Los dos bombillos siguen brillando igual que antes.
b) Los dos bombillos brillan con mayor intensidad que antes.
c) El bombillo B brilla igual que antes y el A brilla más.
d) El bombillo B brilla menos que antes y el A brilla más.
e) El bombillo A brilla más que antes y el B se apaga.

PE-7.09. *Intercalando un bombillo más.*

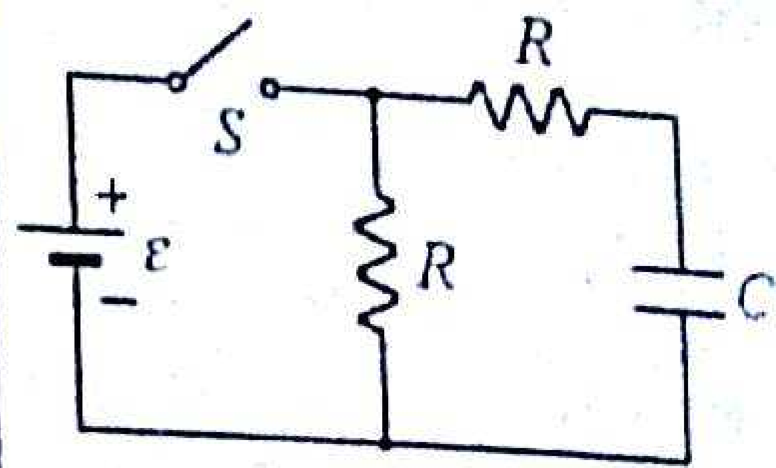
El circuito mostrado ha estado funcionando por un tiempo largo. Las dos pilas son idénticas, de fem constante y sin resistencia interna. Los tres bombillos son idénticos. ¿Qué sucederá al cerrar el interruptor S?

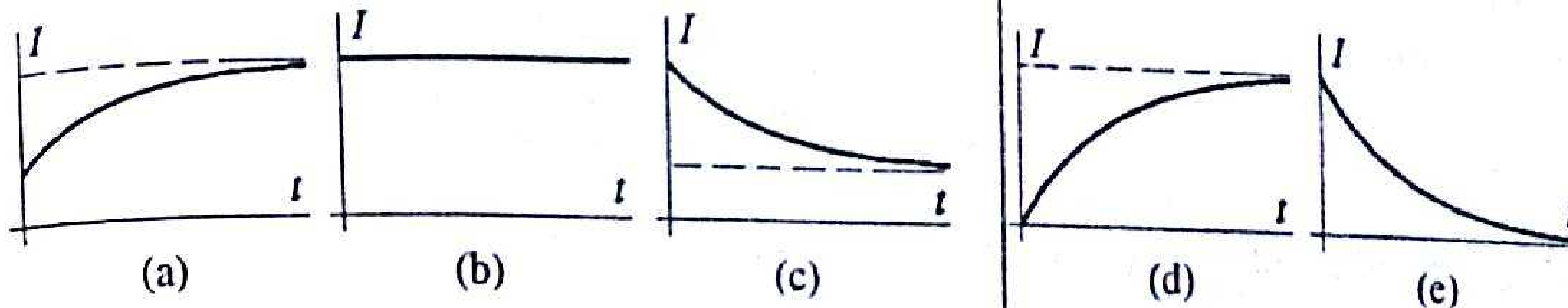


a) Los bombillos A y B brillan igual que antes y el bombillo C brilla más que ellos.
b) Los bombillos A y B brillan igual que antes y el bombillo C no prende.
e) El bombillo C prende y los bombillos A y B se apagan.
c) Los bombillos B y C brillan más que el bombillo A.
d) Los bombillos A y C brillan más que el bombillo B.

PE-7.10. *Variación de la corriente en R_2.*

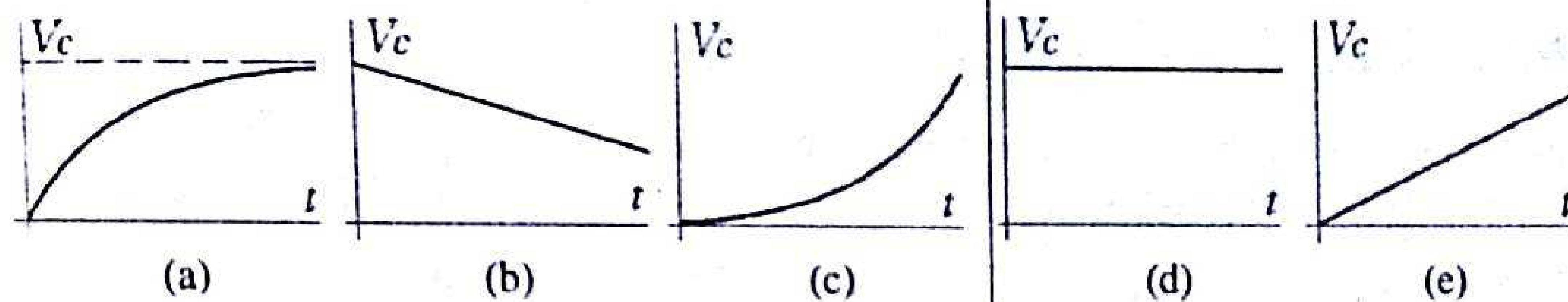
El circuito mostrado a la derecha, el capacitor está inicialmente descargado y en el instante $t = 0$ se cierra el interruptor S. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la corriente I de la batería en función del tiempo?





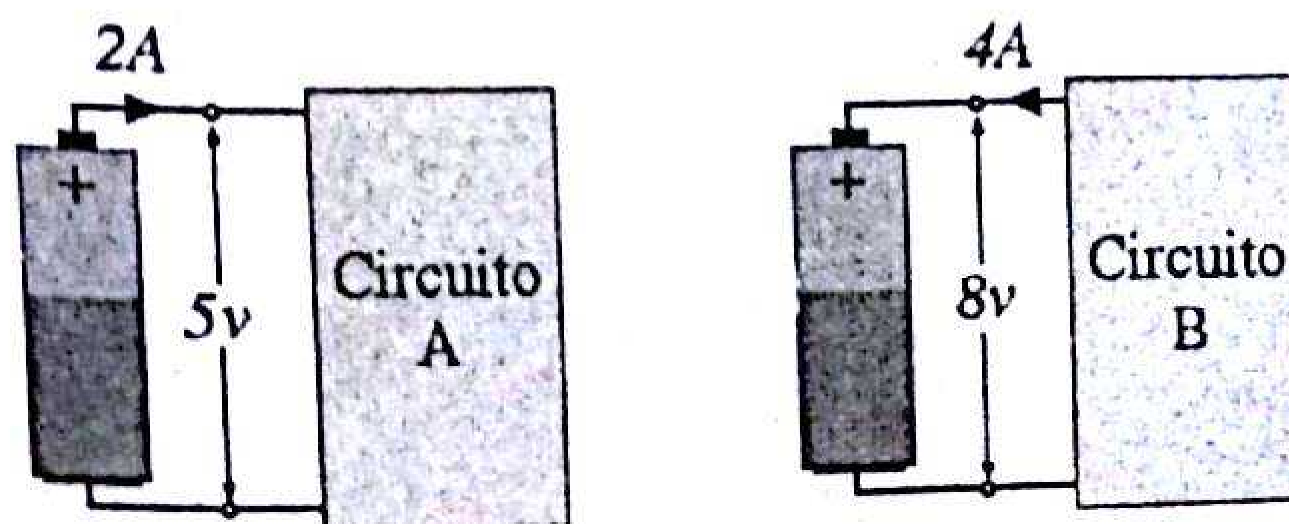
PE-7.11. *Cargando capacitor con corriente constante*

Suponga que se desea cargar un condensador manteniendo la corriente constante. ¿Cuál de los siguientes gráficos representaría la diferencia de potencial a través del condensador en el transcurso del tiempo?



PE-7.12. *Distintos comportamientos de una pila*

Cuando una pila de fem desconocida se conecta al circuito A, una corriente de 2 A *sale* de su borne positivo y el voltaje entre sus bornes es 5 V. Cuando la misma pila se conecta al circuito B, una corriente de 4 A *entra* a su borne positivo y el voltaje entre sus bornes es 8 V.



¿Cuál es es la fem de esta pila?

a) 5,5 V
b) 6,0 V
c) 6,5 V
d) 7,0 V
e) 7,5 V

PE-7.13. *Misma potencia para distintas resistencias*

Cuando una batería de resistencia interna r está conectada a una resistencia R_1, esta disipa una cierta potencia. Cuando la misma batería se conecta a otra resistencia, $R_2 \neq R_1$, esta disipa la misma potencia. ¿Qué relación guardan los valores de R_1 y R_2?

(a) $R_1 - R_2 = r$,

(b) $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = r$

(c) $\dfrac{R_1 + R_2}{2} = r$,

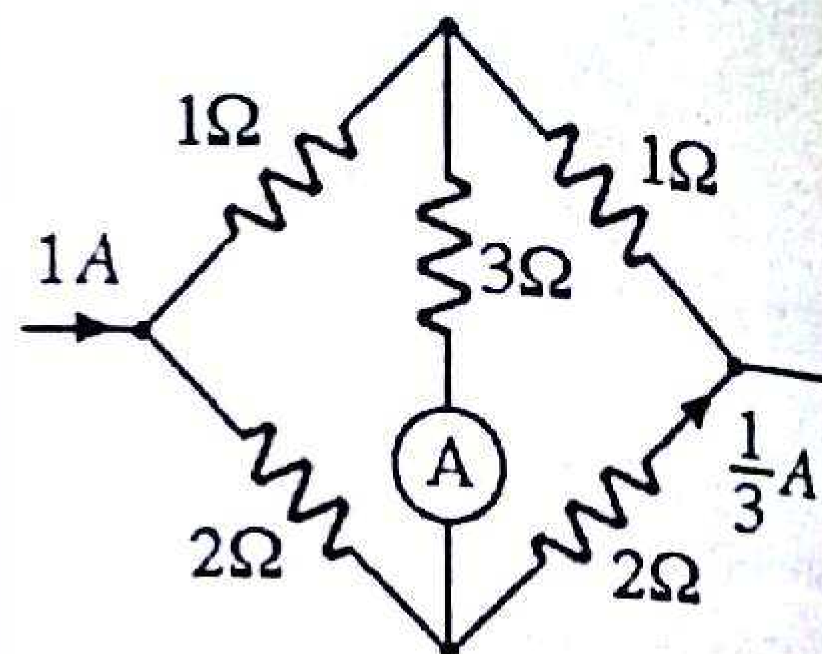
(d) $R_1 R_2 = r^2$

(e) Es imposible.

PE-7.14. *Distribución de corrientes en un puente*

Cinco resistencias están conectadas en un circuito tipo puente, y son conocidas los valores de las dos corrientes en las ramas indicadas. ¿Cuál será la lectura del amperímetro que está en serie con la resistencia de 3 Ω?

a) 1/2 A. b) cero. c) 1/4 A. d) 1/3 A. e) 2/3 A.

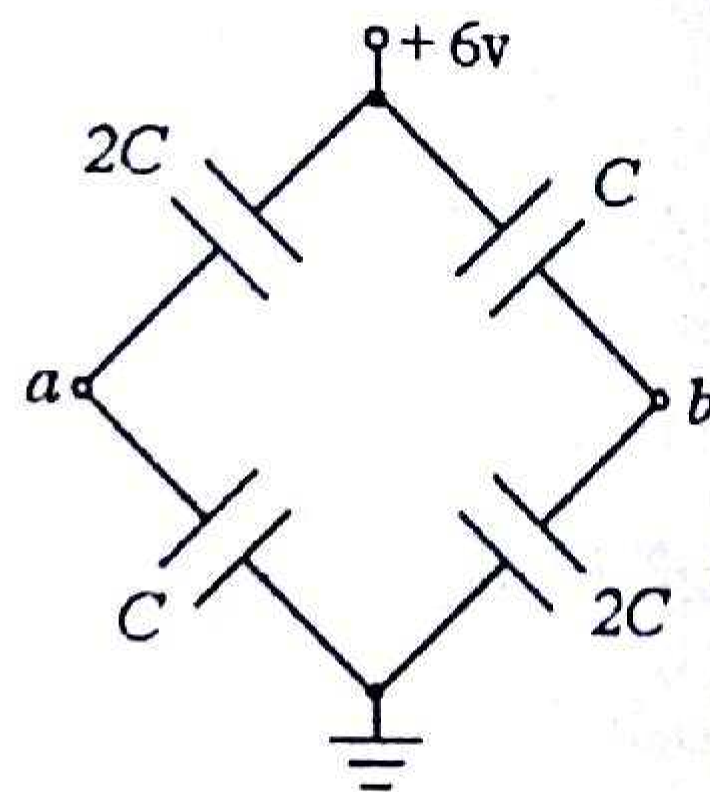


PE-7.15. *Voltajes entre capacitores*

En el circuito de capacitancias mostrado, la diferencia de potencial entre los puntos a y b es:

a) $V_{ab} = 0$, b) $V_{ab} = 3V$, c) $V_{ab} = 2V$,

d) $V_{ab} = 4V$, e) $V_{ab} = 1V$

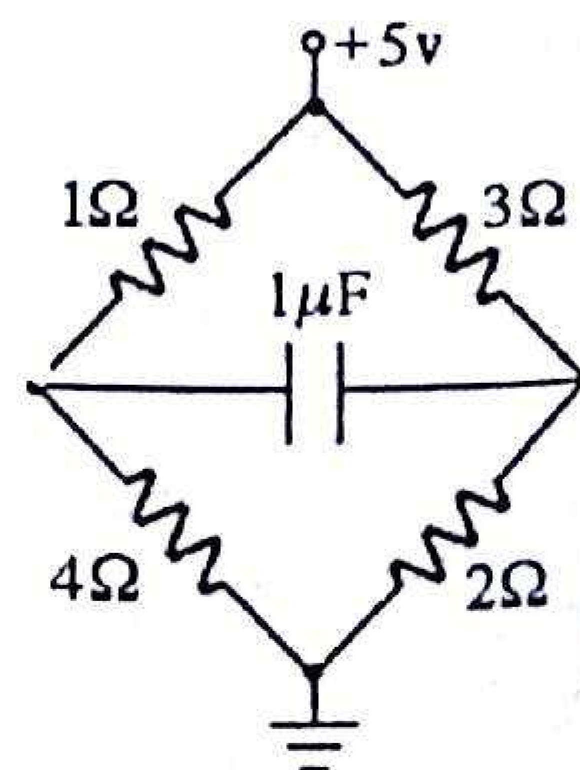


PE-7.16. *Carga del capacitor*

Un capacitor está conectado a cuatro resistencias en un puente, como indica la figura. La carga del capacitor es:

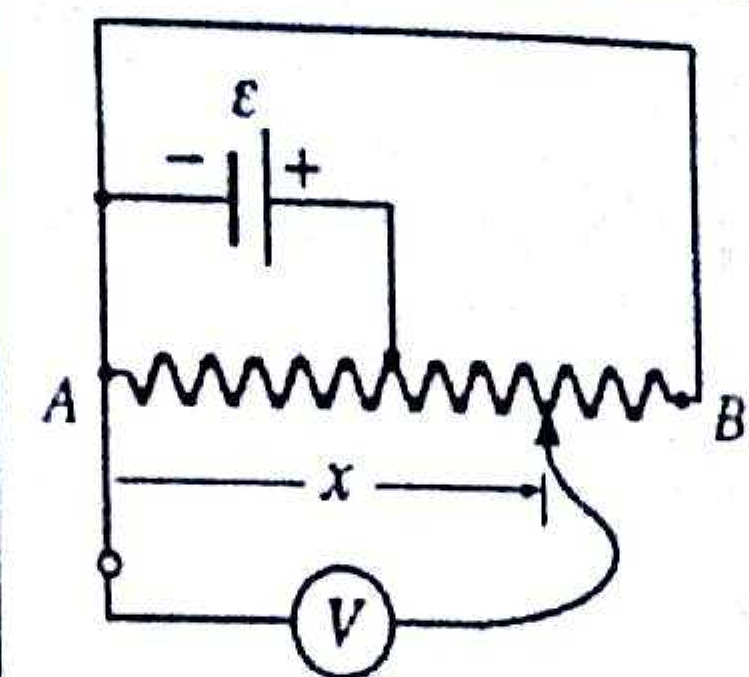
a) $Q = 0$, b) $Q = 1\ \mu C$, c) $Q = 4\ \mu C$,

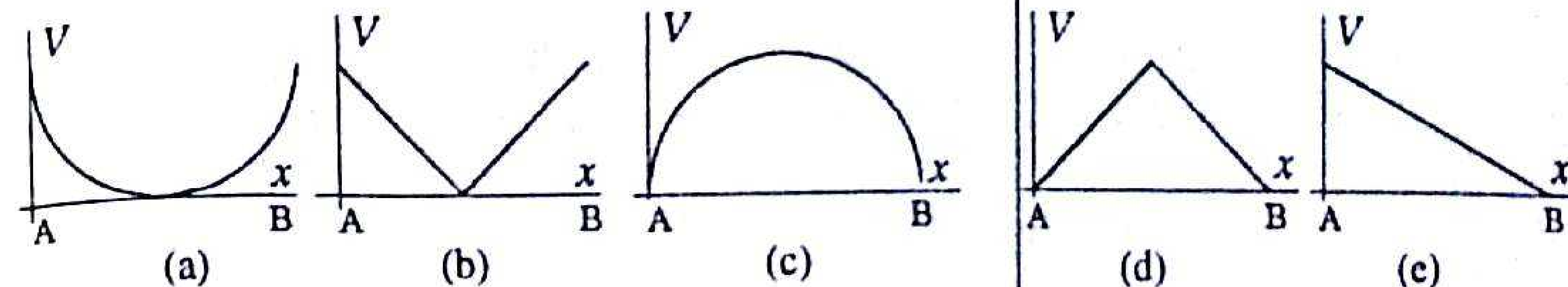
d) $Q = 3\ \mu C$, e) $Q = 2\ \mu C$



PE-7.17. *¿Cuál es el gráfico del voltaje de salida?*

Un potenciómetro AB está conectado a una batería de la manera mostrada en la figura. A medida que movemos el cursor del potenciómetro desde A hasta B, se mide con un voltímetro el voltaje de salida. ¿Cuál de estos gráficos representa el voltaje V en función de la posición, x?





PE-7.18. *¿Cuál bombillo brilla más, cuál brilla menos?*

Cinco bombillos idénticos están conectados a una pila como muestra la figura. Suponga que todos los bombillos presentan igual resistencia, independiente del voltaje aplicado. ¿Cómo se comparan las potencias de los bombillos?

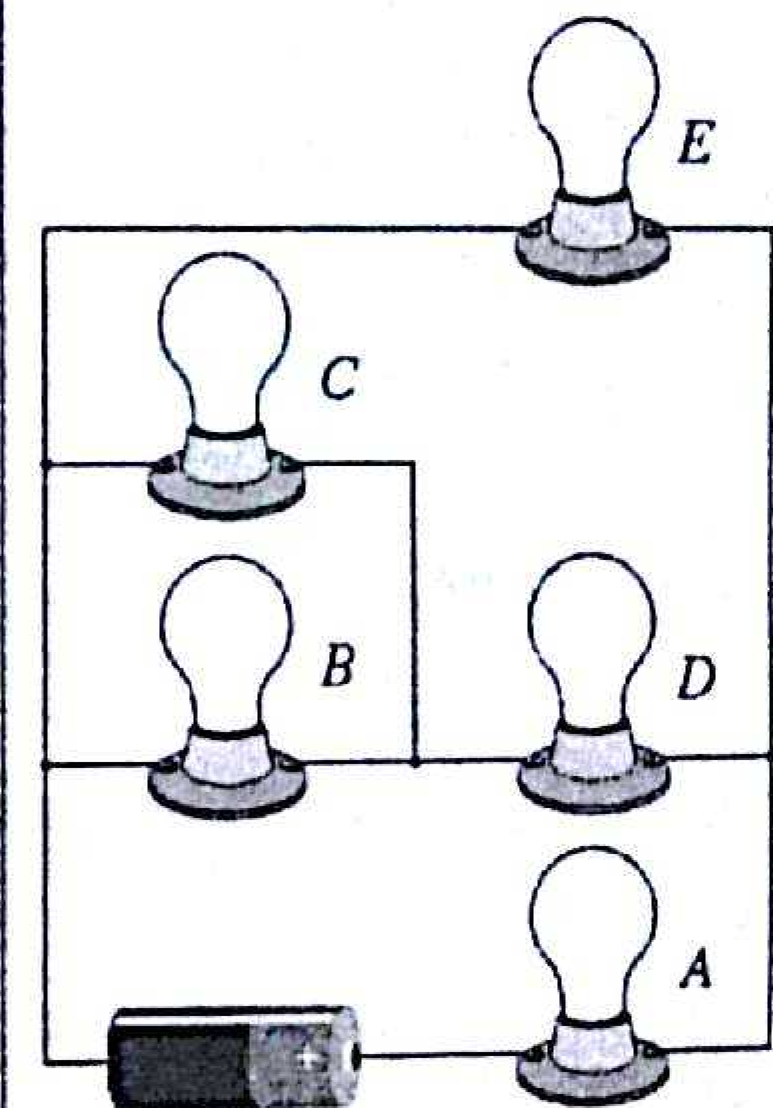
a) $P_A > P_D > P_B > P_C > P_E$.

b) $P_E > P_C = P_B > P_D > P_A$.

c) $P_B = P_C > P_D > P_E > P_A$.

d) $P_A > P_E > P_D > P_B = P_C$.

e) $P_A = P_E = P_D > P_B = P_C$.



CAP. 7: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
7.01				✓	
7.03			✓		
7.05			✓		
7.07	✓				
7.09		✓			
7.11					✓
7.13				✓	
7.15			✓		
7.17				✓	

	a	b	c	d	e
7.02					✓
7.04	✓				
7.06					✓
7.08	✓				
7.10			✓		
7.12		✓			
7.14		✓			
7.16					✓
7.18				✓	

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Para los lectores que deseen aclarar, ampliar o profundizar sus conocimientos sobre este tema a nivel de física básica universitaria, nos permitimos sugerir los siguientes libros:

ALONSO, M. y FINN, E.: *Física,* Addison Wesley, 1992.

BÚJOVTSEV, B., KRIVCHENKOV, V, MIAKISHEV, G. y SARÁEVA, I.: *Problemas Seleccionados de Física Elemental*, Editorial Mir Moscú, 1979.

EISBERG, R. y LERNER, L. S: *Física, Vol. 2*, McGraw-Hill, 1984.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON R. B. and SANDS M: *Lectures on Physics, Vol. 2*, Addison-Wesley, 1964.

FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S and THORNTON, S: *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

GIANCOLI, D: *Física: Principios con aplicaciones*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J: *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, 1997.

LEA, S y BURKE, J: Física: *La naturaleza de las cosas, Volumen 2*, International Thomson Editores, 1999.

PURCELL, E. M: *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, Volume 2* McGraw-Hill, 1965.

SEARS, F, ZEMANSKY, M and YOUNG H, *University Physics*, 6th Edition, Addison-Wesley, 1982.

SERWAY, R. A: *Física, Volumen 2*, Cuarta edición, McGraw-Hill, 1997.

SLOBODETSKI, I. y ORLOV, V: *Olimpiadas de Física de la Unión Soviética*, Vneshtorgizdat, Moscú, 1989.

TIPLER, P. A: *Física, Volumen 2*, Tercera edición, Editorial Reverté, 1996.

YOUNG H. D. and FREEDMAN R. A: *University Physics, Vol. 1*, 9th Edition, Addison-Wesley, 1996.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Ley de Coulomb	$\vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$ $\quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0\text{x}10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
Campo eléctrico $(\vec{E} = \vec{F}/q_0)$	Campo de carga puntual: $\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ Distribución: $\vec{E} = k\sum\frac{Q}{r^2}\hat{r}_i$ $\quad \vec{E} = k\int\frac{dQ}{r^2}\hat{r}$
Fujo eléctrico	$\Phi_E = \int_S \vec{E}\bullet d\vec{A}$
Ley de Gauss	$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$
Cambio de Energía Potencial	$\Delta U = -q_0\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{l}$
Diferencia de Potencial	$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{l}$
Potencial Eléctrico	$V_P = -\int_\infty^P \vec{E}\bullet d\vec{l}$ $\quad (V_\infty = 0)$
Potencial de carga puntual	$V_r = k\frac{Q}{r}$ $\quad (V_\infty = 0)$
Potencial de distribución cargas	$V = k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}$ $\quad V = k\int\frac{dQ}{r}$
Energía de dos cargas puntuales	$U = k\frac{qQ}{r}$
Energía de sistema de cargas	$U = k\sum_{i<j}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}$
Componentes del campo eléctrico	$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$
Capacitancia	$C = \frac{Q}{V}$
Capacitor de placas paralelas	$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Capacitores en Serie	$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...+\frac{1}{C_n}$
Capacitores en Paralelo	$C_{eq}=C_1+C_2+...+C_n$
Energía en un Capacitor	$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2$
Densidad de Energía Eléctrica	$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
Capacitor con Dieléctrico	$C=\kappa C_0$
Constante Dieléctrica	$\frac{1}{\kappa}=1-\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$
Ley de Gauss en Dieléctricos	$\varepsilon_0\oint_S \kappa\vec{E}\bullet d\vec{A}=Q$
Intensidad de Corriente	$I=\frac{dQ}{dt}$
Densidad de Corriente: $J = I/A$	$I=\int \vec{J}\bullet d\vec{A}$ $\quad \vec{J}=nq\vec{v}_d$
Conductividad y Resistividad	$\vec{J}=\sigma\vec{E}=\frac{1}{\rho}\vec{E}$
Resistencia	$R=V/I$
Conductor de sección constante	$R=\rho(\frac{L}{A})$
Resistividad y Temperatura	$\rho(T)=\rho_0[1+\alpha(T-T_0)]$
Ley de Ohm	$R=V/I$ *Independiente de V*
Potencia Eléctrica	$P=VI=I^2R=V^2/R$
Resistencias en Serie	$R_s=R_1+R_1+....+R_n$
Resistencias en Paralelo	$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+...+\frac{1}{R_n}$
Regla de Kirchhoff de las Mallas	$\sum\Delta V_i=0$
Regla de Kirchhoff de los Nodos	$\sum\Delta I_i=0$
Carga de un Capacitor	$Q(t)=\varepsilon C(1-e^{-t/\tau})$ $\quad \tau = RC$
Descarga de un Capacitor	$Q(t)=Q_0e^{-t/\tau}$ $\quad \tau = RC$

Interacción Eléctrica

Ley de Coulomb • Campo Eléctrico • Ley de Gauss • Potencial Eléctrico • Capacitancia • Corriente y Resistencia • Circuitos de Corriente Directa



ENFOQUE METODOLÓGICO

1) *Principios Fundamentales:* Teoría expuesta en forma clara y concisa, tratando de destacar los conceptos básicos y las leyes generales.

2) *Problemas Resueltos*: Selección de problemas que cubren una amplia variedad de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones de la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos.

3) *Verifica tu Comprensión:* Preguntas expresadas en forma de elección múltiple, para que compruebes tu comprensión de los temas abordados y al mismo tiempo, desarrolles tu intuición y sentido físico.

ISBN 980-12-1157-1



lf 252 2005 621918